

PHYSIQUE

Mécanique du point

Résumé
de cours

LICENCE
BUT

Exercices
corrigés

Pascal **Clavier**



PHYSIQUE

Mécanique du point

LICENCE
BUT

Pascal Clavier



Du même auteur, chez le même éditeur



Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-118881

Dépôt légal : septembre 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Chapitre 1

Cinématique

A. Définition

Cinématique : C'est l'étude du mouvement d'un point sans considérer les causes du mouvement.

Point : on assimile un solide à un point matériel si ses dimensions sont très petites par rapport à l'échelle d'étude du problème étudié.

Référentiel : un mouvement est décrit par rapport à un solide de référence, muni d'un repère d'espace et de temps qui constitue un référentiel que l'on note $\mathcal{R}$.

Exemple : le référentiel héliocentrique a pour origine le centre du Soleil et les axes sont définis par les directions de trois étoiles éloignées. On l'utilise par exemple pour le mouvement des planètes.

Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de la Terre et les axes sont définis par les directions de trois étoiles éloignées. Il est pratiquement en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique. On l'utilise par exemple pour le mouvement des satellites.

Pour le référentiel terrestre, ou référentiel du laboratoire, le repère est attaché au solide de référence que constitue le laboratoire. Ce référentiel est bien adapté pour une étude locale comme la chute d'une bille par exemple.

Chacun de ces trois référentiels est aussi constitué d'un repère de temps.

Pour décrire un mouvement, il faut toujours préciser le référentiel dans lequel on étudie ce mouvement.

B. Système de coordonnées

1. Base orthonormée

Toute base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sera orthonormée directe.

- ortho : pour indiquer que les vecteurs sont orthogonaux entre eux.
- normée : pour des vecteurs unitaires $\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$.

– direct : on dit que la base est directe si $\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$, ainsi la direction de $\vec{e}_z$ est donnée par la règle du tire-bouchon ou de la main droite. En effet si on tourne de $\vec{e}_x$ vers $\vec{e}_y$ on progresse suivant $\vec{e}_z$.

2. Coordonnées cartésiennes

Soit un point M (x, y, z) et (O, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) le repère choisi avec x l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote.

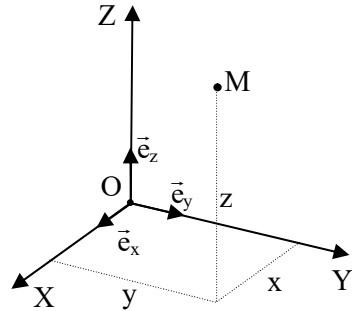
Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Sa norme : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Le déplacement élémentaire du vecteur position est noté :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$



3. Coordonnées polaires

On repère la position du point M par :

- la distance $r = \|\overrightarrow{OM}\|$;
- l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$.

Pour exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ on introduit une base orthonormée directe appelée base polaire ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$) :

- $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire suivant $\overrightarrow{OM}$, c'est le vecteur radial ;
- $\vec{e}_\theta$ est le vecteur unitaire $\perp$ à $\vec{e}_r$, obtenu en effectuant une rotation de $+\pi/2$ à partir de $\vec{e}_r$, c'est le vecteur orthoradial.

La base polaire est une base mobile qui se déplace en même temps que le point M.

Le vecteur position s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r}$$

Dérivées temporelles de $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ (à savoir)

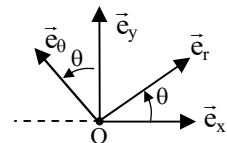
Projection des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans la base $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$.

$$\vec{e}_r = (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x)\vec{e}_x + (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y)\vec{e}_y \Rightarrow$$

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y.$$

$$\vec{e}_\theta = (\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x)\vec{e}_x + (\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_y)\vec{e}_y \Rightarrow \vec{e}_\theta = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y.$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y.$$



On cherche à exprimer : $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ et $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{\mathcal{R}} \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \Rightarrow \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)}{d\theta}\right)_{\mathcal{R}} \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{0} \text{ car les vecteurs sont fixes dans } \mathcal{R}.$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = (-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) \times \dot{\theta}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{\mathcal{R}} \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \Rightarrow \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y)}{d\theta}\right)_{\mathcal{R}} \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = (-\cos\theta\vec{e}_x - \sin\theta\vec{e}_y) \times \dot{\theta}$$

Soit :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ et } \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{e}_r}$$

En fait dériver, revient à effectuer une rotation de $+\pi/2$. $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du mobile en rad.s^{-1} et on la note souvent ω .

4. Coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Si un système physique présente une symétrie cylindrique d'axe Oz, il est préférable d'utiliser les coordonnées cylindriques d'un point M de l'espace.

Le point M se projette dans le plan (xOy), on définit ainsi :

le rayon polaire $r = \text{OI}$ et l'angle polaire $\theta(\overrightarrow{\text{OX}}, \overrightarrow{\text{OI}})$.

On a : $\overrightarrow{\text{OM}} = \overrightarrow{\text{OI}} + \overrightarrow{\text{IM}}$ on en tire le vecteur position :

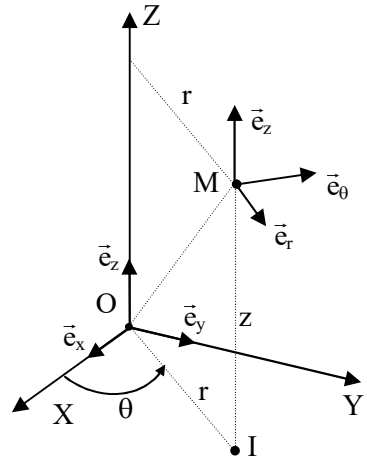
$$\overrightarrow{\text{OM}} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

Le déplacement élémentaire du vecteur position est noté :

$$d\overrightarrow{\text{OM}} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

Lien avec le système cartésien

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r\sin\theta & \Rightarrow & \tan\theta = \frac{y}{x} \\ z & & z & \end{aligned}$$



5. Coordonnées sphériques (r, θ, φ)

Soit un point M quelconque de l'espace, dont les grandeurs physiques dépendent de la distance r au point O, il est bon alors de repérer le point M par ses coordonnées sphériques r, θ, φ . On définit :

– $r = OM$ associé à $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ et $r \in [0, \infty[$;

– l'angle $\theta = (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM})$ associé au vecteur $\vec{e}_\theta$ et $\theta \in [0, \pi]$;

– l'angle $\varphi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OI})$ associé au vecteur $\vec{e}_\varphi$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Lien avec le système cartésien

$$x = OI \cdot \cos \varphi \Rightarrow x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = OI \cdot \sin \varphi \Rightarrow y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = OH \Rightarrow z = r \cdot \cos \theta.$$

Base locale orthonormée directe ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$) :

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$$

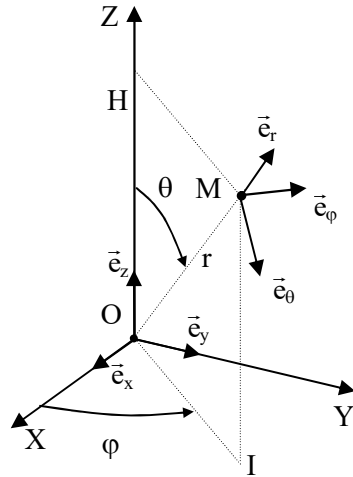
$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y.$$

Attention à ne pas confondre r et θ en sphériques et r et θ en cylindriques, ils ne sont pas définis pareil. De même que $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ de la base sphérique ne sont pas définis comme $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ de la base cylindrique.

Le déplacement élémentaire du vecteur position est noté :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$



C. Vitesse et accélération dans un référentiel $\mathcal{R}$

1. Trajectoire

La trajectoire d'un point matériel M supposé ponctuel dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné représente l'ensemble des positions $M(t)$ en fonction du temps.

Exemples :

- rectiligne : $y = ax + b$;
- circulaire : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, cercle de centre $C(a, b)$ et de rayon R ;
- parabolique : $y = ax^2 + bx + c$.

