2de

Nicolas Nguyen
Stéphane Daniel
Luc Ponsonnet
Emmanuel Schneider

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

3e édition

MATHS

- Résumé de cours
- Démonstrations
- Approfondissements, algorithmes
- Méthodes
- Vrai/Faux
- Exercices avec indications
- QCM et automatismes
- Corrigés détaillés et commentés

NOUVEAU PROGRAMME

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques

Seconde

3e édition

ouvrage coordonné par

Nicolas NGUYEN
Professeur de mathématiques en MPSI
au lycée François Rabelais (Saint-Brieuc)

Stéphane DANIEL
Professeur de mathématiques
au lycée Arnaut Daniel (Ribérac)

Luc PONSONNET
Professeur de mathématiques
au lycée Bonaparte (Toulon)

Emmanuel SCHNEIDER
Professeur de mathématiques
au lycée Stanislas (Villers-lès-Nancy)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « Un mathématicien » et « Le saviez-vous ? » des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en LaTeX.

ISBN 9782340-120884
Dépôt légal : septembre 2026

www.editions-ellipses.fr

Comment bien démarrer les maths en seconde !

L'épreuve anticipée de maths à la fin de a première vous attend dès l'an prochain et l'avenir se prépare dès maintenant. Le choix des trois disciplines de spécialité que vous ferez en fin d'année pour la classe de première sera déjà déterminant pour la suite de vos études. Si vous vous destinez à une carrière scientifique il est déjà nécessaire d'acquérir et de renforcer vos connaissances en mathématiques.

C'est le cas ? Alors ce livre vous y aidera ; il sera particulièrement utile à ceux qui souhaitent acquérir un très bon niveau en **mathématiques** dans l'optique d'une poursuite d'options scientifiques en première et terminale et a fortiori pour ceux qui envisagent déjà d'entreprendre plus tard des études supérieures dans une formation ayant une **composante scientifique importante** : classes préparatoires scientifiques, bien sûr, mais aussi licences scientifiques à l'université, écoles d'ingénieurs ou de commerce ou études de médecine.

Tout en suivant strictement le programme de la classe de seconde, ce livre l'appréhende différemment car il insiste sur les points délicats, il présente des approches plus théoriques mais surtout, il facilite la compréhension des méthodes de raisonnement et de résolution qui sont la clé de la réussite dans les études scientifiques. Il permet ainsi l'acquisition de connaissances solides.

Cette nouvelle édition prend en compte les évolutions récentes des programmes mais aussi l'introduction de l'épreuve anticipée de mathématiques à la fin de la première à laquelle il nécessaire de déjà se préparer. Des QCM ont été insérés dans la partie exercices et les automatismes sont identifiés dans les parties méthodes.

La structure de chaque chapitre est identique.

- **Le résumé de cours** vous remet en mémoire tous les résultats à savoir. Il vous permet d'accéder à une connaissance synthétique du cours. Sa relecture est indispensable avant un devoir en classe.
- **La partie « méthodes »** vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.
- **La partie « vrai/faux »** vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révèle les mauvais reflexes à corriger et vous met en garde contre les erreurs classiques.

- **Les exercices** sont incontournables pour assimiler le programme et pour acquérir un niveau très satisfaisant. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettent d'avancer selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi ce livre complète celui utilisé en cours. Il permet d'aborder avec aisance les interrogations, les devoirs surveillés et bien sûr d'assurer de bonnes bases qui seront si utiles plus tard. En outre, il procure une **compréhension approfondie** des maths étudiées en seconde et offre ainsi les meilleures conditions pour **réussir sa première et sa Terminale et, par la suite, son entrée dans les études supérieures.**

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Nombres et calculs

Chapitre 1
Nombres entiers

Les nombres entiers positifs font partie de notre quotidien dès l'enfance. En revanche, les nombres négatifs ne sont apparus que tardivement, d'abord pour comptabiliser des dettes ou des débits financiers. Les propriétés des nombres entiers sont innombrables et certaines sont encore inconnues.

Un mathématicien

L'astronome et mathématicien indien **Brahmagupta** (598-env. 660) a développé des méthodes très sophistiquées en arithmétique. C'est dans ses écrits que l'on rencontre pour la première fois l'usage du zéro et de nombres négatifs et il manie les racines carrées avec habileté. Il résout des équations du premier et même du second degré. C'est à son époque que l'on voit apparaitre la numération de position en base 10 mais il ne semble pas en être l'initiateur.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Chacun connaît les critères de divisibilité des entiers par 2, 3 et 5 et même par 11. Ceux par 7 et 13 sont en revanche moins connus. Pour tester un nombre a, on note u son chiffre des unité et d le nombre qui reste une fois ôté le dernier chiffre. Ainsi, pour $a = 455$, on obtient $u = 5$ et $d = 45$. Si le nombre $d - 2u$ (ou $u - 2d$) est divisible par 7, alors a l'est aussi ; de même si $d + 4u$ est divisible par 13, u l'est aussi. Ainsi pour $a = 455$, on obtient $d - 2u = 35 = 7 \times 5$ et $d + 4u = 65 = 13 \times 5$. Ainsi 455 est bien divisible par 7 comme par 13. Si les nombres $d - 2u$ ou $d + 4u$ sont grands, on peut réitérer le procédé.

COMPÉTENCES

les incontournables

- Diviseurs et multiples
  - définitions
  - fractions irréductibles
  - critères de divisibilité
- Définir la division euclidienne d'entiers naturels
- Les nombres pairs, les nombres impairs
- Démontrer
  - la somme de deux multiples de a est un multiple de a
  - le carré d'un nombre impair est impair

et plus si affinités

- Une halte à Syracuse
- Autour des nombres premiers
  - écriture d'un test de primalité en langage Python
  - amélioration d'un test de primalité
  - découverte d'une méthode de recherche des diviseurs d'un entier

Résumé de cours

Entiers naturels et entiers relatifs

Notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

Définition :

- *L'ensemble* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ *est celui des entiers naturels.*
- *L'ensemble* $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ *est celui des entiers relatifs.*

Multiples et diviseurs d'un entier relatif

Définition : *Soit a et b deux entiers relatifs, on dit que b est un* ***multiple*** *de a, ou que a est un* ***diviseur*** *de b s'il existe un entier relatif k tel que*

$$b = ak$$

On note $a \mid b$ et on lit « a divise b » cette relation.

Proposition 1.1.— Propriétés algébriques des multiples
Soit a un entier relatif.

- La somme de deux multiples de a est un multiple de a.
- Un multiple d'un multiple de a est un multiple de a.

Corollaire 1.2.— Soit d, a, b, k, ℓ des entiers relatifs.
Si d divise a et b alors d divise $ak + b\ell$.

Nombres pairs, impairs

Définition : *Soit n un entier relatif, on dit que*

- *n est* ***pair*** *si c'est un multiple de 2,*
- *n est* ***impair*** *sinon.*

Théorème 1.3.— Soit n un entier relatif.

- n est pair si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k$;
- n est impair si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$.

Théorème 1.4.— Étant donné un entier relatif n.

- Si n est pair, alors n^2 est pair.
- Si n est impair, alors n^2 est impair.

En conséquence, n et n^2 sont de même parité.

■ Arithmétique des entiers naturels

Plus grand multiple de b inférieur à a

Soit a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$. Il existe un plus grand entier multiple de b qui soit inférieur à a. Plus précisément

Théorème 1.5.— Division euclidienne —. Soit a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$. Il existe un couple d'entiers naturels $(q\ ;\ r)$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < b$$

Cette écriture, unique, constitue la **division euclidienne** de a par b.

Vocabulaire : *a est le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne de a par b.*

Proposition 1.6.— Soit a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$, b divise a si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Plus grand diviseur commun à a et b

Soit a et b des entiers naturels. Lorsqu'un entier d est à la fois un diviseur de a et de b, on dit que d est un diviseur commun à a et b. 1 est toujours un diviseur commun de a et b.

