

***p*-LISTES. ARRANGEMENTS. PERMUTATIONS**

1. RÉUNIONS D'ENSEMBLES FINIS

1.1. Rappel

L'ensemble E est dit fini et de cardinal n , soit s'il est vide et dans ce cas $n = 0$, soit, si n est strictement positif, s'il existe une bijection de E sur l'intervalle d'entiers $[1, n]$; on dit alors que E est un n -ensemble et on écrit $\text{Card}(E) = n$ [$\text{Card}(E)$ se note aussi $|E|$].

1.2. Cardinal d'une réunion d'ensembles finis

1.2.1. Cas de deux ensembles

- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $|A \cup B| = |A| + |B|$ (résultat évident si A ou B est vide ; si $|A| = n$ et $|B| = p$, B est en bijection avec $[n+1, n+p]$ car $[1, p]$ l'est avec $[n+1, n+p]$, et par suite $A \cup B$ est en bijection avec $[1, n] \cup [n+1, n+p] = [1, n+p]$).

Remarque : avec une introduction différente ce résultat est parfois pris comme *définition* de la *somme* de deux nombres.

- Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$ et $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ (réunions disjointes) d'où, $|A \cup B| = |A \cap \overline{B}| + |B|$ et $|A| = |A \cap \overline{B}| + |A \cap B|$ puis $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

1.2.2. Cas de n ensembles

Soit $(E_i)_{i \in [1, n]}$, n ensembles finis.

Si les E_i sont deux à deux disjoints, alors, $\left| \bigcup_{1 \leq i \leq n} E_i \right| = \sum_{1 \leq i \leq n} |E_i|$ et sinon,

$$\left| \bigcup_{1 \leq i \leq n} E_i \right| = \sum_{1 \leq i \leq n} |E_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |E_i \cap E_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |E_i \cap E_j \cap E_k| + \dots + (-1)^n \left| \bigcap_{1 \leq i \leq n} E_i \right|$$

[*formule du crible* ou de **Sylvester** ; (démonstration par un raisonnement combinatoire ou par récurrence ; voir page 441)]

2. PRODUITS D'ENSEMBLES FINIS

2.1. Cas de deux ensembles

2.1.1. Définition

Le produit $A \times B$ des ensembles A, B est l'ensemble des couples (x, y) , $x \in A$ et $y \in B$.

2.1.2. Théorème $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$, et $E_i = \{(a_i, y), y \in B\}$ alors $A \times B = \bigcup_{1 \leq i \leq n} E_i$,

les E_i étant deux à deux disjoints et $|E_i| = |B|$ car $(a_i, y) \mapsto y$ est une bijection de E_i sur B . Il en résulte $|A \times B| = np = |A| \cdot |B|$.

Remarque : par une approche différente ceci pourrait être une *définition* du *produit* de deux nombres.

2.2. Cas de p ensembles

2.2.1. Définition

Étant donnés p ensembles finis $A_1, \dots, A_p$, tout élément de la forme $(x_1, \dots, x_k, \dots, x_p)$ où, pour tout $k \in [1, p]$, x_k appartient à A_k , est appelé p -liste ou p -uplet. L'ensemble de ces p -listes, noté $A_1 \times \dots \times A_p$, est le produit cartésien de ces ensembles.

$$2.2.2. \text{ Théorème} \quad |A_1 \times \dots \times A_p| = \prod_{1 \leq k \leq p} |A_k|$$

Raisonner par récurrence en remarquant que $A_1 \times \dots \times A_p = (A_1 \times \dots \times A_{p-1}) \times A_p$.

2.2.3. Cas particulier

Le produit $A \times \dots \times A$ de p facteurs égaux à A est noté A^p et $|A^p| = |A|^p$.

Le cardinal de l'ensemble A^p des p -listes d'un ensemble fini A est $|A|^p$.

2.2.4. Dénombrement des applications

Le cardinal de l'ensemble des applications d'un n -ensemble dans un p -ensemble est p^n .

