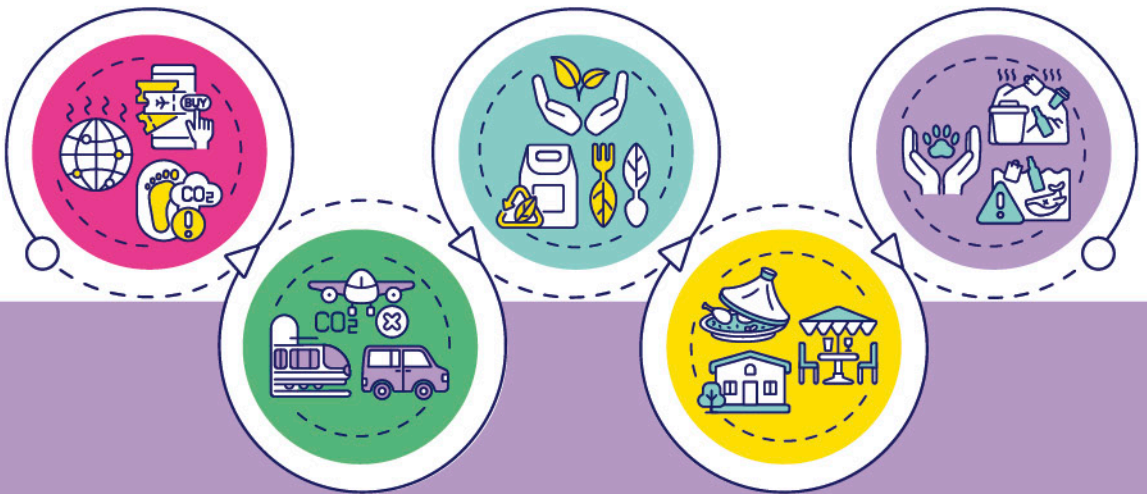


ENS D2
Licence
d'économie

EXERCICES DE **MICROÉCONOMIE**

Méthode et entraînement



Cyprien Gout
Cyprien Goux



ENS D2
Licence d'économie

EXERCICES DE MICROÉCONOMIE

Méthode et entraînement

Cyprien Goux

Professeur agrégé de sciences économiques et sociales

Cyprien Gout

Normalien-élève



Remerciements

Nous tenons à remercier toutes celles et tous ceux qui ont rendu possible l'écriture de cet ouvrage.

Nous remercions tout d'abord les éditions Ellipses, ainsi qu'Anne Lanfranchi, pour leur confiance, leur aide et leurs conseils avisés.

Un immense merci également aux relecteurs et relectrices, dont les retours pertinents nous ont permis d'améliorer ce livre afin qu'il réponde le plus précisément possible aux besoins des étudiants et étudiantes. Nous remercions ainsi chaleureusement Martin, Inès, Paul, Claudia, Jules, Oscar, Estelle, Robin, David, Romane, Camille, Lucie et Jibril.

Enfin, nous adressons un remerciement tout particulier aux enseignants et enseignantes de microéconomie que nous avons eus, de la CPGE au lycée Turgot à la Paris School of Economics, en passant par l'ENS Paris Saclay. Ils nous ont transmis le goût de la microéconomie et de son enseignement.

ISBN 9782340-121119

Dépôt légal : septembre 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Table des matières

Chapitre 1	La microéconomie du consommateur	7
1.1	Exercice 1 - Les hypothèses : [Difficulté : 1]	7
1.2	Exercice 2 - L'équilibre du consommateur : [Difficulté : 1]	16
1.3	Exercice 3 - Consommateur rationnel et bien essentiel : [Difficulté : 1] . .	23
1.4	Exercice 4 - Schéma du consommateur : [Difficulté : 2]	36
1.5	Exercice 5 - Économie de pénurie : [Difficulté : 2]	46
1.6	Exercice 6 - Consommateur et taxation : [Difficulté : 2]	58
1.7	Exercice 7 - Biens parfaitement substituables : [Difficulté : 2]	66
1.8	Exercice 8 - Arbitrage travail-loisir : [Difficulté : 2]	75
1.9	Exercice 9 - Consommateur intertemporel : [Difficulté : 2]	86
1.10	Exercice 10 - Arbitrage travail-loisir et départ en retraite : [Difficulté : 3]	96
1.11	Exercice 11 - Une fonction de taille très très imposante : [Difficulté : 3] .	105
Chapitre 2	La microéconomie du producteur	121
2.1	Exercice 1 - Une fonction de production représentative : [Difficulté : 1] .	121
2.2	Exercice 2 - Programme du producteur : [Difficulté : 1]	126
2.3	Exercice 3 - Analyse des coûts : [Difficulté : 1]	133
2.4	Exercice 4 - Schéma du producteur : [Difficulté : 1]	141
2.5	Exercice 5 - Évolution d'un marché : [Difficulté : 1]	147
2.6	Exercice 6 - Plusieurs chaînes de production : [Difficulté : 2]	154
2.7	Exercice 7 - Fonction de coût du 3 ^{ème} degré : [Difficulté : 2]	163
2.8	Exercice 8 - Rendements croissants : [Difficulté : 2]	171
2.9	Exercice 9 - Coûts à facteurs multiples : [Difficulté : 3]	179
Chapitre 3	L'équilibre partiel	187
3.1	Exercice 1 - Salaire minimum : [Difficulté : 1]	187
3.2	Exercice 2 - Demande agrégée et consommation [Difficulté : 2]	198
3.3	Exercice 3 - Un génie incompris [Difficulté : 2]	206
3.4	Exercice 4 - L'entrepreneur qui entreprend [Difficulté : 3]	220
Chapitre 4	L'équilibre général	229
4.1	Exercice 1 - Théorèmes du bien-être : [Difficulté : 1]	229
4.2	Exercice 2 - Échange et premier théorème du bien-être : [Difficulté : 1] .	240
4.3	Exercice 3 - Échange pur et équilibre en coin : [Difficulté : 2]	249
4.4	Exercice 4 - Équilibre général avec taxe : [Difficulté : 2]	258

4.5	Exercice 5 - Équilibre général et continuum d'agents : [Difficulté : 3]	270
4.6	Exercice 6 - Équilibre général de production : [Difficulté : 3]	281
4.7	Exercice 7- Équilibre général entre firmes : [Difficulté : 3]	297
Chapitre 5 Le Monopole		313
5.1	Exercice 1 - Monopole et taxation : [Difficulté : 1]	313
5.2	Exercice 2 - Monopole naturel : [Difficulté : 2]	322
5.3	Exercice 3 - Discrimination par les prix au 3 ^{ème} degré : [Difficulté : 2]	329
5.4	Exercice 4 - Discrimination et sélection (menu de tarifs) : [Difficulté : 2]	340
Chapitre 6 Oligopoles		347
6.1	Exercice 1 - Duopole de Cournot symétrique (Netslix vs Difney+) : [Difficulté : 1]	347
6.2	Exercice 2 - Cournot asymétrique : [Difficulté : 1]	356
6.3	Exercice 3 - Bertrand (Free vs SFR) : [Difficulté : 1]	364
6.4	Exercice 4 - Stackelberg simple, DJI vs entrant : [Difficulté : 1]	369
6.5	Exercice 5 - Paradoxe de Bowley : double Stackelberg [Difficulté : 2]	375
6.6	Exercice 6 : Concurrence de Stackelberg et différenciation des produits : [Difficulté : 2]	381
6.7	Exercice 7 - Cartel, stabilité et paradoxes : [Difficulté : 3]	387
6.8	Exercice 8 - Différenciation et paradoxe de Diamond : [Difficulté : 3]	400
6.9	Exercice 9 : Concurrence de Cournot : n firmes, libre entrée, incertitude sur la demande : [Difficulté : 3]	409
Chapitre 7 Bien public & Externalités		417
7.1	Exercice 1 - Bien public discret : [Difficulté : 1]	417
7.2	Exercice 2 - Bien public continu : [Difficulté : 2]	423
7.3	Exercice 3 - Mécanismes de financement d'un bien public : [Difficulté : 2]	428
7.4	Exercice 4 - Externalité : optimum social et équilibre décentralisé : [Difficulté : 1]	435
7.5	Exercice 5 - Mécanismes d'internalisation : [Difficulté : 2]	440
7.6	Exercice 6 - Externalités réciproques et limites de l'internalisation : [Difficulté : 3]	450
Chapitre 8 Sujet pour aller plus loin		457
8.1	Exercice 1 - La TVA sociale : [Difficulté : 3]	457
8.2	Exercice 2 - La Taxe Zucman : [Difficulté : 3]	478
8.3	Exercice 3 - L'ouverture à la concurrence de l'électricité en France : [Difficulté : 3]	496
8.4	Exercice 4 - Équilibre politico-économique, bien public et votant mé- dian : [Difficulté : 3]	512

Avant-propos

Ce manuel est né d'un double constat : la microéconomie exige une maîtrise rigoureuse des outils formels, mais son apprentissage devient plus accessible lorsque ces outils sont mis au service d'intuitions économiques claires. Nous avons donc voulu construire un recueil d'exercices progressif, capable d'accompagner les étudiants et étudiantes dans l'acquisition des méthodes essentielles, tout en les préparant aux exigences des examens universitaires et des concours, notamment en CPGE.