Définition : *Soit a et b deux entiers naturels, non tous les deux nuls. On appelle **plus grand diviseur commun** de a et b, et on note $PGCD(a\ ;\ b)$ le plus grand diviseur commun à a et b.*

Définition :

- *On dit que deux entiers naturels sont **premiers entre eux**, si leurs seul diviseur positif commun est 1.*
- *On dit qu'une **fraction** (il est entendu qu'une fraction est un quotient de deux nombres relatifs) est **irréductible** si numérateur et dénominateur sont premiers entre eux.*

Remarque : a et b sont premiers entre eux lorsque $PGCD(a, b) = 1$.

Théorème 1.7.— Toute fraction non nulle admet une unique écriture irréductible.

Nombres premiers et nombres composés

Définition : *Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.*

- *Si n peut se factoriser sous la forme $n = pq$ avec $1 < p, q < n$, on dit que n est **composé**.*
- *Si n n'a pas d'autres diviseurs positifs que 1 et lui-même, on dit que n est **premier**.*

Remarque : $2, 3, 5, 7, 11$ sont les plus petits nombres premiers. Il y en a une infinité.

Théorème 1.8.— Théorème fondamental de l'arithmétique —.
Tout entier naturel n, $n \geqslant 2$ est le produit de nombres premiers, ce produit étant unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstrations

Proposition 1.1.— Propriétés algébriques des multiples
Soit a un entier relatif.

- La somme de deux multiples de a est un multiple de a.
- Un multiple d'un multiple de a est un multiple de a.

Démonstration ▽
Soit a, m et n des entiers relatifs.

- Si m et n sont des multiples de a. Il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $m = ka$ et $n = k'a$, alors $m + n = ka + k'a = a(k + k')$, or $k + k' \in \mathbb{Z}$, donc $a \mid m + n$, autrement dit, $m + n$ est un multiple de a.
- Si m est un multiple de n et n un multiple de a, alors il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $m = kn$ et $n = k'a$, donc $m = k(k'a) = (kk')a$. Puisque $kk' \in \mathbb{Z}$ on en déduit que m est un multiple de a. ▲

Théorème 1.4.— Étant donné un entier relatif n.

- Si n est pair, alors n^2 est pair.
- Si n est impair, alors n^2 est impair.

En conséquence, n et n^2 sont de même parité.

Démonstration ▽
Soit n un entier relatif.

- Si n est pair, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k$, donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Comme $2k^2$ est un entier relatif, on a montré que n^2 est pair.
- Si n est impair, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$, donc en appliquant une des identités remarquables $n^2 = (2k + 1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Comme $2k^2 + 2k$ est un entier relatif, on a montré que n^2 est impair.

On a montré que si n est pair, alors n^2 est pair, et si n est impair, alors n^2 est impair. Finalement, dans tous les cas, n^2 a la même parité que n. ▲

Approfondissements, algorithmes

Dans cette partie, a et b désignent des entiers naturels.

Multiples et diviseurs

b est-il un multiple de a ?

a et b étant donnés, on veut savoir si b est un multiple de a. Pour ce faire, on considère les produits ka (où $k \in \mathbb{N}$), tels que $ka \leqslant b$, si l'égalité est obtenue alors b est un multiple de a, sinon ce n'est pas le cas.
Traduction en pseudo-code :

```
Si b = 0 Alors Afficher "Vrai"
Sinon
        Si a = 0 Alors Afficher "Faux"
        Sinon
                k ← 1
                Tant Que ak < b et ak ≠ b Faire k ← k + 1 FinTantQue
                Si ak = b Alors Afficher "Vrai"
                Sinon Afficher "Faux"
```

La version Python :

```
def multiple(a,b):
    if b==0:return True
    else:
        if a==0:return False
        else:
            k=1
            while a*k<b and a*k!=b:
                k=k+1
            if a*k==b:return True
            else:return False
```

Plus grand multiple de a inférieur à b

Nous considérons ici $0 < a \leqslant b$ et cherchons la plus grande valeur du produit ka, $k \in \mathbb{N}$, inférieur à b. Voici un algorithme écrit en pseudo-code et sa traduction en langage Python.

```
k ← 0
Tant que ka ⩽ b Faire
        Si ka = b ou (k + 1)a > b Alors Afficher ka
        k ← k + 1
FinTantQue
```

```
def multiple2(a,b):
    k=0
    while k*a<=b:
        if k*a==b or (k+1)*a>b:
            return k*a
        k=k+1
```

■ Nombres premiers

a est-il un nombre premier ?

a étant un entier naturel supérieur à 2, on crée une fonction qui renvoie True s'il est premier et False sinon. Nous aurons besoin d'effectuer la division euclidienne de a par b, où $b \in \mathbb{N}^\star$.

La démarche choisie est la suivante : pour chaque valeur de k, $2 \leqslant k < a$, on effectue la division euclidienne de a par k, si le reste est nul, a n'est pas premier, si aucune des divisions euclidiennes ne renvoie un reste nul, a est un nombre premier.
Programme en pseudo-code :

```
k ← 2
Tant Que le reste de la division euclidienne de a par k est non nul et k < a
        Faire k ← k + 1 FinTantQue
Si k < a Alors resultat ← False
Sinon resultat ← True
Afficher resultat
```

Ci-dessous son équivalent en langage Python.

Remarque : avec Python, a et b étant des entiers naturels, $b \neq 0$, le reste de la division euclidienne de a par b est $a\%b$.

```
def Premier (a):
    k=2
    while a%k!=0 and k<a:k=k+1
    if k<a:resultat=False
    else:resultat=True
    return resultat
```

Crible d'Eratosthène

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on souhaite déterminer l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n. On procède *par élimination* de la manière suivante :

0 On fait la liste des entiers de 2 à n.

1 Le premier terme de la liste est 2. Il est premier, on le conserve et on barre tous ses multiples.

2 Le terme suivant dans la liste restante est 3. Il est premier, on le conserve et on barre tous ses multiples.

3 Le terme suivant dans la liste restante est 5. Il est premier, on le conserve et on barre tous ses multiples.

4 Ainsi de suite ... on continue ce procédé, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de premier terme non barré dans la liste. À la fin, les entiers non barrés sont les nombres premiers cherchés.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100

À l'aide de l'algorithme d'Eratosthène, on trouve que les nombres premiers inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 79, 83, 89.

Méthodes

Multiples et diviseurs d'un entier

Méthode 1.1.— Comment utiliser les critères de divisibilité

Soit n un entier naturel, rappelons les critères de divisibilité les plus connus.

- n est divisible par 2 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- n est divisible par 3 (resp. 9) si, et seulement si, la somme de ses chiffres l'est.
- n est divisible par 5 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0 ou 5.
- n est divisible par 10 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0.
- n est divisible par 11 si, et seulement si, la somme de ses chiffres de rangs pairs diminuée de la somme des chiffres de rangs impairs est un multiple de 11.

Exemple : déterminons la forme irréductible de chaque fraction : $a = \frac{75}{90}$ et $b = \frac{30\ 250}{440}$.

- $\boldsymbol{a = \frac{75}{90}}$
  75 et 90 admettent 0 et 5 pour chiffre des unités, donc ils sont divisibles par 5. Si on divise numérateur et dénominateur par 5, on obtient $a = \frac{15}{18}$. La somme des chiffres de 15 et de 18 donne respectivement 6 et 9, divisibles par 3, donc 15 et 18 sont divisibles par 3. Après simplification par 3, on a l'égalité $a = \frac{5}{6}$. 5 et 6 étant premiers entre eux, cette dernière fraction est irréductible.
- $\boldsymbol{b = \frac{30\ 250}{440}}$
  30 250 et 440 ont 0 pour chiffre des unités, donc ils sont divisibles par 10, donc en simplifiant par 10, on obtient $b = \frac{3\ 025}{44}$. Comme $4 - 4 = 0$, 44 est bien sûr divisible par 11. De plus, $(3+2)-(0+5) = 0$ il en est donc de même de 3 025. Après simplification par 11, on obtient $b = \frac{275}{4}$. Les diviseurs positifs de 4 sont 1, 2 et 4, seul 1 divise 275, ainsi 4 et 275 sont premiers entre eux et $\frac{275}{4}$ est la fraction irréductible égale à b.