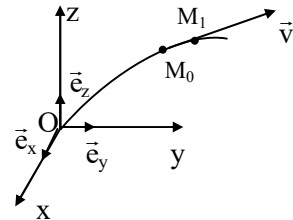
Equation horaire : expressions des coordonnées en fonction du temps qui permettra de représenter l'évolution de cette position ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$).

Equation de la trajectoire : elle s'obtient en éliminant le temps entre les différentes équations horaires.

2. Vitesse

On considère le point M_0 et M_1 qui sont les positions du point M aux instants t et $t + \Delta t$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O . On définit la vitesse par :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overrightarrow{OM_1(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM_0(t)}}{\Delta t} \right)$$



On en déduit que le vecteur vitesse du point mobile M est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

La vitesse s'exprime en m.s^{-1} .

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, son sens est celui du mouvement.

3. Accélération

L'accélération d'un point mobile M dans le référentiel $\mathcal{R}$, est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{v}$ ou la dérivée seconde du vecteur position.

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left(\frac{d\vec{v}_{(M/\mathcal{R})}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} ; \vec{a} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} \quad \text{l'unité est le } \text{m.s}^{-2}$$

La vitesse et l'accélération sont définies par rapport à un référentiel, mais on peut donner son expression vectorielle dans différentes bases.

4. Expression en coordonnées cartésiennes

a) Vitesse

Le vecteur position se note : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$, par dérivation on obtient le vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d(x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z)}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{e}_x + x(t) \frac{d\vec{e}_x}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{e}_y + y(t) \frac{d\vec{e}_y}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{e}_z + z(t) \frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

Comme les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont fixes dans $\mathcal{R}$, leur dérivée par rapport au temps est égal au vecteur nul.

$$\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz(t)}{dt} \vec{e}_z$$

La dérivée d'une grandeur par rapport au temps se note : $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$.

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z}$$

$\dot{x}$ (ou $v_x(t)$) est la composante du vecteur vitesse selon $\vec{e}_x$, c'est une grandeur algébrique qui est positive si le mouvement a lieu dans le sens du vecteur $\vec{e}_x$, négative si le mouvement a lieu dans le sens opposé au sens du vecteur $\vec{e}_x$.

b) Accélération

L'accélération est la dérivée du vecteur vitesse :

Soit : $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$, alors $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z$ que l'on note aussi :

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z}$$

5. Expression en coordonnées polaires

a) Vitesse

Le vecteur position se note : $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$, par dérivation on obtient le vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

Soit comme $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$:

$$\boxed{\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta}$$

On nomme :

- v_r la vitesse radiale ;
- v_θ la vitesse orthoradiale.

b) Accélération

Soit $\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$, on dérive pour obtenir l'accélération :

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + \dot{r} \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \dot{\theta} \frac{dr}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

Soit comme $\left(\frac{d\vec{e}_0}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{e}_r : \vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_0 + \dot{\theta}\dot{r}\vec{e}_0 + r\ddot{\theta}\vec{e}_0 + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r)$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_0}$$

On nomme :

- a_r l'accélération radiale ;
- a_θ l'accélération orthoradiale.

On peut noter : $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}$.

6. Expression en coordonnées cylindriques

A l'expression des vecteurs vitesse et accélération, il nous suffit d'ajouter respectivement la dérivée première de $z(t)$ et la dérivée seconde de $z(t)$:

$$\boxed{\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z}$$

Avec v_z la vitesse axiale et a_z l'accélération axiale.

7. Expression en coordonnées sphériques

Pour exprimer le vecteur vitesse on peut utiliser l'expression du déplacement élémentaire du vecteur $\overline{OM}$: $d\overline{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi}\vec{e}_z}$$

Ou bien on dérive le vecteur position $\overline{OM} = r\vec{e}_r$:

$$\vec{v} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Dans ce cas il faut exprimer $\vec{e}_r$ en coordonnées cartésiennes car la base sphérique est en rotation autour de 2 axes.

