



Mathématiques

CLASSE DE **5^e**

Pour ceux
qui veulent comprendre

2^e édition

Jean-Louis FROT



Mathématiques

CLASSE DE **5^e**

Pour ceux
qui veulent comprendre

Mathématiques

CLASSE DE **5^e**

Pour ceux
qui veulent comprendre

2^e édition

Jean-Louis FROT



Du même auteur

Mathématiques. Classe de première. Pour ceux qui ont besoin d'être rassurés,
éditions Ellipses, 248 pages, 2022

Mathématiques. Classe de seconde. Pour ceux qui ont besoin d'être rassurés,
éditions Ellipses, 200 pages, 2022

Mathématiques. Classe de troisième. Pour ceux qui veulent comprendre,
éditions Ellipses, 192 pages, 2021

Mathématiques. Classe de quatrième. Pour ceux qui veulent comprendre,
éditions Ellipses, 168 pages, 2021

Mathématiques. Classe de sixième. Pour ceux qui veulent comprendre,
éditions Ellipses, 160 pages, 2021

*Mathématiques. Un cours de haut niveau
pour les élèves de Première et Terminale S qui envisagent une prépa,*
2^e édition révisée, éditions Ellipses, 264 pages, 2018

*Mathématiques. Exercices et problèmes de haut niveau
pour les élèves de Première et Terminale S qui envisagent une prépa,*
2^e édition révisée, éditions Ellipses, 464 pages, 2018

*Mathématiques, exercices avec corrigés et rappels de cours
pour ceux qui veulent s'initier pour de bon, 6^e à 3^e,*
2^e édition révisée, éditions Clovis, 290 pages, 2020

ISBN 9782340-120723

Dépôt légal : septembre 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Les années passées jadis au milieu de mes élèves de collège m'ont conduit à penser que dans les petites classes, il faut essayer de donner aux enfants :

le goût et l'émerveillement des nombres, des figures et des jolis calculs.

J'ai enseigné les mathématiques dans toutes les classes du collège et du lycée, mais surtout (dans des conditions très privilégiées, au lycée Henri IV, à Paris) en classes de première S et terminale S. Je sais que la principale difficulté pour enseigner les mathématiques est de les rendre humaines, attractives et intéressantes, ce qui ne veut pas dire ludiques ou amusantes car les mathématiques sont une chose sérieuse.

Bien souvent, les mathématiques sont enseignées de façon rébarbative et ennuyeuse. Pourtant, et j'ai pu le constater tout au long de ma carrière, la curiosité et l'intelligence des enfants et des jeunes ne demandent qu'à croître et à se fortifier. Il leur faut donc une **nourriture intellectuelle vivifiante**.

C'est ce qui m'a décidé à prendre la plume, avec l'intention d'écrire un livre de mathématiques de niveau collège qui contribuât à la formation des enfants, du point de vue intellectuel, humain, spirituel, et qui exaltât aussi le sens de la **beauté** et du **courage**, conscient que ces grands mots vont contre l'air du temps.

L'origine des mathématiques se perd dans la nuit des temps. On connaît le **papyrus de Rhindt**, découvert sur un site archéologique de Thèbes, en Égypte, qui date du xvi^{e} siècle avant Jésus-Christ. Il contient des problèmes résolus d'arithmétique et d'arpentage.

On doit aux Grecs de l'Antiquité, à partir du v^{e} siècle avant Jésus-Christ, les plus anciennes **démonstrations** écrites et rigoureuses qui nous soient parvenues. Elles portent sur la géométrie et l'arithmétique. Les grands mathématiciens de la Grèce antique sont Thalès, Euclide, Pythagore, Archimède, Diophante, etc.

Il semble que les mathématiques soient entrées en sommeil après le déclin et la chute de Rome (476), et qu'elles ne se soient réveillées que sous Charlemagne (800). Mais au cours de cette période de latence, des mathématiques venant de l'Inde et de la Chine ont été transmises et enrichies par des **mathématiciens chrétiens ou perses** du bassin méditerranéen qui écrivaient en latin, ou en arabe du fait des conquêtes musulmanes commencées au vii^{e} siècle et poursuivies bien au-delà. On connaît ainsi un écrit de quelques pages, datant du ix^{e} siècle, et qui a pour titre "*al jabr*" (algèbre). Le savant moine bénédictin Gerbert, de l'abbaye d'Aurillac, élu pape en 999 sous le nom de Sylvestre II, a introduit l'algèbre en Europe.