Mise en œuvre : exercice 1.2, **exercice 1.5**, **exercice 1.14** et **exercice 1.18**

Méthode 1.2.— Comment trouver les diviseurs positifs d'un entier naturel

Soit a un entier naturel non nul. On passe en revue tous les entiers naturel k de 1 à a.

1 Si k divise a (autrement dit si a est dans la table de multiplication de k), k est un diviseur de a, sinon ce n'en est pas un.

2 Ceci fait, on passe à l'entier $k+1$ et si $k+1 \leqslant a$, on revient à l'étape précédente, sinon le processus s'interrompt et nous connaissons tous les diviseurs positifs de a.

On peut utiliser les critères de divisibilité vus à la **méthode 1.1**.

Exemple : pour trouver les diviseurs positifs de 308, listons tous les entiers naturels de 1 à 308.

- 1 divise 308, donc c'est un diviseur.
- 308 est pair puisqu'il se termine par 8, donc 2 est un diviseur de 308.
- 308 n'est pas divisible par 3, puisque la somme de ses chiffres n'est pas divisible par 3.

- 308 est dans la table de 4, donc 4 est un diviseur de 308.
- etc.
- Enfin 308 se divise lui-même, et comme $309 > 308$ l'algorithme s'arrête.

Finalement les diviseurs positifs de 308 sont : 1, 2, 4, 7, 11, 14, 22, 28, 44, 77, 154 et 308.

Remarque : pour déterminer la liste de tous les diviseurs d'un entier, on fait la liste de tous ses diviseurs positifs à laquelle on ajoute la liste de leurs opposés.

Mise en œuvre : exercice 1.2, **exercice 1.5**, **exercice 1.14** et **exercice 1.18**

❑ **Méthode 1.3.— Comment effectuer la division euclidienne de deux entiers** ⚙

Soit a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. Effectuons la division euclidienne de a par b.

- **Si $a < b$** alors $a = b \times 0 + a$ est la division euclidienne de a par b avec $q = 0$ et $r = a$.
- **Si $a \geqslant b$**

  1 On cherche le plus grand multiple bq de b inférieur (ou égal) à a.

  2 On pose $r = a - bq$, alors on a $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

Exemple : effectuons la division euclidienne de 345 par 17.

1 Le plus grand multiple de 17 inférieur à 345 est $17 \times 20 = 340$.

2 Posons $r = 345 - 340 = 5$, la division euclidienne est donnée par l'égalité $345 = 17 \times 20 + 5$. Le quotient est 20 et le reste 5.

Mise en œuvre : exercice 1.7

■ Plus grand diviseur commun

❑ **Méthode 1.4.— Comment déterminer le PGCD de deux entiers**

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

1 On détermine les listes des diviseurs positifs de a et de b. (à l'aide de la **méthode 1.2**)

2 PGCD(a ; b) est le plus grand des entiers communs aux deux listes.

Remarque : si b est nul, et pas a, alors PGCD(a ; b) $= a$.

Exemple : trouver PGCD(525 ; 980).

1 Avec la **méthode 1.2** on trouve les diviseurs positifs de 525 et 980, soit respectivement :

- 1, 3, 5, 7, 15, 21, 25, 35, 75, 105, 175 et 525.
- 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 49, 70, 98, 140, 196, 245, 490 et 980.

2 On constate que 35 est le plus grand diviseur commun, donc PGCD(525 ; 980) $= 35$.

Mise en œuvre : exercice 1.8 et **exercice 1.9**

❑ **Méthode 1.5.— Comment écrire une fraction sous forme irréductible** ✿

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Pour présenter la fraction $\frac{a}{b}$ sous forme irréductible, on peut la simplifier par tout diviseur commun au numérateur et au dénominateur (différent de 1), tant qu'il y en a, ou bien plus directement.

1 On calcule $d = \text{PGCD}(a\ ;\ b)$.

2 Il existe deux entiers naturels a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$, alors $\frac{a}{b} = \frac{\cancel{d}\times a'}{\cancel{d}\times b'} = \frac{a'}{b'}$.

La fraction $\frac{a'}{b'}$ est la forme irréductible de $\frac{a}{b}$.

Exemple : trouver la forme irréductible de $F = \frac{525}{980}$.

1 À l'exemple précédent, nous avons vu que $\text{PGCD}(525\ ;\ 980) = 35$.

2 $525 = 35 \times 15$ et $980 = 35 \times 28$, donc $F = \frac{15}{28}$ et $\frac{15}{28}$ est la forme irréductible de $\frac{525}{980}$.

Mise en œuvre : exercice 1.8 et **exercice 1.9**

■ Nombres premiers

❑ **Méthode 1.6.— Comment savoir si un nombre est premier ou composé**

Soit a un entier naturel non nul.

1 Avec la **méthode 1.2** on cherche les diviseurs positifs de a.

2 Si on trouve uniquement 1 et a, a est premier, sinon a est un nombre composé.

Exemple : 137 est-il premier ?

1 Les seuls diviseurs positifs de 137 sont 1 et 137.

2 137 est donc premier.

Mise en œuvre : exercice 1.14, **exercice 1.16**

❑ **Méthode 1.7.— Comment décomposer un entier en produit de facteurs premiers**

Soit a un entier naturel, $a \geqslant 2$. On pose $b = 1$. Déterminer l'écriture de a comme produit de nombres premiers revient à déterminer la liste des diviseurs premiers, avec répétition possible. Pour cela :

1 On trouve le plus petit diviseur $p \geqslant 2$ de a. Nécessairement, p est un nombre premier qui fait partie de la décomposition de a en produit de facteurs premiers. On remplace alors b par $b \times p$ et a par $\frac{a}{p}$.

2 Deux cas se présentent :

- Si $a = 1$, l'algorithme est fini et b est la décomposition cherchée.
- Sinon, on retourne à l'étape 1.

Remarque : on peut utiliser les critères de divisibilité pour accélérer la recherche de diviseurs premiers.

Exemple : décomposons $n = 15\ 435$ en produit de facteurs premiers.
Cette méthode peut être illustrée par la construction ci-dessous.

15 435	3
5 145	3
1 715	5
343	7
49	7
7	7
1	

On trouve $15\ 435 = 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 = 3^2 \times 5 \times 7^3$, ainsi $3^2 \times 5 \times 7^3$ est la décomposition de 15 435 en produit de facteurs premiers.

Mise en œuvre : exercice 1.14, **exercice 1.16** et **exercice 1.18**

Vrai/Faux

Dans ce qui suit a, b et c sont des entiers relatifs.

	Vrai	Faux
1. Si a divise b et b divise c, alors a divise c.	☐	☐
2. Les diviseurs positifs de 12 sont 2, 3, 4, 6 et 12.	☐	☐
3. Si $\|a\| \geqslant 2$, alors a admet au moins quatre diviseurs.	☐	☐
4. Si a et b divisent c, alors ab divise c.	☐	☐
5. Une fraction irréductible est un quotient de nombres premiers.	☐	☐
6. 751 est un nombre premier.	☐	☐
7. Si $b \neq 0$ et si a divise b, alors $\|a\| \leqslant \|b\|$.	☐	☐
8. Un diviseur commun de a et b divise un multiple commun de a et b.	☐	☐
9. La somme de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier.	☐	☐
10. $a^2 - b^2$ n'est jamais un nombre premier.	☐	☐

Énoncé des exercices

QCM pour s'entraîner à l'épreuve anticipée du baccalauréat

Exercice 1.1 : Soit n un entier naturel. Si n est divisible par 4 et 6, alors n est nécessairement

A. divisible par 24 **B.** divisible par 10 **C.** multiple de 36 **D.** multiple de 12

Diviseurs et multiples

Exercice 1.2 :

1. Trouver tous les diviseurs (positifs et négatifs) de 48 et 120.

2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des diviseurs communs à 48 et 120. Quel est le plus grand de ces diviseurs communs ? Notons le Δ.