Les différents exercices ont été testés auprès d'étudiants afin d'en vérifier la faisabilité, la cohérence et l'adéquation avec les attentes pédagogiques. L'ambition de ce manuel n'est donc pas seulement de proposer des applications techniques, mais aussi d'aider à comprendre ce que les modèles microéconomiques permettent d'expliquer : les choix des consommateurs, les décisions des producteurs, le fonctionnement des marchés, les situations de pouvoir de marché ou encore les effets des politiques publiques.

L'ouvrage est organisé en huit chapitres couvrant les grands thèmes de la microéconomie classique : la théorie du consommateur, la théorie du producteur, l'équilibre partiel, l'équilibre général, le monopole, les oligopoles, les externalités et biens publics, ainsi qu'un dernier chapitre consacré à des sujets d'approfondissement appliqués aux politiques publiques. Chaque chapitre prend une structure progressive, qui va des outils fondamentaux vers des exercices plus transversaux et appliqués.

Les exercices sont classés selon trois niveaux de difficulté. Le premier niveau vise à consolider les bases : maîtrise des techniques mathématiques, compréhension des définitions et identification des mécanismes économiques essentiels. Le deuxième niveau propose des situations plus complexes, dans lesquelles les calculs et les raisonnements deviennent plus exigeants. Enfin, le troisième niveau introduit davantage à la modélisation économique : il invite à mobiliser les outils de la microéconomie pour analyser des phénomènes plus abstraits ou des enjeux concrets de politique publique.

Nous espérons que ce manuel pourra constituer un support utile, à la fois pour s'entraîner, progresser et prendre confiance dans l'usage des raisonnements microéconomiques.

La microéconomie du consommateur

1.1 Exercice 1 - Les hypothèses : [Difficulté : 1]

On considère un consommateur qui doit choisir entre des paniers composés de deux biens : x (nourriture) et y (vêtements). On note $A = (x_A, y_A)$ un panier contenant x_A unités de nourriture et y_A unités de vêtements.

Partie I : Axiomes de base

Question 1 : Rappelez la définition de la relation de préférence $\succsim$ (préférée ou indifférent). Que signifie $A \succsim B$? Définissez ensuite les relations de préférence stricte $\succ$ et d'indifférence $\sim$.

Question 2 : Énoncez les trois axiomes fondamentaux des préférences rationnelles : complétude, transitivité et monotonicité (non-satiation locale). Pour chaque axiome, donnez une interprétation économique en une phrase.

Question 3 : On observe les choix suivants d'un consommateur : il préfère le panier $A = (3, 5)$ au panier $B = (2, 6)$, et le panier $B = (2, 6)$ au panier $C = (4, 3)$. Que peut-on déduire sur la relation entre A et C si le consommateur est rationnel? Quel axiome utilisez-vous?

Question 4 : Un consommateur déclare les préférences suivantes : $A = (5, 3) \succ B = (4, 4)$, $B = (4, 4) \succ C = (3, 5)$ et $C = (3, 5) \succ A = (5, 3)$. Ces préférences sont-elles rationnelles? Justifiez. Quel axiome est violé?

Partie II : Courbes d'indifférence

Question 5 : Définissez ce qu'est une courbe d'indifférence. Pourquoi deux courbes d'indifférence ne peuvent-elles pas se croiser? Une démonstration graphique est attendue.

Question 6 : On considère un consommateur dont la fonction d'utilité est :

$$U(x, y) = xy$$

- a) Calculez le niveau d'utilité pour les paniers $A = (2, 8)$, $B = (4, 4)$ et $C = (8, 2)$.
- b) Ces trois paniers appartiennent-ils à la même courbe d'indifférence ? Justifiez.
- c) Représentez graphiquement la courbe d'indifférence passant par ces paniers dans le plan (x, y) .
- d) Donnez l'équation de cette courbe d'indifférence.

Question 7 : Pour la fonction d'utilité $U(x, y) = xy$:

- a) Rappelez la formule générale du Taux Marginal de Substitution (TMS), puis calculez le TMS de y en x .
- b) Calculez le TMS au point $(4, 4)$.
- c) Interprétez économiquement ce résultat : que représente un TMS égal à -1 ?
- d) Comment évolue le TMS le long de la courbe d'indifférence lorsque x augmente ? Calculez le TMS en $(2, 8)$ et $(8, 2)$ pour illustrer.

Partie III : Représentation des préférences

Question 8 : Soit la fonction d'utilité :

$$U(x, y) = x + 2y$$

- a) Représentez les courbes d'indifférence pour $U = 10$, $U = 20$ et $U = 30$.
- b) Calculez le TMS. Que remarquez-vous ?
- c) Comment qualifieriez-vous les biens x et y dans ce cas (compléments, substituts, autre) ?

Question 9 : On considère maintenant la fonction :

$$V(x, y) = 2x + 4y$$

- a) Les fonctions U et V représentent-elles les mêmes préférences ? Justifiez rigoureusement.
- b) Quelle transformation mathématique relie U et V ?
- c) Rappelez pourquoi la fonction d'utilité est dite « ordinale » et non « cardinale ».

Question 10 : Un individu affirme : « Si $U(A) = 100$ et $U(B) = 50$, alors le panier A procure deux fois plus de satisfaction que le panier B . » Expliquez pourquoi cette affirmation n'a pas de sens en théorie du consommateur standard. Quelle information peut-on réellement tirer de $U(A) > U(B)$?

Correction

Correction - Exercice 1 : Les hypothèses du consommateur

Partie I : Axiomes de base

Question 1 : La relation $A \succsim B$ signifie que le panier A est au moins aussi bon que le panier B . Autrement dit, le consommateur préfère faiblement A à B .

La préférence stricte est définie par :

$$A \succ B \Leftrightarrow A \succsim B \text{ et } B \not\succsim A$$

L'indifférence est définie par :

$$A \sim B \Leftrightarrow A \succsim B \text{ et } B \succsim A$$

Question 2 : Les trois axiomes fondamentaux des préférences rationnelles sont les suivants.

La complétude signifie que, pour deux paniers quelconques A et B , l'agent est toujours capable de les comparer :

$$A \succsim B \quad \text{ou} \quad B \succsim A$$

La transitivité signifie que les choix de l'agent sont cohérents :

$$A \succsim B \text{ et } B \succsim C \Rightarrow A \succsim C$$

La monotonicité, ou non-satiation locale, signifie que plus de biens est strictement préféré à moins de biens. Économiquement, cela signifie que le consommateur préfère disposer d'une quantité plus importante d'au moins un bien, sans avoir moins de l'autre.

Question 3 : On observe :

$$A \succ B$$

et :

$$B \succ C$$

Par transitivité des préférences rationnelles, on déduit :

$$A \succ C$$

L'axiome utilisé est donc l'axiome de transitivité.

Question 4 : Les préférences déclarées sont :

$$A \succ B \succ C \succ A$$

Ces préférences ne sont pas rationnelles, car elles forment un cycle. En effet, si l'agent préfère A à B , puis B à C , la transitivité impose qu'il préfère A à C . Or, il déclare aussi préférer C à A .

L'axiome violé est donc l'axiome de transitivité.

Partie II : Courbes d'indifférence

Question 5 : Une courbe d'indifférence regroupe l'ensemble des paniers procurant au consommateur le même niveau d'utilité.

Deux courbes d'indifférence ne peuvent pas se croiser. Pour le montrer, on raisonne par l'absurde. Supposons que deux courbes d'indifférence CI_1 et CI_2 se croisent en un point M .

Soit $A \in CI_1$ avec $A \neq M$, et soit $B \in CI_2$ avec $B \neq M$.

Comme A et M appartiennent à la même courbe d'indifférence CI_1 , on a :

$$A \sim M$$

Comme B et M appartiennent à la même courbe d'indifférence CI_2 , on a :

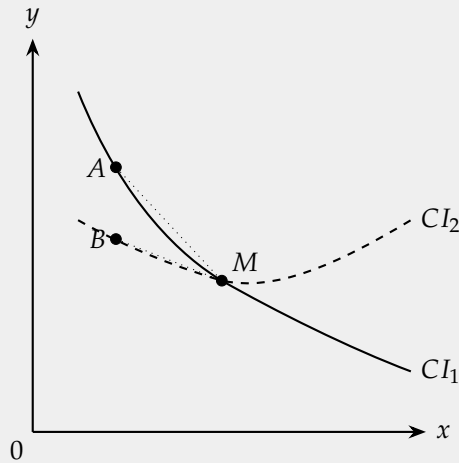
$$B \sim M$$

Par transitivité de la relation d'indifférence, on obtient :

$$A \sim B$$

Or A et B appartiennent à deux courbes d'indifférence distinctes. Ils ne devraient donc pas procurer le même niveau d'utilité. On obtient une contradiction.

Deux courbes d'indifférence distinctes ne peuvent donc pas se croiser.



Le graphique illustre le raisonnement par l'absurde : si $A \sim M$ et $B \sim M$, alors $A \sim B$. Or A et B sont situés sur deux courbes d'indifférence distinctes, ce qui est contradictoire.

Question 6 : On considère la fonction d'utilité : $U(x, y) = xy$.

Pour les paniers $A = (2, 8)$, $B = (4, 4)$ et $C = (8, 2)$, on obtient :

$$\begin{cases} U(A) = 2 \times 8 = 16 \\ U(B) = 4 \times 4 = 16 \\ U(C) = 8 \times 2 = 16 \end{cases}$$

Les trois paniers procurent donc le même niveau d'utilité : $U = 16$. Ils appartiennent donc à la même courbe d'indifférence.