En effet, une application f de $\{x_1, \dots, x_n\}$ dans $\{y_1, \dots, y_p\}$ est déterminée par la donnée de la n -liste $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ qui est un élément quelconque de Y^n .

3. ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

3.1. Arrangements

3.1.1. Définition

Soient p, n deux naturels, $1 \leq p \leq n$, et E un n -ensemble. Un arrangement p à p de E est un p -uplet $(e_1, \dots, e_p)$ formé de p éléments de E deux à deux distincts.

Comme un tel arrangement est défini par une application injective de $I_p = [1, p]$ dans E on peut aussi identifier les Arrangements p à p de E avec les Injections de I_p dans E .

3.1.2. Théorème

Le nombre d'arrangements d'un n -ensemble p à p est $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$

On peut raisonner, soit directement en remarquant que, pour un arrangement $(e_1, \dots, e_p)$, il y a n choix possibles pour e_1 , $(n-1)$ choix possibles pour $e_2, \dots, (n-p+1)$ pour e_p ; soit par récurrence sur p , en remarquant que $A_n^1 = n$ et $A_n^p = (n-p+1)A_n^{p-1}$.

En identifiant "Arrangements" et "Injections" on peut raisonner par récurrence.

Soit $a \in E$ et $\mathcal{I}_a$ l'ensemble des injections ι de I_p dans E telles que $\iota(p) = a$. $|\mathcal{I}_a| = A_{n-1}^{p-1}$ et comme l'ensemble $\mathcal{I}$ des injections de I_p dans E est la réunion des $\mathcal{I}_a$ pour $a \in E$, on a l'égalité $|\mathcal{I}| = n|\mathcal{I}_a|$ d'où $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$ qui, avec $A_{n-p+1}^1 = n-p+1$, permet de conclure.

3.2. Permutations

C'est le cas particulier des arrangements avec $p = n$.

Pour $n \geq 1$, on appelle permutation d'un n -ensemble E , tout arrangement de E n à n .

Le nombre de permutations d'un n -ensemble E (et donc de bijections de E dans E) est $n!$

4. APPLICATIONS

4.1. Tirage de boules

Il s'agit de tirer p boules dans une urne qui en contient n numérotées de 1 à n et de les placer ensuite (une par case) à la case n°1, puis n°2,..., puis n° p .

4.1.1. Tirages ordonnés (successifs) avec remise

Leur nombre est n^p car il s'agit des applications de l'ensemble des p emplacements (ou cases) dans l'ensemble des n boules.

4.1.2. Tirages ordonnés sans remise

Leur nombre est $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$ car il s'agit des applications *injectives* de l'ensemble des p cases de rangement dans l'ensemble des n boules.

4.2. Exemples d'intervention

4.2.1. Exercice 1. *Combien peut-on écrire de nombres de trois chiffres contenant au moins l'un des chiffres 0, 3, 6, 9 ?*

♦ Si E est l'ensemble des nombres à trois chiffres, $|E| = 900$ et, si A est la partie de E formée des nombres contenant au moins l'un des chiffres 0, 3, 6, 9, alors $|A| = |E| - |\overline{A}|$. Or $\overline{A}$ est l'ensemble des nombres à trois chiffres écrits avec les seuls chiffres 1, 2, 4, 5, 7, 8 d'où $|\overline{A}| = 6^3$ (nombre des applications de $\{\bullet, \bullet, \bullet\}$ dans $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$). Il en résulte $|A| = 900 - 216 = 684$.

4.2.2. Exercice 2. *Soit les nombres obtenus en permutant 1, 2, 3, 4, 5, 6.*

1°) *Quel est le nombre de ces nombres ?*

2°) *Rangés par ordre croissant, quel est le rang de 362 145, quel est le 500^e nombre ?*

3°) *Montrer qu'aucun de ces nombres n'est ni premier ni un carré parfait.*

4°) *Quelle est la somme de ces nombres ?*

♦ 1°) Il y en a $6! = 720$ (autant que de permutations de leurs six chiffres).