3. Vérifier que tous les éléments de $\mathscr{D}$ divisent Δ.

Exercice 1.3 :

1. Montrer que 2 727 est divisible par 101.

2. Notons $N = \overline{abab}$ un nombre entier naturel de quatre chiffres, a et b étant des chiffres avec $a \neq 0$. Montrer que N est divisible par 101.

Exercice 1.4 : Quel est le plus petit entier naturel multiple à la fois de 4, 5 et 21 ? Même question avec 6, 10 et 21.

Exercice 1.5 : Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $n^2 - 13n + 42 = 0$.

Exercice 1.6* : Trouver tous les triangles rectangles dont les côtés ont pour longueurs trois entiers naturels consécutifs.

Exercice 1.7 : À chaque lettre de l'alphabet latin on fait correspondre son rang diminué de 1 et réciproquement, de sorte que $A \leftrightarrow 0$, $B \leftrightarrow 1$, ..., $Z \leftrightarrow 25$.

1. Codage Pour coder une lettre, on la remplace par son nombre associé, puis on le multiplie par 3, on effectue la division euclidienne de ce dernier nombre par 26, au reste ainsi obtenu on associe la lettre qui lui est affecté. Le codage est terminé. Coder de cette manière le mot « BONJOUR ».

2. Décodage On considère une lettre codée avec la méthode précédente. On remplace la lettre par le nombre qui lui est associé, on le multiplie par 9, on effectue la division euclidienne par 26, au reste ainsi obtenu on associe la lettre associée. Le décodage est terminé. Décoder le mot « AIZMLQYZ ».

3. Écrire en langage Python deux fonctions, l'une de codage, l'autre de décodage d'un mot.

Exercice 1.8 : Calculer le PGCD de 201 et 123, en déduire la forme irréductible de la fraction $\frac{201}{123}$.

Exercice 1.9 :

1. Déterminer le PGCD de 186 et 155.

2. Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats. Les colis sont constitués ainsi :

- le nombre de pralines est le même dans chaque colis ;
- le nombre de chocolats est le même dans chaque colis ;

- tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

a. Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ?
b. Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ?

D'après Brevet des collèges, Amérique du Nord, juin 2009

■ Nombres pairs et nombres impairs

Exercice 1.10* : Montrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 6.

Exercice 1.11 : Pour tout entier naturel n, on définit l'expression $A(n) = 3n^2 - 2n + 1$.
1. Déterminer la parité de $A(0)$ et $A(3)$.
2. Déterminer la parité de $A(n)$ en fonction de n.

Exercice 1.12 : Trouver toutes les valeurs de l'entier naturel a de façon que an^2+n+1 soit impair quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 1.13 : Suite de Syracuse

Pour tout entier naturel n non nul, on définit l'expression $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3n+1 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Calculer $f(0)$, $f(5)$ et $f(f(5))$.
Pour tout entier naturel p non nul, on définit $f^{(p)}(n) = \underbrace{f(\cdots f(\cdots f(}_{p \text{ fois}} n \underbrace{)\cdots)}_{p \text{ fois}}$, ainsi $f^{(2)}(5) = f\left(f(5)\right)$. Si on pose $f^{(0)}(n) = n$, on remarquera que $f^{(p)}(n) = f\left(f^{(p-1)}(n)\right)$.
2. Calculer $f^{(p)}(5)$ pour $0 \leqslant p \leqslant 8$, que remarque-t-on ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $f^{(n)}\left(2^n\right)$.

■ Nombres premiers

Exercice 1.14 : Décomposer, si possible, les nombres suivants en produits de facteurs premiers : 53 240 ; 1 029 ; 1 933.

Exercice 1.15* : Soit n et d deux entiers naturels avec d qui divise n.
1. Montrer qu'il existe un entier naturel d' tel que $n = dd'$.
2. Montrer que $d^2 \leqslant n$ ou $d'^2 \leqslant n$.
3. On considère l'expression $A = d^2 - n$ et on suppose que $d^2 \leqslant n$.
  a. Factoriser l'expression A en utilisant une identité remarquable.
  b. Déterminer le signe de chacun des facteurs du produit obtenu précédemment.
  c. En déduire la position relative de d et $\sqrt{n}$.
4. Qu'avons-nous démontré dans les questions précédentes ?
5. Déduire de la question précédente un test de primalité d'un entier naturel n, $n \geqslant 4$. Appliquer ce test au nombre 1 549.

Exercice 1.16 : Pour quelle(s) valeur(s) de l'entier naturel n, le nombre $A(n) = (2n + 3)(n + 1)$ est-il premier ?

Exercice 1.17 :**
1. Vérifier que $2 \times 3 + 1$, $2 \times 3 \times 5 + 1$ et $2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$ sont des nombres premiers.

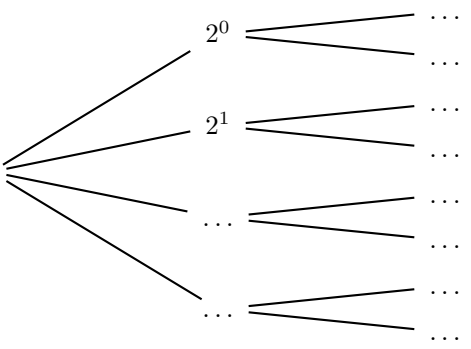
2. Soit n un entier naturel non nul, notons p_1, p_2, ..., p_n les n premiers nombres premiers, montrer que $p_1p_2\cdots p_n+1$ n'est divisible par aucun des nombres premiers de cette liste.
3. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 1.18 :**

1. Un cas particulier

a. Décomposer 24 en produit de facteurs premiers.

b. Compléter l'arbre ci-dessous et faire la liste de tous les diviseurs positifs de 24. Combien y en a-t-il ?



c. En suivant la même démarche, trouver tous les diviseurs positifs de 13 545. Combien y en a-t-il ?

2. Le cas général

Soit n un entier naturel non nul, p_1, ..., p_n des nombres premiers distincts, α_1, ..., α_n des entiers naturels non nuls, on considère le nombre $N = {p_1}^{\alpha_1}\cdots{p_n}^{\alpha_n}$. En vous inspirant de ce qui précède, déterminer le nombre de diviseurs positifs de N.

Indications

Ex. 1.2

On pourra se référer à la **méthode 1.1**.

Ex. 1.3

2. *Rappelons que les chiffres sont :* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. *Par ailleurs* $N = 1\,000a + 100b + 10a + b$.

Ex. 1.4

Chercher le plus petit multiple m *de* 4 *et* 5, *puis le plus petit multiple de* m *et* 21. *Même démarche pour l'autre triplet.*

Ex. 1.5

L'équation est équivalente à $n(13-n) = 42$.

Ex. 1.6

Trois entiers naturels consécutifs sont de la forme n, $n+1$ *et* $n+2$.

Ex. 1.7

Pour la définition de la division euclidienne, voir le **théorème 1.5** *précédent la* **méthode 1.3**.

Ex. 1.8

On pourra utiliser la **méthode 1.5**.

Ex. 1.9

Cet exercice utilise la définition et le calcul d'un PGCD, à cette occasion on pourra utiliser la **méthode 1.4**.