Le développement ultérieur des sciences est en grande partie dû aux progrès accomplis en mathématiques dans le formalisme et les notations, à partir du xv^{e} siècle (Chuquet, Viète) et à l'intrépidité de quelques expérimentateurs et géomètres (Cardan, Bombielli, Torricelli, Galilée, Descartes, Pascal, Fermat, etc.). C'est le nouvel essor des mathématiques qui s'est produit dans l'Europe chrétienne qui a permis le développement spectaculaire de la physique à partir du xvii^{e} siècle.

Depuis cette époque, on ne peut plus **rien faire de sérieux** en sciences sans une formation de base solide en mathématiques. « La nature est un livre écrit en langage mathématique » disait Galilée au xvi^{e} siècle.

Les mathématiques sont le lieu privilégié des certitudes rationnelles, des notions abstraites et des démonstrations rigoureuses. Elles ont contribué au développement intellectuel de l'homme au cours des siècles, elles sont une de ses conquêtes, laborieusement acquise, elles constituent une composante majeure de la **culture universelle**.

Nombre de prélats et de princes chrétiens, depuis le Moyen Âge, n'ont pas hésité à se frotter aux sciences de leur époque, à les maintenir, à les protéger et à s'entourer de savants. On a déjà cité le pape de l'an mil, Gerbert d'Aurillac (Sylvestre II). Plus avant, on peut évoquer saint Augustin (mort en 430) qui relate quelques faits de ses années d'apprentissage dans ses *Confessions* (Liv. 4, chap. 16) :

« J'ai compris sans beaucoup de peine, et sans être aidé d'aucun homme tout ce que j'ai pu lire touchant l'art de l'Éloquence, la Dialectique, la Géométrie, la Musique et l'Arithmétique. »

En France, depuis le milieu des années 1980, les programmes de mathématiques du collège et du lycée ont été progressivement **bouleversés** et **saccagés**. Ayant déjà évoqué ce sujet dans l'épilogue du livre référencé en note¹, je ne dirai rien ici des partis pris idéologiques qui ont conduit à ces bouleversements et à ce saccage. Mais je dirai quelques mots des conséquences : il ne subsiste plus dans l'enseignement qui est dispensé aux élèves aujourd'hui, qu'une caricature grimaçante des mathématiques. Les mathématiques n'ont plus d'attrait pour les élèves, et la plupart d'entre eux en sont justement dégoûtés. Certains parviennent cependant à échapper au massacre, grâce à leurs parents qui ont les moyens de leur fournir une bonne instruction.

Je ne dis pas que les programmes de mathématiques des années 1950 à 1980 n'avaient pas de défauts, mais je dis que les programmes actuels ne sont plus des mathématiques. Et quand on feuillette la plupart des manuels français de mathématiques destinés à l'enseignement d'aujourd'hui, on est consterné, saisi de colère. Et on se dit :

Quel gâchis ! Quelle décadence ! Pauvres élèves !

Prenant la plume, disais-je, je me suis attaché, dans mes livres destinés au collège, à exposer et expliquer de mon mieux les bases de ce que doit être un enseignement de qualité. La matière abordée est accessible à un élève de niveau moyen, aidé d'un professeur qui choisira ce qui l'intéresse pour faire son cours. Mes livres ne sont qu'un outil entre les mains du professeur et de ses élèves. Le rôle du professeur est déterminant, c'est lui qui détient le savoir, c'est la référence, le modèle que l'enfant doit d'abord tâcher d'imiter lors de son initiation. Un bon professeur sait transmettre son enthousiasme. Il fait preuve de bienveillance, de patience et d'ingéniosité pour faire comprendre les mathématiques et les rendre familières. Tout un savoir non écrit passe par le professeur. Mais je ne voudrais pas laisser croire que je détiens une formule miracle pour enseigner les mathématiques, ou que les mathématiques sont une discipline facile, que l'on peut maîtriser sans efforts.

Pour bien faire comprendre les notions nouvelles, les livres comportent des explications concrètes et, aux niveaux 6^e, 5^e, 4^e, ils sont parsemés de **petites questions** posées à l'élève, et qui sont résolues un peu plus loin.

Une série d'exercices clôt chaque chapitre, la plupart originaux. Ils sont **corrigés** entièrement pour montrer aux élèves les méthodes de raisonnement. Presque tous de niveau facile ou moyen, ils ont pour ambition première de faciliter l'assimilation du cours et d'entraîner l'élève à la pratique aisée des techniques de base, un peu comme les gammes et les exercices d'assouplissement des doigts pour le piano. Mais l'auteur n'a pas pu s'empêcher de glisser quand même quelques **exercices plus relevés**, intéressants et instructifs,

1. J.-L. Frot : *Mathématiques - Cours de haut niveau pour les élèves de Première et Terminale S qui envisagent une prépa* - 2^e édition révisée, Ellipses (2018).

destinés à faire **aimer les mathématiques**, et à donner aux enfants suffisamment de satisfaction pour justifier les efforts qu'ils auront consentis pour les comprendre et les résoudre. (Pour les élèves qui veulent aller plus loin, il y a des exercices de niveau plus ambitieux dans le livre référencé en note²).