2°) $5! = 120$ de ces nombres commencent par 1, $5! = 120$ commencent par 2, $4 \times 24 = 96$ commencent par 31, 32, 34, 35 ($120 + 120 + 96 = 336$) puis on a $3! = 6$ nombres commençant par 361 et enfin 362 145 qui a donc le rang 343. Il y a 480 nombres commençant par 1, 2, 3, 4, ensuite 24 commençant par 51 dont le plus grand est 516 432. En revenant en arrière, 516 432, 516 423, 516 342, 516 324 on trouve donc 516 243 pour 500^e de ces nombres.

3°) Pour chacun de ces nombres la somme des chiffres est 21 et donc tous ces nombres sont multiples de 3 et, par suite, non premiers ; comme cette somme n'est pas multiple de 9, aucun de ces nombres n'est un carré.

4°) Comme chacun des 6 chiffres peut occuper chacune des 6 places il y a $5!$ nombres où l'un de ces chiffres est chiffre des unités, autant où il est chiffre des dizaines, etc.

La somme des unités est donc égale à $1 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times 120$, la somme des dizaines à $10 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times 120$...

La somme cherchée vaut ainsi :

$$(1 + 10 + 100 + 1000 + 10\,000 + 100\,000) \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times 120 \\ = 279\,999\,720.$$

4.2.3. Alphabet Braille

Avec une configuration de six points disposés en rectangle et tels que chacun peut être en relief ou non on dispose de $2^6 = 64$ signes différents permettant d'écrire toutes les

lettres de l'alphabet, tous les chiffres ainsi que la ponctuation

• •
• •
• •

4.2.4. Nombre de parties d'un n -ensemble

Une partie X d'un n -ensemble A est *déterminée* par sa *fonction caractéristique*, application de A dans $\{0, 1\}$, qui à $x \in X$ associe 1 et à $x \in A \setminus X$ associe 0. Le nombre de parties du n -ensemble A est donc égal au nombre, 2^n , des applications de A dans $\{0, 1\}$.

4.2.5. Nombre de couples (X_1, X_2) (resp. de paires) de parties d'un n -ensemble E telles que $X_1 \cup X_2 = E$

Un couple (X_1, X_2) de parties du n -ensemble E tel que $X_1 \cup X_2 = E$ est *déterminé* par la donnée de l'application f_{X_1, X_2} de E , dans l'ensemble F , à trois éléments, $\{1, 2, \{1, 2\}\}$, définie par :

$$x \in X_1 \setminus X_1 \cap X_2 : f_{X_1, X_2}(x) = 1 ; x \in X_2 \setminus X_1 \cap X_2 : f_{X_1, X_2}(x) = 2 ; x \in X_1 \cap X_2 : f_{X_1, X_2}(x) = \{1, 2\}$$

Le nombre de ces couples est donc : 3^n .

Les *couples* (X_1, X_2) et (X_2, X_1) , tels que $X_1 \cup X_2 = E$, sont distincts sauf si $X_1 = X_2 = E$.

Par suite, le nombre de *paires* $\{X_1, X_2\}$ de parties de E telles que $X_1 \cup X_2 = E$ vaut :

$$\frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^n + 1}{2}.$$

On peut généraliser en remplaçant " couple " par " p -liste " :

la p -liste $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ de parties de E telle que $\bigcup X_i = E$ est *déterminée* par la donnée de l'application $f_{X_1, X_2, \dots, X_p}$ de E , dans l'ensemble F des parties *non vides* de $\{1, 2, \dots, p\}$, ainsi définie :

$\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ étant une k -partie ($k \neq 0$) de $\{1, 2, \dots, p\}$, $f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x) = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ si et seulement si x appartient à *exactement* $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$.