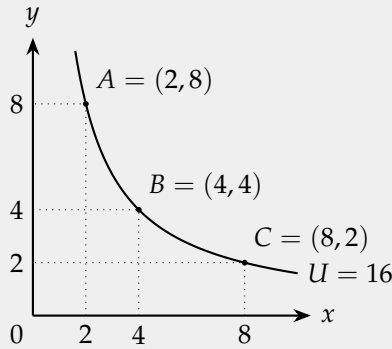
La courbe d'indifférence correspondante vérifie :

$$xy = 16$$

Donc :

$$y = \frac{16}{x}$$

Cette courbe est une hyperbole définie pour $x > 0$.



Question 7 : On considère toujours la fonction d'utilité :

$$U(x, y) = xy$$

La formule générale du Taux Marginal de Substitution de y en x est :

$$TMS = - \frac{\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}}$$

On calcule les utilités marginales :

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = y \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = x \end{cases}$$

On obtient donc :

$$TMS = -\frac{y}{x}$$

Au point $(4, 4)$:

$$TMS = -\frac{4}{4}$$

$$TMS = -1$$

Un TMS égal à -1 signifie que le consommateur est prêt à céder une unité de y contre une unité de x sans modifier son niveau d'utilité. Les deux biens s'échangent donc à parité en ce point.

Au point (2,8) :

$$TMS = -\frac{8}{2} = \boxed{-4}$$

Au point (8,2) :

$$TMS = -\frac{2}{8} = \boxed{-0,25}$$

Lorsque x augmente le long de la courbe d'indifférence, le TMS augmente algébriquement, mais sa valeur absolue diminue. Le consommateur est donc de moins en moins disposé à sacrifier du bien y pour obtenir davantage de bien x . Cela traduit la convexité des préférences.

Partie III : Représentation des préférences

Question 8 : On considère la fonction d'utilité :

$$U(x, y) = x + 2y$$

Pour un niveau d'utilité $\tilde{U}$ la courbe d'indifférence s'écrit :

$$x + 2y = \tilde{U}$$

Donc :

$$y = \frac{\tilde{U} - x}{2}$$

Pour $\tilde{U} = 10$:

$$y = 5 - \frac{1}{2}x$$

Pour $\tilde{U} = 20$:

$$y = 10 - \frac{1}{2}x$$

Pour $\tilde{U} = 30$:

$$y = 15 - \frac{1}{2}x$$

Les courbes d'indifférence sont donc des droites parallèles de pente $-\frac{1}{2}$.

Le TMS est :

$$TMS = - \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}}$$

Comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = 2 \end{cases}$$

on obtient :

$$TMS = -\frac{1}{2}$$

Le TMS est constant le long de toute courbe d'indifférence. Cela signifie que le consommateur substitue toujours x et y au même taux, quel que soit le panier considéré. Les biens x et y sont donc des substituts parfaits.

Question 9 : On considère maintenant la fonction :

$$V(x, y) = 2x + 4y$$

Or :

$$V(x, y) = 2(x + 2y)$$

Donc :

$$V(x, y) = 2U(x, y)$$

Les fonctions U et V représentent les mêmes préférences, car V est obtenue à partir de U par multiplication par un scalaire strictement positif. Il s'agit donc d'une transformation monotone croissante.

Une transformation monotone croissante préserve l'ordre des préférences. Ainsi, si :

$$U(A) > U(B)$$

alors :

$$V(A) > V(B)$$

La fonction d'utilité est dite ordinale car seul le classement des paniers a un sens économique. La valeur numérique absolue de l'utilité n'a pas de signification intrinsèque. Deux fonctions d'utilité qui classent les paniers dans le même ordre représentent donc les mêmes préférences.

Question 10 : L'affirmation suivante n'a pas de sens en théorie du consommateur standard :

« Si $U(A) = 100$ et $U(B) = 50$, alors le panier A procure deux fois plus de satisfaction que le panier B . »

En effet, l'utilité est ordinale et non cardinale. Cela signifie que les nombres associés aux paniers servent uniquement à classer les paniers entre eux. Les écarts ou les rapports entre niveaux d'utilité n'ont pas de signification économique.

La seule information que l'on peut tirer de :

$$U(A) > U(B)$$

est :

$$A \succ B$$

Le panier A est donc strictement préféré au panier B , mais on ne peut pas dire qu'il procure deux fois plus de satisfaction.

1.2 Exercice 2 - L'équilibre du consommateur : [Difficulté : 1]

Un consommateur dispose d'un revenu $R = 100$ pour acheter deux biens : des livres, notés x , au prix $p_x = 10$, et des places de cinéma, notées y , au prix $p_y = 5$.

Partie I : Analyse de la contrainte budgétaire

Question 1 : Écrivez la contrainte budgétaire du consommateur. Que représente-t-elle économiquement ?

Question 2 : Déterminez les quantités maximales de chaque bien que le consommateur peut acheter s'il dépense tout son revenu sur un seul bien. Tracez la droite de budget dans le plan (x, y) et identifiez clairement les intercepts. Que représente la pente de cette droite ? Calculez-la et interprétez-la économiquement.

Question 3 : Le consommateur envisage d'acheter les paniers suivants : $A = (5, 10)$, $B = (8, 4)$ et $C = (3, 15)$. Pour chaque panier, déterminez s'il est dans l'ensemble budgétaire, sur la contrainte budgétaire ou hors de l'ensemble budgétaire.

Question 4 : Représentez graphiquement l'ensemble budgétaire, c'est-à-dire l'ensemble des paniers abordables. Hachurez cette zone.

Partie II : Variations de prix et de revenu

Question 5 : Le prix des livres augmente et devient $p'_x = 20$, tandis que le prix du cinéma et le revenu restent constants. Écrivez la nouvelle contrainte budgétaire. Tracez la nouvelle droite de budget sur le même graphique que celui de la question précédente. L'ensemble budgétaire s'est-il agrandi ou rétréci ? Commentez. Le panier $B = (8, 4)$ est-il toujours abordable ?

Question 6 : On revient aux prix initiaux, $p_x = 10$ et $p_y = 5$, mais le revenu augmente et devient $R' = 150$. Tracez la nouvelle contrainte budgétaire. Quelle est la particularité de cette nouvelle droite par rapport à la droite initiale, en termes de pente et de position ? De combien peut-on augmenter la consommation maximale de chaque bien ?

Question 7 : Les deux prix doublent simultanément, avec $p_x = 20$ et $p_y = 10$, tandis que le revenu reste égal à $R = 100$. Écrivez la nouvelle contrainte budgétaire et simplifiez-la. Comparez-la avec la contrainte initiale. Que constatez-vous? Quelle propriété économique cela illustre-t-il?

Partie III : Équilibre du consommateur

On suppose maintenant que le consommateur a des préférences représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

Les prix sont $p_x = 10$, $p_y = 5$ et le revenu est $R = 100$.

Question 8 : Calculez le Taux Marginal de Substitution (TMS) pour cette fonction d'utilité. À l'équilibre, quelle condition doit être vérifiée entre le TMS et le rapport des prix? Justifiez graphiquement et économiquement. Pourquoi cette condition est-elle appelée condition de tangence?

Question 9 : Sans résoudre formellement le programme du consommateur, expliquez graphiquement pourquoi un point situé à l'intérieur de l'ensemble budgétaire ne peut pas être optimal. Expliquez également pourquoi un point situé sur la contrainte budgétaire, mais pour lequel le TMS est différent du rapport des prix, ne peut pas être optimal. Représentez approximativement la situation d'équilibre, avec une courbe d'indifférence tangente à la droite de budget. Sous quelle condition sur les préférences un point intérieur pourrait-il être optimal? *Indice : pensez à la satiation.*

Correction

Correction - Exercice 2 : Contrainte budgétaire et équilibre du consommateur

Partie I : Analyse de la contrainte budgétaire

Question 1 : La contrainte budgétaire du consommateur s'écrit :

$$p_x x + p_y y \leq R$$

Avec $p_x = 10$, $p_y = 5$ et $R = 100$, on obtient :

$$10x + 5y \leq 100$$

Elle représente l'ensemble des paniers que le consommateur peut acheter avec son revenu disponible.

Question 2 : Si le consommateur dépense tout son revenu en livres, on obtient :

$$10x = 100 \Leftrightarrow x_{\max} = 10$$

Si le consommateur dépense tout son revenu en places de cinéma, on obtient :

$$5y = 100 \Leftrightarrow y_{\max} = 20$$

La droite de budget s'écrit :

$$10x + 5y = 100 \Leftrightarrow y = 20 - 2x$$

Les intercepts sont donc $(10, 0)$ et $(0, 20)$.

La pente de la droite de budget est :

$$-\frac{p_x}{p_y} = -\frac{10}{5} = -2$$

Économiquement, cela signifie que pour obtenir une unité supplémentaire de bien x , le consommateur doit renoncer à 2 unités de bien y . C'est le coût d'opportunité du bien x en termes de bien y .

Question 3 : Pour le panier $A = (5, 10)$:

$$10 \times 5 + 5 \times 10 = 100$$

Donc le panier A est sur la contrainte budgétaire.