Ex. 1.10

n étant un entier naturel, le produit de trois entiers naturels consécutifs peut s'écrire par exemple $n(n+1)(n+2)$. On pourra utiliser des divisions euclidiennes et le raisonnement par disjonction des cas vu dans le chapitre **Vocabulaire ensembliste et logique**.

Ex. 1.11

2. *On pourra raisonner par disjonction des cas (cf. chapitre* **Vocabulaire ensembliste et logique***), suivant la parité de n.*

Ex. 1.12

Encore une fois, et comme dans l'exercice précédent, on peut raisonner par disjonction des cas suivant la parité de n.

Ex. 1.13

3. *n étant un entier naturel non nul, $f^{(n)}\left(2^n\right) = f^{(n-1)}\left(f\left(2^n\right)\right)$.*

Ex. 1.15

2. *Soit $d \leqslant d'$, soit $d' \leqslant d$.*

Ex. 1.17

On pourra procéder à un raisonnement par l'absurde (voir le chapitre **Vocabulaire ensembliste et logique***) pour les questions* **2.** *et* **3.**

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	V	F	F	V	V	V	F	F

1. a divise b ,donc il existe un entier relatif k tel que $b = ka$ et b divise c, donc il existe un entier relatif k' tel que $c = k'b$. Par conséquent $c = kk'a$, or $kk' \in \mathbb{Z}$, donc a divise c.
2. Il manque 1 comme diviseur de 12.
3. $-a$, -1, 1 et a sont quatre diviseurs distincts de a.
4. 3 et 6 divisent 12, mais 3×6 ne divise pas 12.
5. $\frac{6}{35}$ est une fraction irréductible, mais ni 6, ni 35 ne sont premiers.
6. On teste la divisibilité de 751 par tous les nombres premiers qui lui sont inférieurs et aucun ne le divise, donc 751 est premier.
7. Si a divise b, alors il existe un entier relatif k tel que $b = ak$, donc $|b| = |ak| = |a||k|$. $b \neq 0$, donc $k \neq 0$, ainsi $|k| \geqslant 1$, donc $|a||k| \geqslant |a|$, d'où le résultat annoncé $|a| \leqslant |b|$.
8. Soit c un diviseur commun de a et b, et m un multiple de a et b. c divise a qui divise m, donc d'après la question **1.**, c divise m.
9. Par exemple $2 + 3 = 5$ et 2, 3 et 5 sont premiers.
10. Posons $a = 4$ et $b = 3$, alors $a^2 - b^2 = 7$, 7 étant premier.

❑ Erreurs classiques

- a et b étant des entiers relatifs, si on peut écrire l'égalité $b = ak$, il faut vérifier que $k \in \mathbb{Z}$ pour affirmer que a divise b.
- Contrairement aux entiers relatifs pairs, les entiers impairs ne sont pas définis par une propriété de divisibilité.
- Lors de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel non nul b, ne pas oublier la condition $0 \leqslant r < b$ où r est le reste, elle assure l'unicité du couple quotient-reste.
- La notion de divisibilité n'a d'intérêt que dans $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{N}$), pas dans $\mathbb{R}$, en effet si a et b sont des réels non nuls quelconques, alors a divise b dans $\mathbb{R}$ puisque $b = \frac{b}{a}a$.
- Tous les nombres premiers ne sont pas impairs, 2 est l'unique nombre premier pair.
- 0 ne divise que 0, par contre 0 est un multiple de n'importe quel entier relatif.
- Si a, b et c sont des entiers relatifs tels que a et b divisent c, alors on n'a pas nécessairement ab qui divise c, voir l'affirmation **4.** ci-dessus. En fait, on montrerait qu'il faut et qu'il suffit que a et b soient premiers entre eux.

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

A. Faux. Par exemple $n = 12$ est divisible par 4 et 6 mais pas par 24.
B. Faux. 12 n'est pas divisible par 10.
C. Faux. 12 n'est pas multiple de 36.
D. Vrai. Le plus petit multiple commun de 6 et 4 est 12. ▲

Exercice 1.2

On utilise la **méthode 1.1**.
1. Les diviseurs de 48 sont : -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -8, 8, -12, 12, -16, 16, -24, 24, -48 et 48. Soit 20 diviseurs exactement.
Les diviseurs de 120 sont : -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, -6, 6, -8, 8, -10, 10, -12, 12, -15, 15, -20, 20, -24, 24, -30, 30, -40, 40, -60, 60, -120 et 120. Soit 32 diviseurs exactement.
2. Pour lister les éléments de $\mathscr{D}$, on passe en revue chacun des éléments de la plus petite des deux listes de diviseurs et on garde ceux qui sont présents dans l'autre liste.
$\mathscr{D} = \{-1\ ;\ 1\ ;\ -2\ ;\ 2\ ;\ -3\ ;\ 3\ ;\ -4\ ;\ 4\ ;\ -6\ ;\ 6\ ;\ -8\ ;\ 8\ ;\ -12\ ;\ 12\ ;\ -24\ ;\ 24\}$.
On constate que $\Delta = 24$.
3. On vérifie que tous les éléments de $\mathscr{D}$ divisent Δ. Par exemple $\Delta = -8 \times (-3)$. ▲

✎ *On dit que* 24 *est le plus grand diviseur commun (PGCD) de* 48 *et* 120.

Exercice 1.3

1. $2\,727 = 101 \times 27$, donc 2 727 est divisible par 101.
2. $N = 1000a+100b+10a+b = 1010a+101b = 101\times 10a+101b = 101(10a+b)$, or $10a + b \in \mathbb{N}$ donc N est divisible par 101. ▲

Exercice 1.4

Le plus petit multiple de 4 et 5 est 20, et le plus petit multiple de 20 et 21 est $420 = 20 \times 21$. Le plus petit multiple de 4, 5 et 21 est 420.
30 est le plus petit multiple de 6 et 10. 210 est le plus petit multiple de 30 et 21, donc c'est aussi le plus petit multiple de 6, 10 et 21. ▲

Exercice 1.5

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 - 13n + 42 = 0 \Leftrightarrow 13n - n^2 = 42 \Leftrightarrow n(13 - n) = 42$$

Ainsi, puisque $13-n \in \mathbb{Z}$, n divise 21, donc $n \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 14\ ;\ 21\ ;\ 42\}$.
Calculons le produit $n(13 - n)$ pour chaque valeur de n et comparons les nombres obtenus à 42. On constate que seuls $n = 6$ et $n = 7$ conviennent, donc l'ensemble solution dans $\mathbb{N}$ est $\{6\ ;\ 7\}$. ▲

✎ *Vous verrez en première spécialité mathématiques, que* 6 *et* 7 *sont les seules solutions dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 1.6

Trois entiers naturels consécutifs sont de la forme n, $n + 1$ et $n + 2$. L'hypoténuse étant le côté le plus long d'un triangle rectangle, d'après le théorème de Pythagore, $n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2$, reste à résoudre cette équation dans $\mathbb{N}$.

$$n^2+(n+1)^2=(n+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+n^2+2n+1=n^2+4n+4$$
$$\Leftrightarrow \quad n^2-2n-3=0$$
$$n^2+(n+1)^2=(n+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad n(n-2)=3$$

On cherche dans $\mathbb{N}$ les solutions de cette équation.

Ainsi, puisque $n-2 \in \mathbb{Z}$, n est un entier naturel divisant 3, or 3 est un nombre premier, donc $n=1$ ou $n=3$. Notons (E) l'équation $n(n-2)=3$. Si $n=1$, l'équation (E) devient $1(1-2)=3$ or cette égalité est impossible, donc 1 n'est pas une solution. Si $n=3$, l'équation (E) devient $3(3-2)=3$ or cette égalité est vraie, donc 3 est l'unique solution de (E). Seul le triangle ayant des côtés de longueurs 3, 4 et 5 est rectangle avec des côtés de longueurs trois entiers naturels consécutifs. ▲

Exercice 1.7

Pour l'utilisation de la division euclidienne, on se réfère à la **méthode 1.3**.