Comme $|F| = 2^p - 1$ le nombre de ces p -listes est : $(2^p - 1)^n$.

DÉNOMBREMENT DES COMBINAISONS

Toute partie à p éléments d'un ensemble possédant n éléments ($p \in [0, n]$) est appelée combinaison sans répétition (ou combinaison) de ces n éléments p à p .

Le nombre de parties à p éléments (ou p -parties) d'un ensemble E de n éléments (appelé aussi n -ensemble) étant majoré par 2^n , nombre des parties de E , est fini.

1. DÉFINITION

n et p étant deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$ on note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de n éléments p à p .

C_n^p est un entier naturel ; $C_n^0 = C_n^n = 1$. Par ailleurs, comme seuls les cardinaux interviennent, on prendra souvent, pour n -ensemble, l'intervalle d'entiers $I_n = [1, n]$.

2. DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Le nombre d'injections de $I_p = [1, p]$ dans $I_n = [1, n]$ est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Or, pour déterminer une telle application injective, on peut opérer en deux étapes : d'abord choisir son ensemble image dans I_n et ceci de C_n^p façons puisque c'est une p -partie quelconque de I_n , puis considérer une bijection quelconque de I_p sur cet ensemble image et ces bijections sont en nombre $p!$.

Il en résulte l'égalité $A_n^p = C_n^p \cdot p!$ d'où :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1 \times 2 \times \dots \times p} \quad (1)$$

3. RELATIONS VÉRIFIÉES PAR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX

$$3.1. \quad C_n^p = C_n^{n-p} \quad (2)$$

L'application de l'ensemble $\mathcal{P}_p(I_n)$ des p -parties de I_n dans $\mathcal{P}(I_n)$ qui à une p -partie de I_n associe son complémentaire dans I_n est une bijection de $\mathcal{P}_p(I_n)$ sur $\mathcal{P}_{n-p}(I_n)$ ensemble des $(n-p)$ -parties de I_n .

$$3.2. \quad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \quad (3)$$

Parmi les p -parties de I_n , C_{n-1}^p ne contiennent pas n et C_{n-1}^{p-1} le contiennent d'où :

$$3.3. \quad C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} \quad (4)$$

Le nombre de couples (a, P) où P est une p -partie de I_n et $a \in P$ est $n \times C_{n-1}^{p-1}$ ou $C_n^p \times p$ selon que l'on commence par choisir a puis une $(p-1)$ -partie que l'on complète par a ou que l'on procède en sens inverse.

$$3.4. \quad C_n^p = \frac{n}{n-p} C_{n-1}^p \quad (5)$$

De manière analogue le nombre de couples (a, P) où P est une p -partie de I_n et $a \notin P$ est $n \times C_{n-1}^p$ et $C_n^p \times (n-p)$.

$$3.5. \quad C_n^p = \frac{n-p+1}{p} C_n^{p-1} \quad (6)$$

La correspondance $(a, P) \leftrightarrow (a, P' = P \setminus \{a\})$ est une bijection entre l'ensemble des couples définis en 3.3 et l'ensemble des couples (a, P') avec $a \notin P'$ et $|P'| = p-1$.

3.6. Remarques

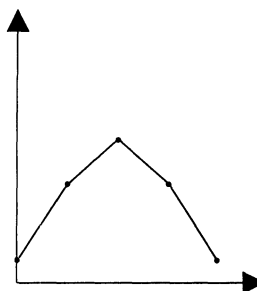
- (2) à (6) s'obtiendraient évidemment grâce à la valeur de C_n^p donnée en (1)
- (6) permet de retrouver la valeur de C_n^p à partir de la valeur initiale $C_n^0 = 1$.