Pour le panier $B = (8, 4)$:

$$10 \times 8 + 5 \times 4 = 100$$

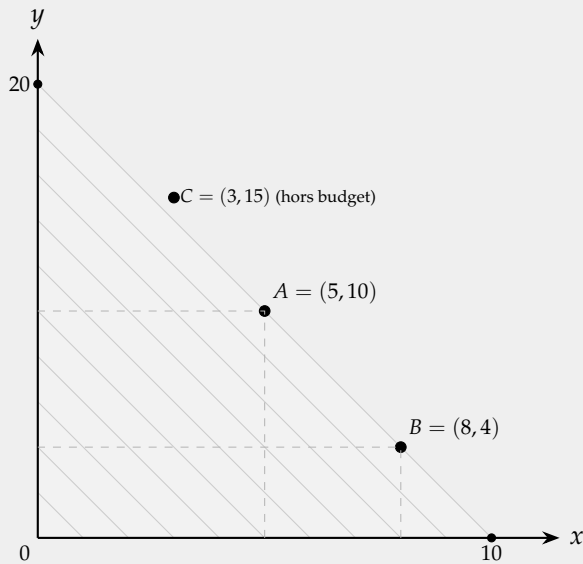
Donc le panier B est sur la contrainte budgétaire.

Pour le panier $C = (3, 15)$:

$$10 \times 3 + 5 \times 15 = 105 > 100$$

Donc le panier C est hors de l'ensemble budgétaire.

Question 4 : L'ensemble budgétaire est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(10, 0)$ et $(0, 20)$.



Partie II : Variations de prix et de revenu

Question 5 : Le prix des livres devient $p'_x = 20$.

La nouvelle contrainte budgétaire est :

$$20x + 5y \leq 100$$

Donc :

$$y \leq 20 - 4x$$

L'intercept en x devient $(5, 0)$, tandis que l'intercept en y reste inchangé, égal à $(0, 20)$.

L'ensemble budgétaire se rétrécit : la droite de budget effectue une rotation vers l'intérieur autour du point $(0, 20)$.

Pour le panier $B = (8, 4)$:

$$20 \times 8 + 5 \times 4 = 180 > 100$$

Donc le panier B n'est plus abordable.

Question 6 : Le revenu devient $R' = 150$, tandis que les prix restent $p_x = 10$ et $p_y = 5$.

La nouvelle contrainte budgétaire est :

$$10x + 5y \leq 150$$

Donc :

$$y \leq 30 - 2x$$

La pente reste identique :

$$-\frac{p_x}{p_y} = -2$$

La droite de budget se déplace parallèlement vers le haut et vers la droite. Les nouveaux intercepts sont $(15, 0)$ et $(0, 30)$.

La consommation maximale de livres augmente de :

$$\Delta x_{\max} = 15 - 10 = 5$$

La consommation maximale de places de cinéma augmente de :

$$\Delta y_{\max} = 30 - 20 = 10$$

Question 7 : Les deux prix doublent simultanément : $p_x = 20$ et $p_y = 10$, tandis que le revenu reste égal à $R = 100$.

La nouvelle contrainte budgétaire est :

$$20x + 10y \leq 100$$

En simplifiant par 10, on obtient :

$$2x + y \leq 10$$

Donc :

$$y \leq 10 - 2x$$

La contrainte n'est pas identique à la contrainte initiale, qui était :

$$2x + y \leq 20$$

Ici, l'ensemble budgétaire se réduit : le consommateur peut acheter deux fois moins de chaque bien qu'au départ.

La propriété d'homogénéité de degré 0 indique que multiplier tous les prix et le revenu par un même scalaire strictement positif ne modifie pas l'ensemble budgétaire. Ici, seuls les prix doublent tandis que le revenu reste constant : le pouvoir d'achat diminue.

Partie III : Équilibre du consommateur

Question 8 : On considère la fonction d'utilité : $U(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

La formule du Taux Marginal de Substitution est :

$$TMS_{x,y} = - \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}}$$

On calcule :

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Donc :

$$TMS_{x,y} = - \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow TMS_{x,y} = - \frac{y}{x}$$

À l'équilibre intérieur, la condition de tangence impose :

$$TMS_{x,y} = -\frac{p_x}{p_y}$$

Ici :

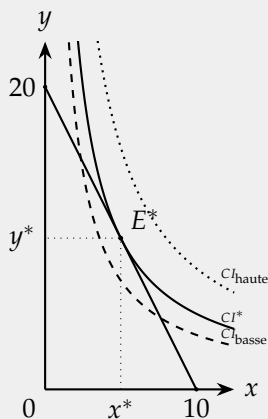
$$-\frac{p_x}{p_y} = -\frac{10}{5} = -2$$

La condition de tangence signifie que la pente de la courbe d'indifférence est égale à la pente de la droite de budget. Graphiquement, la courbe d'indifférence la plus élevée atteignable est tangente à la contrainte budgétaire. Économiquement, cela signifie que le taux auquel le consommateur est prêt à échanger les deux biens est égal au taux auquel le marché permet de les échanger.

Question 9 : Un point à l'intérieur de l'ensemble budgétaire ne peut pas être optimal si les préférences sont monotones. En effet, le consommateur n'utilise pas tout son revenu et peut donc consommer davantage d'un ou moins un bien, ce qui lui permet d'atteindre une courbe d'indifférence plus élevée.

Un point situé sur la contrainte budgétaire mais pour lequel : $TMS \neq -\frac{p_x}{p_y}$ ne peut pas être optimal dans le cas d'un optimum intérieur.

En effet, si la pente de la courbe d'indifférence est différente de la pente de la droite de budget, le consommateur peut modifier son panier le long de la contrainte budgétaire pour atteindre une courbe d'indifférence plus élevée. L'optimum est donc le point de tangence entre la courbe d'indifférence la plus haute atteignable et la droite de budget.



Un point intérieur pourrait être optimal si les préférences ne sont pas monotones, par exemple en présence d'un point de satiation. Dans ce cas, consommer davantage d'un bien ne procure pas nécessairement une utilité plus élevée.

1.3 Exercice 3 - Consommateur rationnel et bien essentiel :

[Difficulté : 1]

On considère un consommateur parfaitement rationnel dont les préférences sont représentées par une fonction d'utilité $U(x_1, x_2)$, qui dépend des quantités consommées en bien 1 et en bien 2. On note R le revenu de l'agent, p_1 le prix du bien 1 et p_2 le prix du bien 2.

Partie I : Questions de cours

Question 1 : Représentez graphiquement la forme des courbes d'indifférence dans les quatre cas suivants : les biens x_1 et x_2 sont parfaitement substituables ; les biens x_1 et x_2 sont parfaitement complémentaires ; le bien x_1 ne procure aucune satisfaction au consommateur ; le bien x_2 ne procure aucune satisfaction au consommateur.

Question 2 : Définissez la notion de Taux Marginal de Substitution (TMS) du bien x_2 par rapport au bien x_1 . En prenant la différentielle totale de l'utilité $U(x_1, x_2)$, montrez que le TMS est égal au rapport des utilités marginales.

Partie II : Bien essentiel et demandes du consommateur

On considère désormais la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1, x_2) = (x_1 + \gamma)^\alpha x_2^\beta \quad \text{avec } \gamma > 0$$

Question 3 : Représentez graphiquement une courbe d'indifférence du consommateur. Quelles particularités pouvez-vous relever ?

Question 4 : Par la méthode du Lagrangien, trouvez les fonctions de demande marshalliennes x_1^* et x_2^* .

Question 5 : Quel est le degré d'homogénéité de ces fonctions de demande ? Interprétez économiquement ce résultat.

Question 6 : Soit $R = 10$, $p_1 = 5$, $p_2 = 1$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 3$. Calculez les valeurs d'équilibre. Représentez graphiquement l'équilibre.

Question 7 : On suppose désormais que $\alpha R - \beta \gamma p_1 > 0$. Définissez et calculez l'élasticité-revenu de la demande en bien 2. Que pouvez-vous en

déduire sur la nature de ce bien ?

Partie III : Demandes hicksiennes et évolution des préférences

Question 8 : Après avoir rappelé leur définition, trouvez les demandes hicksiennes de l'individu.

On suppose maintenant que la fonction d'utilité de l'individu devient :

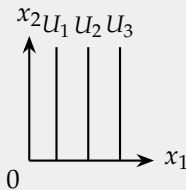
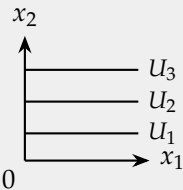
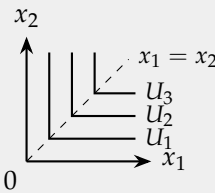
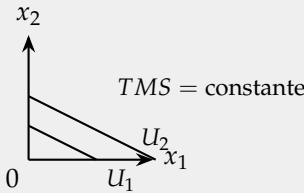
$$U(x_1, x_2) = (x_1 - \gamma)^\alpha x_2^\beta$$

Question 9 : Comment interprétez-vous ce changement ? Que signifie-t-il pour la consommation du bien x_1 ? Calculez les nouvelles demandes marshalliennes x_1^* et x_2^* . Interprétez économiquement les résultats obtenus.