Il ne faut pas se précipiter sur les corrections d'exercices. Il faut se donner la peine de chercher pour avoir la **satisfaction de trouver** par soi-même. Si on parvient sans aide à résoudre ne serait-ce qu'une petite partie des questions, c'est déjà bien. Et puis, rien n'empêche de laisser de côté un exercice qui paraît hors d'atteinte à un moment donné, et d'y revenir un autre jour, lorsqu'on aura acquis plus de connaissances et d'aisance.

Un exercice doit toujours être d'abord cherché au brouillon. Quand on a résolu la première question au brouillon, on peut rédiger la solution de cette première question au propre. On passe ensuite à la deuxième question, et on continue de la même façon. Si on bute sur une question, on peut souvent l'admettre, et passer à la suivante sans dommage.

Un cours de mathématique introduit et explique des notions nouvelles. Si on veut en tirer profit, ces notions doivent être **étudiées** avec soin pour pouvoir les comprendre, et doivent ensuite être **appries** par cœur, jusqu'à pouvoir **réciter** définitions, règles et théorèmes (*voir* ci-après). C'est un bon entraînement pour les élèves de **travailler à deux**, de réciter et de s'interroger à tour de rôle. Le livre de mathématiques doit devenir un compagnon familier auquel on pourra même avoir recours l'année suivante. L'idéal étant de conserver précieusement ses livres de mathématiques des quatre années du collège.

Le style mathématique

On verra apparaître, au fil des pages de ce livre, les mots suivants :

- **définition** (abrégé parfois en **déf.**) dit ce que signifie un mot mathématique nouveau,
- **proposition** (abrégé parfois en **prop.**) = propriété,
- **théorème** (abrégé parfois en **th.**) = propriété importante,
- **corollaire** (abrégé parfois en **cor.**) = conséquence.

On donne dans le livre (lorsque c'est possible) des définitions rigoureuses des termes que l'on utilise. Ensuite, on énonce (et démontre parfois) des propositions et des théorèmes. Pour formaliser les énoncés, on utilise des symboles $\in$ (*voir* p. 77), $\neq$ (*voir* p. 15), $\Rightarrow$ (*voir* p. 77), $\Leftrightarrow$ (*voir* p. 84), $\perp$ et $\parallel$ (*voir* p. 17), etc. Leur définition précise et leur emploi sont donnés dans le livre aux pages que l'on vient d'indiquer. Faisons ici un survol :

Symbole	Lecture	Exemple	Traduction
$\in$	appartient	$A \in d$	A est un point de d .
$\neq$	différent	$1 \neq 0$	1 n'est pas nul.
$\Rightarrow$	implique, alors	$x = 1 \Rightarrow x \neq 0$	Si $x = 1$ alors il n'est pas nul.
$\Leftrightarrow$	équivalent	$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$	a^2 est nul équivaut à a est nul.
$\perp$	perpendiculaire	$d_1 \perp d_2$	d_1 et d_2 sont perpendiculaires.
$\parallel$	parallèle	$d_1 \parallel d_2$	d_1 et d_2 sont parallèles.

2. J.-L. Frot : *Mathématiques, exercices avec corrigés et rappels de cours pour ceux qui veulent s'initier pour de bon, 6^e à 3^e, 2^e édition révisée*, Clovis (2020).

Prenons pour exemple l'énoncé suivant :

Théorème 1. (théorème des perpendiculaires) *Si deux droites **du plan** sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.*

Il peut se formuler ainsi, les symboles d_1, d_2, d désignant des droites du plan :

$$(d_1 \perp d \text{ et } d_2 \perp d) \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

Les textes mathématiques comportent parfois un vocabulaire lourd, pénible à écrire et à lire pour le débutant. Quand quelques abréviations et symboles peuvent alléger le style et mieux faire **comprendre l'essentiel**, on les utilise. Comparer :

“ Les droites d_1 et d_2 sont parallèles d'après le théorème des perpendiculaires (*voir* théorème 1). ”

“ $d_1 \parallel d_2$ d'après le th. des perpendiculaires (*voir* th. 1). ”

On verra dans tout le livre, qu'abréviations et symboles mettent l'accent sur les **propriétés**, les **raisonnements**, et les **points importants**. Ils rendent le texte plus fluide, plus court, et donc plus facile à appréhender.