1. Détaillons l'algorithme et les calculs pour le codage de la lettre O.
O est associé au nombre 14 ; multiplié par 3, on obtient 42 ; la division euclidienne de 42 par 26 donne l'identité $42=26\times1+16$, donc 16 est son reste ; 16 est associé à la lettre Q. Finalement, O est codé par Q. Retrouvons ci-dessous un tableau récapitulatif du codage de chaque lettre du mot « BONJOUR ».

	B	**O**	**N**	**J**	**O**	**U**	**R**
Nombre associé	1	14	13	9	14	20	17
Multiplication par 3	3	42	39	27	42	60	51
Reste	3	16	13	1	16	8	25
Lettre associée	**D**	**Q**	**N**	**B**	**Q**	**I**	**Z**

La version codée de « BONJOUR » est « DQNBQIZ ».

Ce code est facile à cracker (décoder) puisque à chaque lettre du mot à coder correspond toujours la même lettre du mot codé, et inversement.

2. Détaillons l'algorithme et les calculs pour le décodage de la lettre I.
I est associé au nombre 8 ; multiplié par 9, on obtient 72 ; la division euclidienne de 72 par 26 donne l'identité $72=26\times2+20$, donc 20 est son reste ; 20 est associé à la lettre U. Finalement, I est décodé par U. Retrouvons ci-dessous un tableau récapitulatif du décodage de chaque lettre du mot « AIZMLQYZ ».

	A	**I**	**Z**	**M**	**L**	**Q**	**Y**	**Z**
Nombre associé	0	8	25	12	11	16	24	25
Multiplication par 9	0	72	225	108	99	144	216	225
Reste	0	20	17	4	21	14	8	17
Lettre associée	**A**	**U**	**R**	**E**	**V**	**O**	**I**	**R**

La version décodée de « AIZMLQYZ » est « AUREVOIR ».

3. Voici des programmes en pseudo-code des algorithmes respectivement de codage et de décodage d'un mot.

Voir la partie **Algorithmique et programmation**.

```
Demander un mot
mot_code=""
Pour chaque lettre de mot Faire
        Associer à lettre un nombre
        reste = reste de la division euclidienne de 3*nombre
        par 26
        mot_code=mot_code+lettre associée à reste
FinPour
Afficher mot_code
```

Corrigé

```
Demander un mot
mot_code=""
Pour chaque lettre de mot Faire
        Associer à lettre un nombre
        reste = reste de la division euclidienne de 9*nombre
        par 26
        mot_code=mot_code+lettre associée à reste
FinPour
Afficher mot_code
```

Voici les versions de ces programmes en langage Python.

Rappelons que les caractères qui suivent le symbole dièse ne sont pas interprétés par Python et permettent d'insérer des commentaires en vue d'éclairer la syntaxe d'un programme pour un lecteur lambda.

```
def codage(mot): #mot est écrit en majuscules sans espaces
    mot_code="" #initialement mot_code est la chaîne vide
    for lettre in mot: #balaie une à une toutes les lettres
    #de mot de gauche à droite
        nombre=3*(ord(lettre)-65) #ord renvoie le code ASCII
        #de lettre, 0<=nombre<=3*25
        reste=nombre%26 #donne le reste de la division
        #euclidienne de nombre par 26
        mot_code=mot_code+chr(reste+65) #chr renvoie le
        #caractère de code ASCII reste+65
    return mot_code
```

```
def décodage(mot): #mot est écrit en majuscules sans espaces
    mot_code=""
    for lettre in mot:
        nombre=9*(ord(lettre)-65)
        reste=nombre%26
        mot_code=mot_code+chr(reste+65)
    return mot_code
```

*Pour chaque lettre notée X, on a codage(décodage(X)) = décodage(codage(X)), on dit que les **fonctions** codage et décodage sont **réciproques** l'une de l'autre.*

Par exemple codage('BONJOUR') renvoie 'DQNBQIZ', décodage('AIZMLQYZ') renvoie 'AUREVOIR', et bien sûr décodage(codage('BONJOUR')) renvoie 'BONJOUR'. ▲

Exercice 1.8

Utilisons la **méthode 1.5**.

- **Recherche des diviseurs positifs de 201 et 123**
  Les diviseurs positifs de 201 sont : 1, 3, 67 et 201.
  Les diviseurs positifs de 123 sont : 1, 3, 41 et 123.
- Le plus grand diviseur commun de 201 et 123 est 3, donc PGCD(201 ; 123) = 3.
- $\frac{201}{123} = \frac{\cancel{3}\times 67}{\cancel{3}\times 41} = \frac{67}{41}$, $\frac{67}{41}$ est la forme irréductible de $\frac{201}{123}$. ▲

Exercice 1.9

1. Utilisons la **méthode 1.4**.
Les diviseurs positifs de 186 sont : 1, 2, 3, 6, $\boxed{31}$, 62, 93 et 186.
Les diviseurs positifs de 155 sont : 1, 5, $\boxed{31}$ et 155.
Le plus grand diviseur commun est 31, donc PGCD(186 ; 155) = 31.
2.

a. Le nombre de pralines est identique dans chaque colis donc ce nombre est un diviseur de 186. Le nombre de chocolats est identique dans chaque colis donc ce nombre est un diviseur de 155. Le nombre de colis est donc un diviseur positif de 186 et 155. Le nombre de colis étant maximal ce diviseur est le PGCD de 186 et 155. D'après la question précédente, PGCD(186 ; 155) = 31, par conséquent le chocolatier pourra réaliser au maximum 31 colis.

b. Le nombre de pralines dans chaque colis est : $\frac{186}{31} = 6$.
Le nombre de chocolats dans chaque colis est : $\frac{155}{31} = 5$. ▲

Exercice 1.10

Soit n un entier naturel, notons $N = n(n+1)(n+2)$ le produit de trois entiers naturels consécutifs. n et $n+1$ sont deux entiers naturels consécutifs, donc l'un d'eux est pair. En effet, effectuons la division euclidienne de n par 2, alors il existe un entier naturel q tel que $n = 2q + r$ où $r \in \{0\ ;\ 1\}$, si $r = 0$ alors n est pair, si $r = 1$ alors $n = 2q + 1$ ainsi $n + 1 = 2q + 2 = 2(q + 1)$ où $q + 1 \in \mathbb{N}$ donc $n + 1$ est pair.
Montrons que $n(n + 1)$ est pair. Si n est pair, il existe un entier naturel p tel que $n = 2p$, alors $n(n + 1) = 2p(n + 1)$ et comme $p(n + 1) \in \mathbb{N}$ on en déduit que $n(n + 1)$ est pair. Si n est impair, alors il existe un entier naturel p tel que $n = 2p + 1$, donc $n + 1 = 2p + 2 = 2(p + 1)$, ainsi $n(n + 1) = 2n(p + 1)$ or $n(p + 1) \in \mathbb{N}$ donc $n(n + 1)$ est encore pair. La proposition est démontrée.
Dans tous les cas on en déduit que N est un multiple de 2.
Montrons que l'un des entiers n, $n + 1$ et $n + 2$ est un multiple de 3. Pour ce faire, effectuons la division euclidienne de n par 3, $n = 3q + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0\ ;\ 1\ ;\ \ 2\}$. Si $r = 0$, alors n est un multiple de 3. Si $r = 1$, alors $n = 3q + 1$, donc $n + 2 = 3q + 3 = 3(q + 1)$ avec $q + 1 \in \mathbb{N}$, donc $n + 2$ est un multiple de 3. Si $r = 2$, alors $n = 3q + 2$, donc $n + 1 = 3q + 3 = 3(q + 1)$ où $q + 1 \in \mathbb{N}$, donc $n + 1$ est un multiple de 3. Finalement N est toujours un multiple de 3.
N est un multiple de 2 et 3, montrons qu'il est aussi multiple de 6. 3 divise N donc il existe un entier naturel p tel que $N = 3p$. N est aussi un multiple de 2, donc il existe un entier naturel q tel que $N = 2q$. Finalement $3p = 2q$ et donc $\frac{p}{2} = \frac{q}{3}$. Rappelons que $\frac{p}{2}$ est un nombre décimal, contrairement à $\frac{1}{3}$ d'après le **théorème 2.1** démontré dans le chapitre précédent. Effectuons la division euclidienne de q par 3 : il existe unique couple d'entiers naturels $(s\ ;\ r)$ tel que $q = 3s + r$ avec $0 \leqslant r < 3$, ainsi $\frac{q}{3} = s + \frac{r}{3}$, autrement dit $\frac{p}{2} = s + \frac{r}{3}$. Si $r = 0$, alors q est un multiple de 3 et $\frac{p}{2}$ est un entier. Si $r = 1$ ou $r = 2$, alors $\frac{1}{3} = \frac{1}{r}\left(\frac{p}{2} - s\right)$, or $\frac{1}{r}\left(\frac{p}{2} - s\right)$ est un nombre décimal et pas $\frac{1}{3}$, donc l'hypothèse $r \neq 0$ est absurde, donc 3 divise q.
On récapitule : $N = 2q$ et q est un multiple de 3, donc il existe un entier naturel q' tel que $q = 3q'$, par conséquent $N = 6q'$, ainsi N est bien un multiple de 6. ▲