Correction

Correction - Exercice 3 : Consommateur rationnel et bien essentiel

Question 1 :



Question 2 : Le taux marginal de substitution du bien y au bien x , noté $TMS_{y \rightarrow x}$, mesure la quantité de bien y que le consommateur est prêt à abandonner pour obtenir une unité supplémentaire de bien x , tout en conservant le même niveau d'utilité.

La différentielle totale de la fonction d'utilité est :

$$dU(.) = \frac{\partial U(.)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(.)}{\partial y} dy$$

Or, le long d'une courbe d'indifférence, le niveau d'utilité reste constant, donc :

$$dU(.) = 0$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial U(.)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(.)}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{\partial U(.)}{\partial y} dy = -\frac{\partial U(.)}{\partial x} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial U(.)}{\partial x}}{\frac{\partial U(.)}{\partial y}}$$

Comme le TMS est l'opposé de la pente de la courbe d'indifférence, on a :

$$TMS_{y \rightarrow x} = -\frac{dy}{dx}$$

Ainsi :

$$\boxed{TMS_{y \rightarrow x} = \frac{\frac{\partial U(.)}{\partial x}}{\frac{\partial U(.)}{\partial y}}} \Leftrightarrow \boxed{TMS_{y \rightarrow x} = \frac{U'_x}{U'_y}}$$

Question 3 : On considère la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1, x_2) = (x_1 + \gamma)^\alpha x_2^\beta$$

On fixe un niveau d'utilité $\bar{U}$. La courbe d'indifférence est alors définie par :

$$\bar{U} = (x_1 + \gamma)^\alpha x_2^\beta$$

On isole x_2 pour tracer cette courbe d'indifférence dans le repère (x_2, x_1) :

$$\begin{aligned} x_2^\beta &= \frac{\bar{U}}{(x_1 + \gamma)^\alpha} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \left(\frac{\bar{U}}{(x_1 + \gamma)^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \boxed{\bar{U}^{\frac{1}{\beta}} (x_1 + \gamma)^{-\frac{\alpha}{\beta}}} \end{aligned}$$

On peut calculer la dérivée première pour trouver les variations :

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = U_1^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(\frac{-\alpha}{\beta} \right) \cdot (x_1 + \gamma)^{-\frac{\alpha}{\beta} - 1}$$

Il y a un seul terme négatif donc la dérivée première est négative, la courbe d'indifférence est décroissante.

On peut calculer la dérivée seconde pour obtenir sa convexité ou concavité :

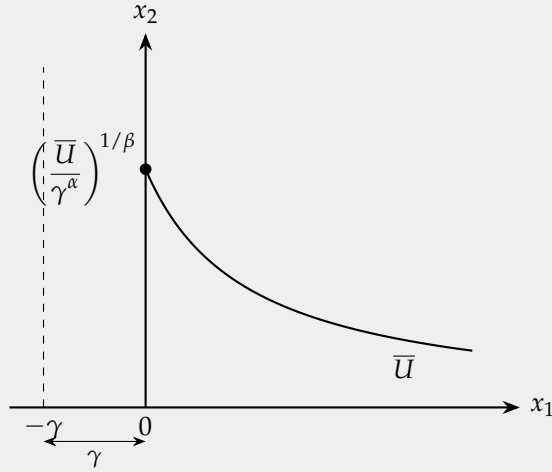
$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial x_1^2} = U_1^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(\frac{-\alpha}{\beta} \right) \cdot \left(\frac{-\alpha}{\beta} - 1 \right) \cdot (x_1 + \gamma)^{-\frac{\alpha}{\beta} - 2}$$

Deux éléments sont négatifs, la dérivée seconde est positive donc la courbe d'indifférence est convexe.

On calcul les limites :

$$\begin{cases} \text{si } x_1 \rightarrow 0, \text{ alors } x_2 \rightarrow \left(\frac{U_1}{\gamma^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ \text{si } x_1 \rightarrow +\infty, \text{ alors } x_2 \rightarrow 0 \end{cases}$$

Graphiquement, on obtient donc :



La courbe d'indifférence pour un niveau d'utilité $\bar{U}$ coupe l'axe des ordonnées et est tangente à l'axe des abscisses.

Question 4 : Par la méthode du Lagrangien, on cherche à obtenir les demandes marshalliennes x_1^* et x_2^* du consommateur.

Pour cela, la fonction à maximiser est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Max } U(x_1, x_2) = (x_1 + \gamma)^\alpha x_2^\beta \\ \text{sous contrainte} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

On obtient la fonction de Lagrange suivante :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 + \gamma)^\alpha x_2^\beta + \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

On obtient les CPO suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \alpha(x_1 + \gamma)^{\alpha-1} x_2^\beta - \lambda p_1 = 0 \\ \quad \Leftrightarrow \alpha(x_1 + \gamma)^{\alpha-1} x_2^\beta = \lambda p_1 \quad (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \beta(x_1 + \gamma)^\alpha x_2^{\beta-1} - \lambda p_2 = 0 \\ \quad \Leftrightarrow \beta(x_1 + \gamma)^\alpha x_2^{\beta-1} = \lambda p_2 \quad (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow R - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

En faisant le rapport entre (1) et (2), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(x_1 + \gamma)^{\alpha-1}x_2^\beta}{\beta(x_1 + \gamma)^\alpha x_2^{\beta-1}} &= \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha x_2}{\beta(x_1 + \gamma)} &= \frac{p_1}{p_2} \\ \Leftrightarrow \alpha p_2 x_2 &= \beta p_1 (x_1 + \gamma) \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} (x_1 + \gamma) \end{aligned}$$

On peut alors réinjecter dans la contrainte budgétaire :

$$\begin{aligned} R &= p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} (x_1 + \gamma) \right) \\ \Leftrightarrow R &= \frac{\alpha p_1}{\alpha} x_1 + \frac{\beta p_1}{\alpha} x_1 + \frac{\beta \gamma p_1}{\alpha} \\ \Leftrightarrow R &= \frac{p_1(\alpha + \beta)}{\alpha} x_1 + \frac{\beta \gamma p_1}{\alpha} \\ \Leftrightarrow \alpha R &= p_1(\alpha + \beta) x_1 + \beta \gamma p_1 \\ \Leftrightarrow x_1^* &= \frac{\alpha R - \beta \gamma p_1}{p_1(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

On peut maintenant réinjecter x_1^* dans l'expression trouvée précédemment :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \left(\frac{\alpha R - \beta \gamma p_1}{p_1(\alpha + \beta)} + \gamma \right) \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \left(\frac{\alpha R - \beta \gamma p_1 + \gamma p_1(\alpha + \beta)}{p_1(\alpha + \beta)} \right) \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{\beta}{\alpha p_2} \times \frac{\alpha(R + \gamma p_1)}{\alpha + \beta} \\ \Leftrightarrow x_2^* &= \frac{\beta(R + \gamma p_1)}{p_2(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

Question 5 : On cherche le degré d'homogénéité des demandes marshalliennes.

On rappelle :

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{\alpha R - \beta \gamma p_1}{p_1(\alpha + \beta)} \\ x_2^* = \frac{\beta(R + \gamma p_1)}{p_2(\alpha + \beta)} \end{cases}$$

On remplace (R, p_1, p_2) par (tR, tp_1, tp_2) avec $t > 0$.

Pour x_1^* :

$$\begin{aligned} x_1^*(tR, tp_1, tp_2) &= \frac{\alpha tR - \beta \gamma tp_1}{tp_1(\alpha + \beta)} \\ \Leftrightarrow x_1^*(tR, tp_1, tp_2) &= \frac{t(\alpha R - \beta \gamma p_1)}{tp_1(\alpha + \beta)} \\ \Leftrightarrow x_1^*(tR, tp_1, tp_2) &= x_1^*(R, p_1, p_2) \end{aligned}$$

Pour x_2^* :

$$\begin{aligned} x_2^*(tR, tp_1, tp_2) &= \frac{\beta(tR + \gamma tp_1)}{tp_2(\alpha + \beta)} \\ \Leftrightarrow x_2^*(tR, tp_1, tp_2) &= \frac{t\beta(R + \gamma p_1)}{tp_2(\alpha + \beta)} \\ \Leftrightarrow x_2^*(tR, tp_1, tp_2) &= x_2^*(R, p_1, p_2) \end{aligned}$$

Les demandes marshalliennes sont homogènes de degré 0. Ce résultat montre que si l'on multiplie simultanément le revenu et tous les prix par un même coefficient, les quantités demandées ne changent pas.

Question 6 : On suppose :

$$R = 10, \quad p_1 = 5, \quad p_2 = 1, \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = 3$$

On commence par calculer x_1^* :

$$x_1^* = \frac{\alpha R - \beta \gamma p_1}{p_1(\alpha + \beta)}$$

En remplaçant :

$$x_1^* = \frac{\frac{1}{3} \times 10 - \frac{1}{3} \times 3 \times 5}{5 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{\frac{10}{3} - 5}{5 \times \frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow x_1^* &= \frac{\frac{10}{3} - \frac{15}{3}}{\frac{10}{3}} \\ \Leftrightarrow x_1^* &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ce résultat n'a pas de sens économiquement, un individu ne peut pas consommer une quantité négative, donc on a $x_1^* = 0$. L'individu consacre donc l'ensemble de son revenu à la consommation du bien x_2 . Ce n'est pas une solution intérieure mais un équilibre en coin.