Ceci ne veut pas dire que l'auteur soit hostile ou indifférent au **beau style**. Ce qu'il veut ici, c'est donner au lecteur des modèles simples pour lui apprendre à réfléchir, raisonner et rédiger clairement.

Le livre de cinquième

Cette année, on découvre les **opérations sur les entiers relatifs** : règle de l'ascenseur pour l'addition (déf. 2, p. 27), règle des signes pour la multiplication (prop. 8, p. 30). C'est aussi les débuts du calcul algébrique : développement et factorisation dans un cadre modeste.

En arithmétique, on définit, pour deux entiers a et b , le ppcm (noté m) et le pgcd (noté d). On s'en sert pour calculer la somme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ou pour simplifier la fraction $\frac{a}{b}$. On donne encore la formule merveilleuse :

$$md = ab$$

qui permet de calculer m quand on a d (ou d quand on a m).

En géométrie plane, on montre progressivement la différence entre une évidence et une **preuve logique**. On utilise des angles alternes-internes et des angles correspondants pour démontrer, suivant Euclide, que **la somme des angles d'un triangle vaut 180°** (th. 1, p. 80). On démontre ensuite le **théorème du demi-cercle** et sa réciproque. On démontre des alignements par des calculs d'angles. On introduit les symétries centrales et on construit des symétries de figures diverses.

On utilise le symbole d'implication $\Rightarrow$ déjà vu en classe de 6^e, on introduit le nouveau symbole $\Leftrightarrow$, et on expose la notion de **réciproque** et d'équivalence au chap. 6.

En géométrie dans l'espace, on se familiarise avec les droites, les plans, et la notion d'orthogonalité de droites et de plans. On construit des polyèdres à partir du cube, et on vérifie à chaque fois la formule de Descartes-Euler : $s + f = a + 2$

Alors, hardi petits !

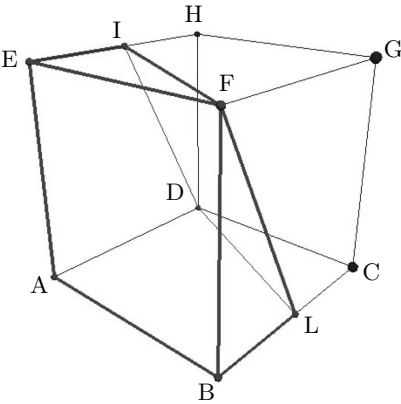


Table des matières

Rappels de quelques résultats	13
1 Équations	15
2 Géométrie plane	17
3 Coordonnées dans le plan	21
4 Géométrie dans l'espace	23
 Classe de cinquième	 25
1 Les entiers relatifs	27
1. L'addition des entiers relatifs	27
2. Opposé et soustraction	28
3. Retour sur l'addition des relatifs	29
4. Distance entre deux points	30
5. Multiplication des entiers relatifs	30
6. Développement d'un produit	31
7. Mise en facteur	32
8. Pour réviser ce chapitre	33
9. Exercices	35
10. Correction des questions	39
11. Correction des exercices	39
2 Arithmétique	45
1. Multiples et diviseurs	45
2. Plus grand commun diviseur	46
3. Plus petit commun multiple	46
4. Exercices	48
5. Correction des questions	50
6. Correction des exercices	51
3 Les nombres rationnels	57
1. Notions de base	57
2. Addition et soustraction	58
3. Multiplication	59

4. Exercices	62
5. Correction des questions	66
6. Correction des exercices	68
4 Géométrie plane	77
1. Médiatrices et cercle circonscrit	77
2. Projection orthogonale	78
3. Complément sur les angles	78
4. Les angles d'un triangle	80
5. Bissectrices et cercle inscrit	81
6. Théorème du demi-cercle	82
7. Parallélogramme	83
8. Symétrie centrale	85
9. Exercices	88
10. Correction des questions	104
11. Correction des exercices	106
5 Géométrie dans l'espace	135
1. Droites et plans	135
2. Pyramide	137
3. Polyèdre	138
4. La perspective conique	138
5. La perspective cavalière	139
6. Exercices	139
7. Correction des questions	145
8. Correction des exercices	145
6 Les implications logiques	149
1. Le symbole $\Rightarrow$	149
2. Implication directe et implication réciproque	150
3. Exercices	150
4. Correction des exercices	152
Index	155

Rappels de quelques résultats