Exercice 1.11

1. $A(0) = 1$ est impair. $A(3) = 3 \times 3^2 - 2 \times 3 + 1 = 3 \times 9 - 6 + 1 = 22$ est pair.
2. Si n est pair alors il existe un entier naturel p tel que $n = 2p$.
$A(n) = 3(2p)^2 - 2 \times 2p + 1 = 3 \times 4p^2 - 4p + 1 = 12p^2 - 4p + 1 = 2\left(6p^2 - 2p\right) + 1$, or $6p^2 - 2p \in \mathbb{Z}$ donc $A(n)$ est impair.
Si n est impair alors il existe un entier naturel p tel que $n = 2p + 1$.

$$\begin{aligned} A(n) &= 3(2p+1)^2 - 2(p+1) + 1 \\ &= 3\left(4p^2+4p+1\right) - 2p - 2 + 1 \\ &= 12p^2 + 12p + 3 - 2p - 1 \\ &= 12p^2 + 10p + 2 \\ A(n) &= 2\left(6p^2+5p+1\right) \end{aligned}$$

$6p^2 + 5p + 1 \in \mathbb{Z}$ donc $A(n)$ est pair.
Pour conclure, si n est pair alors $A(n)$ est impair et si n est impair, $A(n)$ est pair. ▲

Exercice 1.12

a étant un entier naturel, on définit sur $\mathbb{N}$ l'expression $f(n) = an^2 + n + 1$.
Raisonnons par disjonction des cas, suivant la parité de n.
Si n est pair, alors il existe un entier naturel p tel que $n = 2p$ et
$f(n) = a4p^2 + 2p + 1 = 2\left(2ap^2 + p\right) + 1$ et comme $2ap^2 + p \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est impair quel que soit l'entier naturel a.
Si n est impair, alors il existe un entier naturel p tel que $n = 2p + 1$ et

$$\begin{aligned} f(n) &= a(2p+1)^2 + 2p + 1 + 1 = a\left(4p^2+4p+1\right) + 2p + 2 \\ f(n) &= 4ap^2 + 4ap + a + 2p + 2 = 2\left(2ap^2 + 2ap + p + 1\right) + a \end{aligned}$$

Posons $q = 2ap^2 + 2ap + p + 1$, $q \in \mathbb{N}$ et $f(n) = 2q + a$. $f(n)$ étant impair, il existe un entier relatif r tel que $f(n) = 2r + 1$, alors $2r + 1 = 2q + a$ et donc $a = 2(q - r) + 1$ or $q - r \in \mathbb{Z}$ donc a est impair.
Finalement, $f(n)$ est impair pour tout entier naturel n si, et seulement si, a est impair. ▲

Exercice 1.13

✎ n étant un entier naturel, la fonction $p \mapsto f^{(p)}(n)$, définie sur $\mathbb{N}$ est la **suite de Syracuse**. *On conjecture que pour tout n il existe une valeur de p à partir de laquelle on retrouve indéfiniment la suite 4, 2, 1.*

1. $f(0) = 0$; $f(5) = 16$; $f\left(f(5)\right) = f(16) = 8$.
2. $f^{(0)}(5) = 5$; $f^{(1)}(5) = f(5) = 16$; $f^{(2)}(5) = f(16) = 8$; $f^{(3)}(5) = f(8) = 4$; $f^{(4)}(5) = f(4) = 2$; $f^{(5)}(5) = f(2) = 1$; $f^{(6)}(5) = f(1) = 4$; $f^{(7)}(5) = f(4) = 2$; $f^{(8)}(5) = f(2) = 1$. Nous obtenons, dans l'ordre, les nombres suivants : 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1. Nous observons qu'à partir de $p = 3$, il semble que se répète indéfiniment la suite 4, 2, 1.
3. Soit n un entier naturel non nul, $f^{(n)}\left(2^n\right) = f^{(n-1)}\left(f\left(2^n\right)\right) = f^{(n-1)}\left(2^{n-1}\right)$, en itérant ce processus, on aboutit ultimement à l'égalité $f^{(n)}\left(2^n\right) = f^{(0)}\left(2^0\right) = 1$. ▲

Exercice 1.14

Utilisons la **méthode 1.1** et la **méthode 1.7**.

- **Décomposition de 53 240 en produit de facteurs premiers**

53 240	2
26 620	2
13 310	2
6 655	5
1 331	11
121	11
11	11
1	

$53\,240 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11 \times 11 \times 11 = 2^3 \times 5 \times 11^3$. $2^3 \times 5 \times 11^3$ est la décomposition de 53 240 en produit de facteurs premiers.

- **Décomposition de 1 029 en produit de facteurs premiers**

1 029	3
343	7
49	7
7	7
1	

$1\,029 = 3 \times 7 \times 7 \times 7 = 3 \times 7^3$. 3×7^3 est la décomposition de 1 029 en produit de facteurs premiers.

- Aucun nombre premier strictement inférieur à 1 933 ne divise 1 933, c'est donc un nombre premier. ▲

Exercice 1.15

Soit n et d deux entiers naturels avec d qui divise n.

1. Par définition de la divisibilité de n par d, il existe un entier naturel d' tel que $n = dd'$.

2. Soit $d \leqslant d'$, soit $d' \leqslant d$. Si $d \leqslant d'$, multiplions chaque membre de cette inégalité par d qui est positif, alors $d^2 \leqslant dd'$, donc $d^2 \leqslant n$. Si $d' \leqslant d$, multiplions chaque membre de cette inégalité par d' qui est positif, alors $d'^2 \leqslant dd'$, donc $d'^2 \leqslant n$.

3. Posons $A = d^2 - n$, avec $d^2 \leqslant n$.

a. $A = d^2 - \sqrt{n}^2 = (d - \sqrt{n})(d + \sqrt{n})$

b. d et $\sqrt{n}$ sont des nombres réels positifs, donc $d + \sqrt{n} \geqslant 0$. Par hypothèse $d^2 \leqslant n$, donc en ajoutant $-n$ aux deux membres de l'inégalité, on obtient $d^2 - n \leqslant 0$, autrement dit $A \leqslant 0$. En bref, $A = (d - \sqrt{n})(d + \sqrt{n})$ avec $d + \sqrt{n} \geqslant 0$ et $A \leqslant 0$, la règle des signes dans un produit entraîne que $d - \sqrt{n} \leqslant 0$.

c. Puisque $d - \sqrt{n} \leqslant 0$, en ajoutant $\sqrt{n}$ aux deux membres de l'inégalité, on obtient $d \leqslant \sqrt{n}$.