Si $x_1 = 0$, la contrainte budgétaire devient :

$$\begin{aligned} 10 &= 5 \times 0 + 1 \times x_2 \\ \Leftrightarrow x_2^* &= 10 \end{aligned}$$

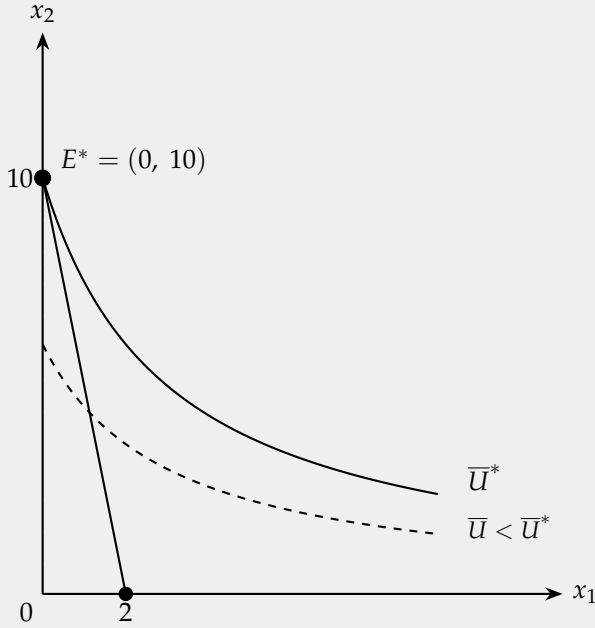
Le niveau d'utilité atteint est alors :

$$U(0, 10) = (0 + 3)^{1/3} \times 10^{1/3}$$

Donc :

$$U^* = 30^{1/3}$$

Graphiquement, on a la solution suivante :



Question 7 : On suppose désormais que :

$$\alpha R - \beta \gamma p_1 > 0$$

L'élasticité-revenu de la demande en bien 2 est définie par :

$$\varepsilon_{x_2, R} = \frac{\partial x_2}{\partial R} \times \frac{R}{x_2}$$

Or :

$$x_2^* = \frac{\beta(R + \gamma p_1)}{p_2(\alpha + \beta)}$$

On dérive par rapport à R :

$$\frac{\partial x_2}{\partial R} = \frac{\beta}{p_2(\alpha + \beta)}$$

Donc :

$$\varepsilon_{x_2,R} = \frac{\beta}{p_2(\alpha + \beta)} \times \frac{R}{\frac{\beta(R + \gamma p_1)}{p_2(\alpha + \beta)}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varepsilon_{x_2,R} = \frac{R}{R + \gamma p_1}}$$

Comme :

$$\begin{cases} R > 0 \\ \gamma p_1 > 0 \end{cases}$$

on obtient :

$$\boxed{0 < \varepsilon_{x_2,R} < 1}$$

La demande de bien 2 augmente avec le revenu. Le bien 2 est un bien normal et étant donné que l'élasticité-revenu est strictement inférieure à 1, il s'agit d'un bien nécessaire.

Question 8 : Les demandes hicksiennes représentent les quantités demandées de biens qui minimisent la dépense totale nécessaire pour atteindre un niveau d'utilité donné, en fonction des prix des biens.

On cherche à obtenir les demandes hicksiennes pour un niveau d'utilité $\bar{U}$ par la méthode du Lagrangien :

$$\begin{cases} \text{Min } R(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ \text{sous contrainte} \\ \bar{U} = (x_1 + \gamma)^\alpha x_2^\beta \end{cases}$$

On obtient la fonction de Lagrange suivante :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda \left(\bar{U} - (x_1 + \gamma)^\alpha x_2^\beta \right)$$

On a donc les CPO suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow p_1 = \lambda \alpha (x_1 + \gamma)^{\alpha-1} x_2^\beta & (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow p_2 = \lambda \beta (x_1 + \gamma)^\alpha x_2^{\beta-1} & (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \bar{U} = (x_1 + \gamma)^\alpha x_2^\beta & (3) \end{cases}$$

A partir du rapport entre (1) et (2), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{p_2} &= \frac{\alpha(x_1 + \gamma)^{\alpha-1}x_2^\beta}{\beta(x_1 + \gamma)^\alpha x_2^{\beta-1}} \\ \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} &= \frac{\alpha x_2}{\beta(x_1 + \gamma)} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{\beta p_1}{\alpha p_2}(x_1 + \gamma)\end{aligned}$$

On réinjecte dans la contrainte d'utilité :

$$\begin{aligned}\bar{U} &= (x_1 + \gamma)^\alpha \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}(x_1 + \gamma) \right)^\beta \\ \Leftrightarrow \bar{U} &= (x_1 + \gamma)^\alpha (x_1 + \gamma)^\beta \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^\beta \\ \Leftrightarrow \bar{U} &= (x_1 + \gamma)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^\beta \\ \Leftrightarrow (x_1 + \gamma)^{\alpha+\beta} &= \bar{U} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} \right)^\beta \\ \Leftrightarrow x_1 + \gamma &= \bar{U}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow x_1^h = \bar{U}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - \gamma\end{aligned}$$

On en déduit :

$$x_2^h = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \left[\bar{U}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right]$$

Donc :

$$x_2^h = \bar{U}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Question 9 : La nouvelle fonction d'utilité devient :

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - \gamma)^\alpha x_2^\beta$$

Ici, le bien 1 ne procure de l'utilité qu'à partir d'un certain seuil de consommation. cela signifie qu'il faut consommer au moins γ unités du bien 1 pour que la consommation soit pertinente dans l'utilité, on parle de consommateur incompressible.

On cherche les nouvelles demandes marshalliennes par la méthode du Lagrangien :

$$\begin{cases} \text{Max } U(x_1, x_2) = (x_1 - \gamma)^\alpha x_2^\beta \\ \text{sous contrainte} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

On obtient la fonction de Lagrange suivante :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - \gamma)^\alpha x_2^\beta + \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

Les CPO sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \alpha(x_1 - \gamma)^{\alpha-1} x_2^\beta = \lambda p_1 & (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \beta(x_1 - \gamma)^\alpha x_2^{\beta-1} = \lambda p_2 & (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow R - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant le rapport entre (1) et (2), on obtient :

$$\frac{\alpha x_2}{\beta(x_1 - \gamma)} = \frac{p_1}{p_2}$$

Donc :

$$x_2 = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} (x_1 - \gamma)$$

On réinjecte dans la contrainte budgétaire :

$$R = p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} (x_1 - \gamma) \right)$$

$$\Leftrightarrow R = p_1 x_1 + \frac{\beta p_1}{\alpha} (x_1 - \gamma)$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{p_1(\alpha + \beta)}{\alpha} x_1 - \frac{\beta \gamma p_1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha R = p_1(\alpha + \beta) x_1 - \beta \gamma p_1$$

$$\Leftrightarrow x_1^* = \frac{\alpha R + \beta \gamma p_1}{p_1(\alpha + \beta)}$$

On en déduit :

$$x_2^* = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \left(\frac{\alpha R + \beta \gamma p_1}{p_1(\alpha + \beta)} - \gamma \right)$$

$$\Leftrightarrow x_2^* = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \left(\frac{\alpha R + \beta \gamma p_1 - \gamma p_1(\alpha + \beta)}{p_1(\alpha + \beta)} \right)$$

$$\Leftrightarrow x_2^* = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \left(\frac{\alpha R - \alpha \gamma p_1}{p_1(\alpha + \beta)} \right)$$

$$\Leftrightarrow x_2^* = \frac{\beta(R - \gamma p_1)}{p_2(\alpha + \beta)}$$

La présence de $-\gamma$ dans l'utilité signifie qu'une partie de la consommation du bien 1 joue ici comme un seuil incompressible.

1.4 Exercice 4 - Schéma du consommateur : [Difficulté : 2]

On étudie les préférences d'un consommateur dont la fonction d'utilité est la suivante :

$$U(x_1, x_2) = e^{\sqrt{(Ax_1)^{\frac{1}{2}} + x_2}}$$

avec $A \geq 0$, et x_i les biens de consommation pour $i \in \{1, 2\}$, avec $x_1 > 1$ et x_2 quelconque. Le consommateur dispose d'un revenu R qu'il alloue entièrement à la consommation des biens x_1 et x_2 .

Partie I : Schéma du consommateur

Question 1 : En utilisant des transformations monotones de la fonction d'utilité, trouvez une fonction $V(x_1, x_2)$ représentant le même ordre de préférences.

Question 2 : Étude d'une courbe d'indifférence. Pour un niveau d'utilité $\bar{V}$ donné, étudiez une courbe d'indifférence dans le plan (x_1, x_2) . L'axiome de convexité des préférences est-il respecté ? Que représente le paramètre A ? Écrivez la contrainte budgétaire du consommateur et représentez-la dans le plan (x_1, x_2) . Représentez graphiquement les équilibres possibles du consommateur en distinguant les cas selon les valeurs de x_1^* et x_2^* .

Question 3 : On fixe $p_1 = 1$. Résolvez le programme du consommateur. *Indication : les résultats prennent la forme d'un système caractérisant les fonctions de demande.*

Question 4 : On suppose que $R \geq \frac{Ap_2^2}{4}$. En déduire la fonction d'utilité indirecte.

Question 5 : En déduire la fonction de dépense du consommateur.