4. LE TRIANGLE DE PASCAL

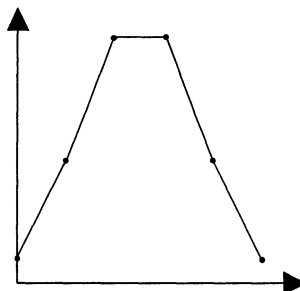
4.1. Définition

Les nombres C_n^p sont généralement présentés dans un tableau triangulaire où n est indice de ligne et p indice de colonne. Il se construit de proche en proche grâce aux valeurs $C_n^0 = C_n^n = 1$ et à la relation (3). C'est le triangle de Pascal.

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1



n pair



n impair

Chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus et au-dessus à gauche.

4.2. Étude des suites lignes et des suites colonnes

- $\frac{C_n^{p+1}}{C_n^p} = \frac{n-p}{p+1}$. Lorsque p varie de 0 à $n-1$, ce rapport décroît strictement de n à $\frac{1}{n}$.

Ce rapport prend la valeur 1 (une seule fois) si et seulement si $n-p = p+1$; n est impair, $n = 2k+1$, et $p = k$. Pour $p = k$ et $p = k+1$, C_n^p est maximum ($C_{2k+1}^k = C_{2k+1}^{k+1}$).

Si n est pair, $n = 2k$, il y a maximum unique, C_{2k}^k , pour $p = k$.

L'étude de cette suite finie, C_n^p ($0 \leq p \leq n$), montre que $C_n^p = C_n^x \Leftrightarrow x = p$ ou $x = n-p$.

- $C_{n+1}^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{n+1}{n+1-p} > C_n^p$; la suite C_n^p , ($n \geq p$, p fixé, n variable) est croissante. Pour $p > 1$, $\Delta = \frac{1}{2}(C_{n+1}^p + C_{n-1}^p) - C_n^p = \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \cdot \frac{p^2 - p}{2(n-p)(n+1-p)}$ est positif et la suite C_n^p ($n \geq p$, n variable, p fixé) est convexe (pour $p = 1$ elle est linéaire).

5. FORMULE DU BINÔME

Soit E un n -ensemble puis A et B deux ensembles disjoints ayant respectivement a et b éléments. Le nombre d'applications de E dans $A \cup B$ est $(a+b)^n$. Déterminons ce nombre d'une deuxième manière : soit $\mathcal{A}_p$ l'ensemble des applications telles que p éléments de E aient leurs images dans A , et les $n-p$ autres dans B . Les $\mathcal{A}_p$, $p \in [0, n]$, sont disjoints et leur réunion est l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications de E dans $A \cup B$ d'où, $|\mathcal{A}| = \sum_{0 \leq p \leq n} |\mathcal{A}_p|$.

Or $|\mathcal{A}_p| = C_n^p a^p b^{n-p}$ [(nombre de choix de p éléments de E) $\times$ (nombre d'applications de ces p éléments dans A) $\times$ (nombre d'applications des $n-p$ autres éléments dans B)].

Il en résulte : $(a+b)^n = \sum_{0 \leq p \leq n} C_n^p a^p b^{n-p}$ pour a et b entiers naturels.

Soit alors les deux polynômes de degré n , $(a+x)^n$ et $\sum_{0 \leq p \leq n} C_n^p a^p x^{n-p}$. Ils coïncident pour tout $x \in \mathbb{N}$ et sont donc identiques. Avec le même raisonnement pour $b = y$ on obtient

$$(a+b)^n = \sum_{0 \leq p \leq n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

Formule du binôme (de Newton) (a, b complexes).

Cette formule peut se démontrer aussi par récurrence [en utilisant (3)] ou en analysant le développement du produit de n facteurs tous égaux à $(a+b)$ (choisir a dans p des facteurs et b dans les autres). Elle est valable pour tous a, b permutables d'un anneau.