4. Le raisonnement développé ci-dessus pour $A = d^2 - n$, avec $d^2 \leqslant n$ peut être repris avec $B = d'^2 - n$, avec $d'^2 \leqslant n$. Par conséquent nous avons montré que pour tous diviseurs positifs d et d' de n, tels que $n = dd'$, soit $d \leqslant \sqrt{n}$, soit $d' \leqslant \sqrt{n}$.

5. Soit n un entier naturel supérieur à 4, si aucun des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ ne divise n, alors n est premier.
Les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{1\,549} \approx 39$ sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 et 37. Aucun de ces nombres ne divise 1 549, donc il est premier. ▲

L'introduction de la borne $\sqrt{n}$ permet de réduire le nombre de tests de divisibilité.

Exercice 1.16

n étant un entier naturel, on pose $A(n) = (2n + 3)(n + 1)$, $A(n)$ est donc un entier naturel. Pour que $A(n)$ soit premier, il faut et il suffit que $2n + 3 = 1$ avec $n + 1$ premier, ou $n + 1 = 1$ avec $2n + 3$ premier. Si $2n + 3 = 1$, alors $n = -1$ contraire à l'hypothèse $n \in \mathbb{N}$. Si $n + 1 = 1$, alors $n = 0$ auquel cas $2n + 3 = 3$ qui est premier. Finalement, $A(n)$ est premier si, et seulement si, $n = 0$ auquel cas $A(n) = 3$. ▲

Exercice 1.17

1. $2\times3+1 = 7$ est premier ; $2\times3\times5+1 = 31$ est premier ; $2\times3\times5\times7+1 = 211$ n'est divisible par aucun nombre premier qui lui est strictement inférieur, donc il est premier.

Corrigé

2. Posons $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ où p_1, p_2, ..., p_n sont les n ($n \in N^\star$) premiers nombres premiers. Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'un nombre premier p_k divisant N, alors il existe un entier naturel m tel que $N = p_k m$, nous obtenons les équivalences ci-dessous :

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1 = p_k m \Leftrightarrow p_k m - p_1 p_2 \cdots p_n = 1 \Leftrightarrow p_k \left(m - \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{p_k}\right) = 1$$

Or $\frac{p_1 p_2 \cdots \cancel{p_k} \cdots p_n}{\cancel{p_k}} = p_1 p_2 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_n \in \mathbb{N}$, donc $m - \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{p_k} \in \mathbb{Z}$, ainsi p_k divise 1 ce qui est absurde puisque $1 < p_k$. Nous avons montré qu'aucun des nombres premiers p_k ne divise N.

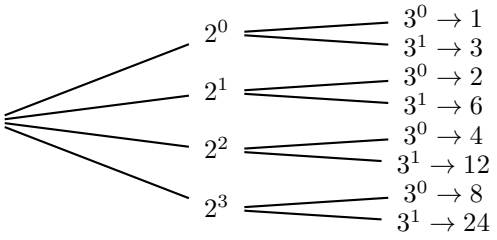
3. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble des nombres premiers est fini, autrement dit qu'il contient un nombre fini d'éléments. Dans ce cadre l'ensemble des nombres premiers est $\mathscr{P} = \{p_1 \ ; \ p_2 \ ; \ \cdots \ ; \ p_n\}$. Notons $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$, soit N est un nombre premier, soit il s'écrit comme produit de nombres premiers, dans tous les cas il existe $p \in \mathscr{P}$ divisant N. Mais d'après la question précédente, p n'existe pas, ce qui est absurde, par conséquent l'hypothèse initiale est fausse, ainsi l'ensemble des nombres premiers est infini. ▲

Exercice 1.18

1.

a. $24 = 2^3 \times 3$

b.

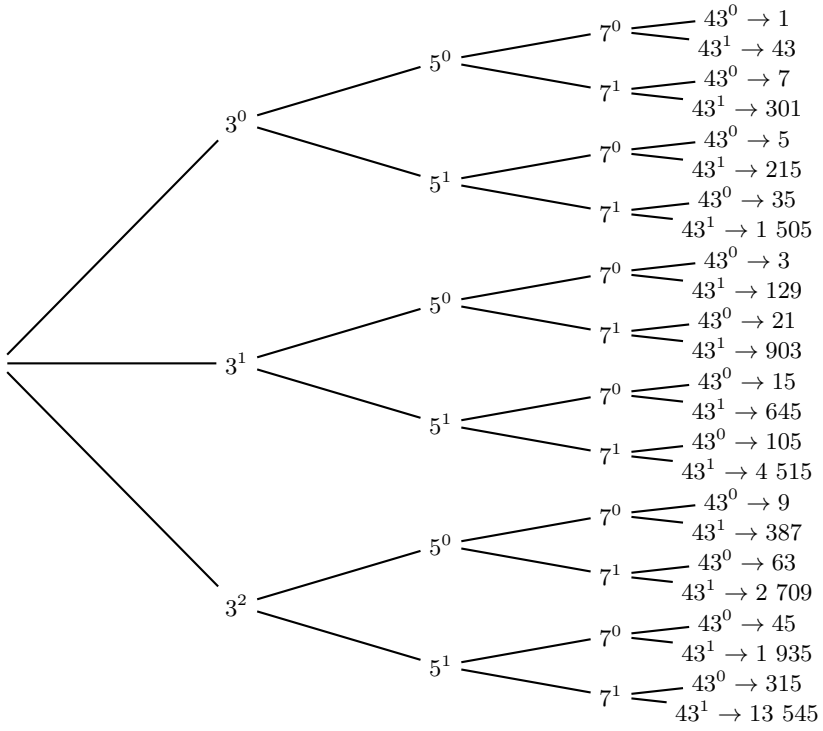


Nous trouvons aux extrémités des flèches, les produits des nombres se trouvant sur un même chemin.
Un diviseur positif d'un entier naturel n admet, dans sa décomposition en produit de facteurs premiers, les mêmes nombres premiers que n avec pour chacun un exposant au plus égal à celui présent dans la décomposition de n. Les diviseurs positifs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 et sont au nombre de $4 \times 2 = 8$.

On appelle « chemin » la suite des lettres ou nombres se trouvant reliés entre eux par des segments lors d'une lecture de l'arbre de gauche à droite.

c. $13\,545 = 5 \times 2\,709 = 3^2 \times 5 \times 301 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 43$. Les diviseurs positifs de 13 545 apparaissent dans l'arbre page suivante à l'extrémité des flèches, leur nombre est $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$.

2. Pour déterminer la liste de tous les diviseurs positifs de $N = {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_n}^{\alpha_n}$, on peut construire un arbre de choix comme précédemment, le premier niveau possède $\alpha_1 + 1$ embranchements, le deuxième $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$, etc. Le nombre de diviseurs positifs de N est $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$.


3^0
3^1
3^2
5^0
5^1
5^0
5^1
5^0
5^1
7^0
7^1
7^0
7^1
7^0
7^1
7^0
7^1
7^0
7^1
7^0
7^1
$43^0 \to 1$
$43^1 \to 43$
$43^0 \to 7$
$43^1 \to 301$
$43^0 \to 5$
$43^1 \to 215$
$43^0 \to 35$
$43^1 \to 1\ 505$
$43^0 \to 3$
$43^1 \to 129$
$43^0 \to 21$
$43^1 \to 903$
$43^0 \to 15$
$43^1 \to 645$
$43^0 \to 105$
$43^1 \to 4\ 515$
$43^0 \to 9$
$43^1 \to 387$
$43^0 \to 63$
$43^1 \to 2\ 709$
$43^0 \to 45$
$43^1 \to 1\ 935$
$43^0 \to 315$
$43^1 \to 13\ 545$

▲

Corrigé