Question 6 : Déterminez les demandes hicksiennes du bien x_2 à l'aide de la fonction de dépense. En utilisant une autre méthode, trouvez les demandes hicksiennes du bien x_1 . Comment s'appellent ces deux méthodes ?

Partie II : Analyse de la demande et étude d'une taxe

Question 7 : Pour cette question, on fixe $A = 4$ et $R = 1$. Représentez, dans le plan (p_2, x_2) , la demande du bien x_2 .

Question 8 : Même question pour $A = 16$. Interprétez l'effet du paramètre A .

Question 9 : Tracez le sentier de consommation-revenu dans le plan (x_1, x_2) . *Indication : le sentier est la courbe reliant les paniers optimaux lorsque le revenu varie.*

Question 10 : Le bien x_2 étant nocif pour l'environnement, l'État décide de le taxer. Son prix p_2 augmente d'un montant ε . Au sens de Slutsky, analysez les effets de cette taxe sur la consommation du bien x_2 .

Correction**Correction - Exercice 4 : Schéma du consommateur et étude de la demande**

Question 1 : La fonction d'utilité donnée est :

$$U(x_1, x_2) = e^{\sqrt{(Ax_1)^{\frac{1}{2}} + x_2}}$$

On peut appliquer deux transformations monotones croissantes : le logarithme, puis le carré.

On obtient :

$$\begin{aligned}\ln U &= \sqrt{(Ax_1)^{\frac{1}{2}} + x_2} \\ \Leftrightarrow (\ln U)^2 &= (Ax_1)^{\frac{1}{2}} + x_2 \\ \Leftrightarrow (\ln U)^2 &= \sqrt{A}\sqrt{x_1} + x_2\end{aligned}$$

Une fonction représentant les mêmes préférences est donc :

$$V(x_1, x_2) = \sqrt{A}\sqrt{x_1} + x_2$$

Cette fonction est quasi-linéaire en x_2 .

Partie I : Schéma du consommateur

Question 2 : Pour un niveau d'utilité $\bar{V}$, une courbe d'indifférence vérifie :

$$\sqrt{A}\sqrt{x_1} + x_2 = \bar{V}$$

Donc :

$$x_2 = \bar{V} - \sqrt{A}\sqrt{x_1}$$

La dérivée première est :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{x_1}} < 0$$

La courbe d'indifférence est donc décroissante.

La dérivée seconde est :

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{\sqrt{A}}{4x_1^{\frac{3}{2}}} > 0$$

La courbe d'indifférence est donc convexe. L'axiome de convexité des préférences est respecté.

Le TMS est :

$$TMS = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial x_2}}$$

Comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{x_1}} \\ \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 1 \end{cases}$$

on obtient :

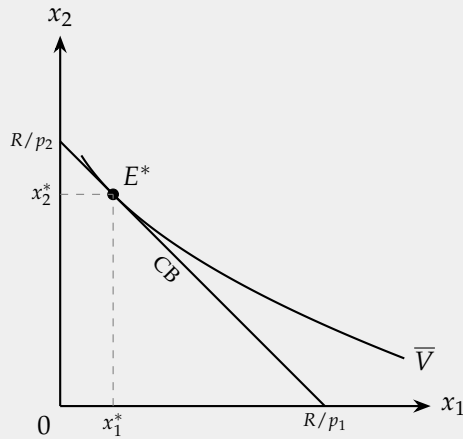
$$TMS = -\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{x_1}}$$

Le paramètre A mesure l'intensité de la préférence pour le bien x_1 . Plus A est élevé, plus les courbes d'indifférence sont pentues, ce qui traduit une plus forte valorisation du bien x_1 .

La contrainte budgétaire du consommateur est :

$$R = p_1x_1 + p_2x_2$$

Graphiquement, les équilibres possibles sont une solution intérieure ou une solution en coin.



Question 3 : On fixe $p_1 = 1$.

Le programme du consommateur est :

$$\begin{cases} \text{Max } V(x_1, x_2) = \sqrt{A}\sqrt{x_1} + x_2 \\ \text{sous contrainte} \\ x_1 + p_2x_2 = R \end{cases}$$

Le Lagrangien est :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \sqrt{A}\sqrt{x_1} + x_2 + \lambda(R - x_1 - p_2x_2)$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{x_1}} = \lambda & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow 1 = \lambda p_2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x_1 + p_2 x_2 = R & (3) \end{cases}$$

D'après (2), on obtient :

$$\lambda = \frac{1}{p_2}$$

En utilisant (1) :

$$\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{x_1}} = \frac{1}{p_2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \frac{\sqrt{A}p_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1^* = \frac{Ap_2^2}{4}}$$

Avec la contrainte budgétaire :

$$x_2^* = \frac{R - x_1^*}{p_2}$$

Donc :

$$\boxed{x_2^* = \frac{R}{p_2} - \frac{Ap_2}{4}}$$

Le système caractérisant les demandes est :

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{Ap_2^2}{4} \\ x_2^* = \frac{R}{p_2} - \frac{Ap_2}{4} \\ \text{solution intérieure si } R \geq \frac{Ap_2^2}{4} \end{cases}$$

Si $R < \frac{Ap_2^2}{4}$, on obtient une solution en coin : $\boxed{x_1^* = R \text{ et } x_2^* = 0}$

Question 4 : On suppose :

$$R \geq \frac{Ap_2^2}{4}$$

On est donc dans le cas d'une solution intérieure. La fonction d'utilité indirecte est obtenue en remplaçant les demandes dans V :

$$V(p_2, R) = \sqrt{A} \sqrt{\frac{Ap_2^2}{4} + \frac{R}{p_2} - \frac{Ap_2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow V(p_2, R) = \sqrt{A} \times \frac{\sqrt{Ap_2}}{2} + \frac{R}{p_2} - \frac{Ap_2}{4}$$

$$\Leftrightarrow V(p_2, R) = \frac{Ap_2}{2} + \frac{R}{p_2} - \frac{Ap_2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(p_2, R) = \frac{Ap_2}{4} + \frac{R}{p_2}}$$

Question 5 : Pour obtenir la fonction de dépense, on inverse la fonction d'utilité indirecte.

On pose :

$$V(p_2, R) = \bar{V}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Ap_2}{4} + \frac{R}{p_2} = \bar{V}$$

On isole R :

$$\frac{R}{p_2} = \bar{V} - \frac{Ap_2}{4}$$

$$\Leftrightarrow R = p_2 \bar{V} - \frac{Ap_2^2}{4}$$

La fonction de dépense est donc :

$$\boxed{e(p_2, \bar{V}) = p_2 \bar{V} - \frac{Ap_2^2}{4}}$$

Question 6 : Par le lemme de Shephard, la demande hicksienne du bien x_2 est :

$$h_2(p_2, \bar{V}) = \frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_2}$$

Donc :

$$h_2(p_2, \bar{V}) = \bar{V} - \frac{Ap_2}{2}$$

Pour le bien x_1 , on peut utiliser la condition de tangence du programme dual :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{x_1}} &= \frac{1}{p_2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x_1} &= \frac{\sqrt{A}p_2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$h_1(p_2, \bar{V}) = \frac{Ap_2^2}{4}$$

Les deux méthodes utilisées sont :

le lemme de Shephard et l'approche directe par le programme dual

Partie II : Analyse de la demande et étude d'une taxe

Question 7 : La demande marshallienne du bien x_2 est :

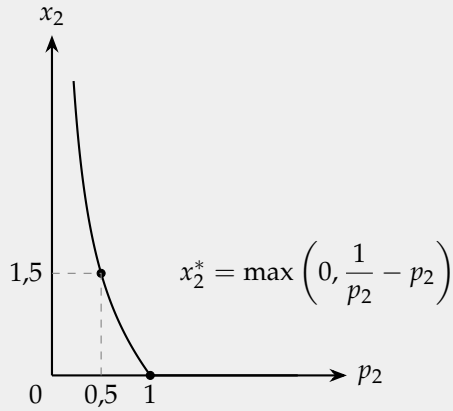
$$x_2^* = \frac{R}{p_2} - \frac{Ap_2}{4}$$

Pour $A = 4$ et $R = 1$, on obtient :

$$x_2^* = \frac{1}{p_2} - p_2$$

La demande effective est :

$$x_2^* = \max \left(0, \frac{1}{p_2} - p_2 \right)$$

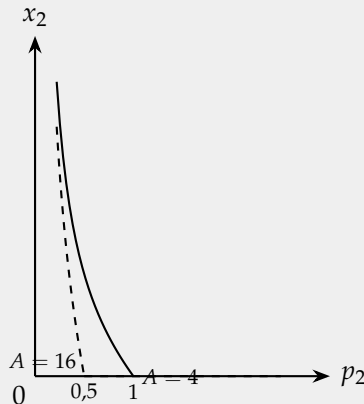


Question 8 : Pour $A = 16$ et $R = 1$, on obtient :

$$x_2^* = \frac{1}{p_2} - 4p_2$$

La demande effective est :

$$x_2^* = \max\left(0, \frac{1}{p_2} - 4p_2\right)$$



Lorsque A augmente, le consommateur accorde davantage de valeur au bien x_1 . La demande du bien x_2 diminue donc, et elle s'annule pour un prix plus faible. La zone de solution intérieure se réduit.