6. APPLICATIONS.

6.1. Inverse de la matrice de Pascal d'ordre $n+1$ [*triangle de Pascal limité à la ligne d'indice n (attention, la première a pour indice 0)*]

Si l'on prend les valeurs x, y liées par l'égalité $y = 1+x$, on a

$$y^i = \sum_{0 \leq j \leq i} C_i^j x^j \text{ et } x^i = (y-1)^i = \sum_{0 \leq j \leq i} C_i^j (-1)^{i-j} y^j$$

ce qui montre que l'inverse de la matrice de Pascal Π , de terme général C_i^j , (ligne $i+1$, colonne $j+1$), est la matrice Π^{-1} de terme général $(-1)^{i-j} C_i^j$ [Π^{-1} s'obtient à partir de Π en affectant du signe "-" tous les termes (situés sur des parallèles à la diagonale principale) tels que la différence des indices soit impaire].

$$\text{ex : } \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} (-1) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ -1 & 3 & -3 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

6.1.1. Nombre σ_p^n de surjections de I_n sur I_p ($n \geq p$)

Comme toute application de I_n dans I_p est une surjection de I_n sur son ensemble image on a, notant σ_k^n le nombre de surjections de I_n sur I_k , $p^n = \sum_{0 \leq k \leq p} C_p^k \sigma_k^n$.

Les $p + 1$ égalités analogues à celles-ci obtenues en donnant à p les valeurs $0, 1, 2, \dots, p$ s'écrivent matriciellement, Π étant la matrice de Pascal d'ordre $p + 1$, sous la forme :

$$\Pi \cdot \begin{bmatrix} \sigma_0^n \\ \sigma_1^n \\ \vdots \\ \sigma_p^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^n \\ 1^n \\ \vdots \\ p^n \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{bmatrix} \sigma_0^n \\ \sigma_1^n \\ \vdots \\ \sigma_p^n \end{bmatrix} = \Pi^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0^n \\ 1^n \\ \vdots \\ p^n \end{bmatrix}$$

$$\text{Il en résulte :} \quad \sigma_p^n = \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^{p-k} C_p^k k^n = \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^k C_p^k (p-k)^n$$

6.1.2. Nombre d_n de dérangements d'un n -ensemble

Un dérangement d'un ensemble est une permutation sans point fixe de cet ensemble.

Par convention $d_0 = 1$. Dans un q -ensemble, en regroupant, les permutations ayant exactement $q - k$ points fixes on obtient : $q! = \sum_{0 \leq k \leq q} C_q^{q-k} d_k = \sum_{0 \leq k \leq q} C_q^k d_k$ (le second

membre s'obtient en multipliant le nombre de façons de choisir les $q - k$ points fixes parmi q par le nombre de façons de compléter la bijection puis en sommant sur k).

$\mathbf{D}_n$ et $\mathbf{F}_n$ étant respectivement les matrices unicolonnes $(d_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(q!)_{0 \leq q \leq n}$ on a :

$$\mathbf{F}_n = \Pi \cdot \mathbf{D}_n \quad \text{d'où} \quad \mathbf{D}_n = \Pi^{-1} \cdot \mathbf{F}_n$$

La dernière ligne de cette deuxième égalité donne la valeur : $d_n = n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Remarque : $\frac{d_n}{n!}$ tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers l'infini et $d_n = E\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right)$.

6.2. Exemples d'intervention

6.2.1. Tiercé. Une course comporte vingt chevaux. Quel est le nombre de tiercés dans l'ordre, dans le désordre ? Pourquoi, "théoriquement" si une arrivée dans l'ordre rapporte x francs, une arrivée dans le désordre rapporte-t-elle $\frac{x}{5}$ francs ?

Tiercés dans l'ordre $A_{20}^3 = 6840$ - Tiercés dans le désordre $C_{20}^3 = \frac{6840}{3!} = 1140$.

Pour une arrivée dans l'ordre il y a cinq arrivées dans le désordre, donc si l'arrivée dans l'ordre rapporte x francs, chaque arrivée dans le désordre rapporte $\frac{x}{5}$ francs (théoriquement, car il y a d'autres facteurs qui entrent dans le calcul du gain).