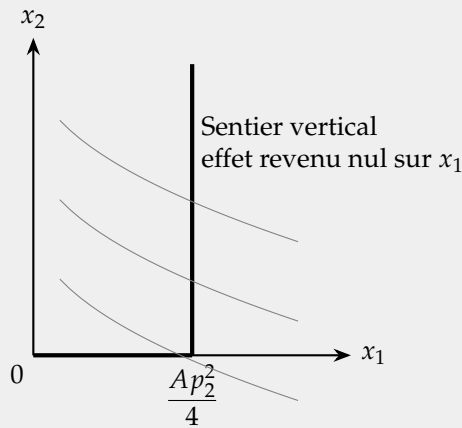
Question 9 : Le sentier de consommation-revenu est le lieu des paniers optimaux lorsque le revenu R varie, à prix constants.

Les demandes sont :

$$x_1^* = \frac{Ap_2^2}{4} \quad x_2^* = \frac{R}{p_2} - \frac{Ap_2}{4}$$

Le bien x_1 ne dépend pas du revenu. Le sentier de consommation-revenu est donc une droite verticale :

$$x_1 = \frac{Ap_2^2}{4}$$



La quasi-linéarité implique que tout revenu supplémentaire est consacré au bien x_2 , une fois le niveau optimal de x_1 atteint.

Question 10 : Le prix du bien x_2 augmente d'un montant ε . On étudie l'effet de cette taxe à l'aide de l'équation de Slutsky.

La demande marshallienne est :

$$x_2^* = \frac{R}{p_2} - \frac{Ap_2}{4}$$

L'effet total est :

$$ET = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}$$

Donc :

$$ET = -\frac{R}{p_2^2} - \frac{A}{4}$$

L'effet revenu est :

$$ER = -x_2^* \frac{\partial x_2^*}{\partial R}$$

Or :

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial R} = \frac{1}{p_2}$$

Donc :

$$ER = - \left(\frac{R}{p_2} - \frac{Ap_2}{4} \right) \frac{1}{p_2}$$

$$\Leftrightarrow ER = -\frac{R}{p_2^2} + \frac{A}{4}$$

L'effet de substitution est obtenu par :

$$ES = ET - ER$$

Donc :

$$ES = \left(-\frac{R}{p_2^2} - \frac{A}{4} \right) - \left(-\frac{R}{p_2^2} + \frac{A}{4} \right) \Leftrightarrow \boxed{ES = -\frac{A}{2}}$$

L'effet de substitution est strictement négatif : lorsque le prix du bien x_2 augmente, le consommateur substitue le bien x_1 au bien x_2 .

Pour le bien x_1 , on a :

$$x_1^* = \frac{Ap_2^2}{4}$$

Donc :

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial R} = 0$$

Il n'y a donc pas d'effet revenu sur le bien x_1 . L'effet total est égal à l'effet de substitution :

$$ET = ES = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}$$

Ainsi :

$$\boxed{ET = ES = \frac{Ap_2}{2} > 0}$$

Une taxe sur le bien x_2 réduit la consommation du bien x_2 et augmente la consommation du bien x_1 par effet de substitution.

1.5 Exercice 5 - Économie de pénurie : [Difficulté : 2]

On considère un consommateur parfaitement rationnel dont les préférences peuvent être représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$$

où x_1 désigne la quantité consommée de bien 1 et x_2 la quantité consommée de bien 2. L'agent dispose d'un revenu exogène, noté R , qu'il consacre entièrement à l'achat de ces deux biens.

La consommation du bien 1 est librement accessible au prix p_1 . En revanche, il existe une situation de pénurie sur le marché du bien 2. Le prix de ce bien est fixé à p_2 et chaque agent ne peut consommer plus de $\tilde{x}_2$ unités de ce bien, avec $\tilde{x}_2 > 0$.

Partie I : Pénurie sur le bien 2

Question 1 : Distinguez les différents équilibres possibles à l'aide d'une représentation graphique.

Question 2 : Écrivez le programme du consommateur puis résolvez-le. *Indication : vous distinguerez deux cas, l'un dans lequel la consommation optimale est contrainte par la pénurie, l'autre dans lequel elle ne l'est pas.*

Question 3 : Exprimez la condition sur le revenu qui permet de distinguer le passage du premier cas au deuxième.

Partie II : Pénurie sur les deux biens

On suppose maintenant que la pénurie affecte également le bien 1. Le prix de ce bien reste égal à p_1 , mais la quantité consommée par chaque agent ne peut excéder $\tilde{x}_1$ unités, avec $\tilde{x}_1 > 0$.

On suppose aussi que :

$$\frac{R}{p_1} > \tilde{x}_1 \quad \text{et} \quad \frac{R}{p_2} > \tilde{x}_2$$

Question 4 : Pourquoi les conditions $\frac{R}{p_1} > \tilde{x}_1$ et $\frac{R}{p_2} > \tilde{x}_2$ sont-elles nécessaires ?

Question 5 : Distinguez les différents équilibres possibles à l'aide d'une représentation graphique. *Indication : il existe quatre possibilités.*

Question 6 : Écrivez le programme du consommateur puis résolvez-le. Vous prendrez soin de distinguer les équilibres selon les différentes configurations.

Question 7 : Dans le cas où $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $\tilde{x}_1 = 10$ et $\tilde{x}_2 = 10$, déterminez un niveau de revenu R à partir duquel l'agent subit la pénurie sur le bien x_1 et sur le bien x_2 .

Partie III : Taxation progressive du bien 1

On suppose pour finir que l'on ne se trouve plus dans une situation de pénurie, mais dans une situation où l'État intervient pour limiter la consommation du bien x_1 uniquement. Le bien 2 n'est pas concerné par cette intervention.

Afin de réduire la consommation du bien x_1 , jugé nocif, l'État met en place une taxe sur ce bien lorsque sa consommation devient trop élevée. Ainsi, tant que le consommateur achète une quantité de bien x_1 inférieure ou égale à un seuil $\tilde{x}_1$, ce bien n'est pas taxé. En revanche, si l'agent choisit de consommer une quantité de bien x_1 supérieure à $\tilde{x}_1$, alors il paie le prix p_1 pour les $\tilde{x}_1$ premières unités et un prix $p'_1 = p_1 + t$ pour chaque unité supplémentaire.

Question 8 : Indiquez la contrainte budgétaire dans les deux cas. Donnez son équation et représentez-la graphiquement.

Question 9 : Quelles sont les implications de ce dispositif sur les équilibres de consommation ?

Correction

Correction - Exercice 5 : Économie de pénurie

Question 1 : Deux cas sont à distinguer selon que l'agent subit ou non la pénurie. Sans pénurie sur le bien 2, le consommateur maximise :

$$\begin{cases} \max U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} \\ \text{sous contrainte} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ x_2 \leq \tilde{x}_2 \end{cases}$$

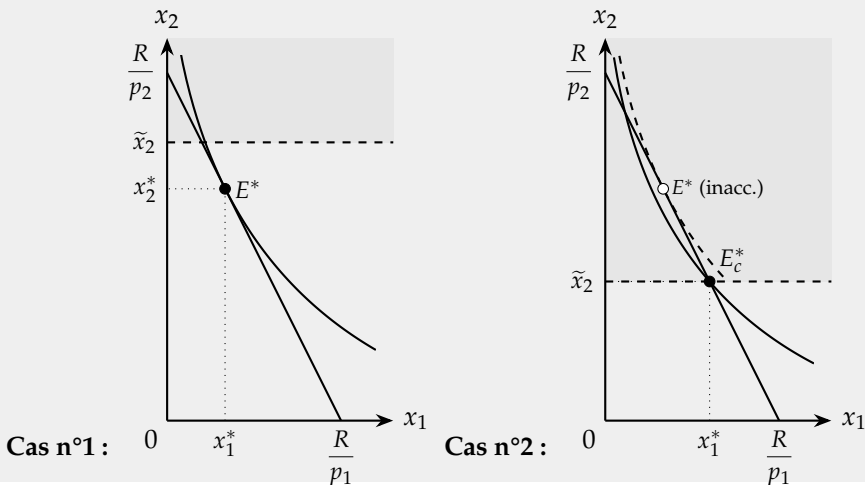
Si l'équilibre sans rationnement conduit à une consommation x_2^* supérieure à $\tilde{x}_2$, alors le consommateur est contraint par la pénurie. Dans ce cas :

$$x_2^* = \tilde{x}_2$$

et :

$$x_1^* = \frac{R - p_2 \tilde{x}_2}{p_1}$$

Graphiquement, on obtient les deux situations suivantes.



Question 2 : Le programme du consommateur s'écrit :

$$\begin{cases} \max U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} \\ \text{sous contrainte} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = R \\ x_2 \leq \tilde{x}_2 \end{cases}$$

Cas 1 : la pénurie ne contraint pas l'optimum

On résout d'abord le problème sans rationnement par la méthode du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1 & (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2 & (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow R - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant le rapport entre (1) et (2), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x_1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x_2}}} &= \frac{p_1}{p_2} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} &= \frac{p_1}{p_2} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1 & (4) \end{aligned}$$

On introduit le résultat obtenu dans l'équation (3) :

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{p_1^2}{p_2^2} x_1\right) &= R \\ \Leftrightarrow p_1 x_1 + \frac{p_1^2}{p_2} x_1 &= R \\ \Leftrightarrow p_1 x_1 \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) &= R \end{aligned}$$