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r \frac{d(\sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z)}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}(\cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z) + r\dot{\varphi}(-\sin \theta \sin \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_y)$$

Soit en utilisant les expressions établit dans la partie coordonnées sphériques :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$$

Le calcul de l'accélération est plus complexe dans le cas général :

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi \quad \text{avec}$$

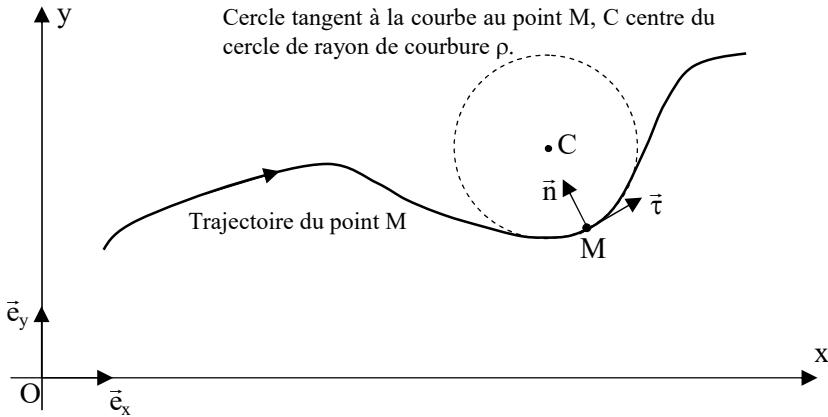
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin \theta$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta.$$

8. Base de Frenet

Pour l'étude d'un mouvement plan, on utilise la base de Frenet. La trajectoire du mobile est orientée dans le sens du déplacement, chaque point $M(t)$ étant repéré par son abscisse curviligne $s(t)$. On attache au point M , un couple de vecteurs unitaires $(\vec{\tau}, \vec{n})$ où $\vec{\tau}$ est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{\tau}$ et dirigé dans le sens de la concavité de la trajectoire.



La vitesse du mobile M est donnée par la dérivée de l'abscisse curviligne $s(t)$, le vecteur vitesse étant tangent à la trajectoire :

$$\vec{v}(t) = \frac{ds(t)}{dt} \vec{\tau} \text{ ou } \vec{v}(t) = v(t) \vec{\tau}$$

Accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau} + v(t) \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

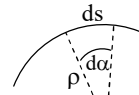
$$\text{Dérivée d'une fonction composée : } \frac{df[x(t)]}{dx} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

$$\vec{a} = \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau} + v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

Et $\frac{d\vec{\tau}}{\rho d\alpha} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, $\vec{\tau}$ étant unitaire sa dérivée est un vecteur perpendiculaire.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}} \text{ ou } \boxed{\vec{a} = a_t \vec{\tau} + a_n \vec{n}}$$

a_t est l'accélération tangentielle et a_n l'accélération normale toujours positive et dirigée vers la concavité.



On a $ds = \rho d\alpha$.

Le rayon de courbure est donné par :

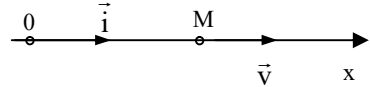
$$\rho = \frac{v^3}{\|\vec{a} \cdot \vec{v}\|}$$

D. Les mouvements classiques

1. Mouvement rectiligne uniforme

Un point est animé d'un mouvement rectiligne uniforme si et seulement si son vecteur vitesse reste constant.

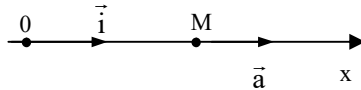
L'accélération est alors nulle : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$.



$\vec{v} = v \vec{i}$; $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} \Rightarrow x(t) = vt + x_0$; x_0 est l'abscisse à l'origine.

2. Mouvement rectiligne uniformément varié

Le vecteur accélération est constant, il est tangent à la trajectoire.



$\vec{a} = a \vec{i}$; $a = \frac{dv}{dt} = \text{constante}$.

$v = at + \text{cte}$, la constante (cte) est déterminée à partir des conditions initiales.

À $t = 0$, $v = v_0 \Rightarrow v = at + v_0$.

$v = \frac{dx}{dt} = at + v_0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + \text{cte}$, à $t = 0$, $x = \text{cte} = x_0$.

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

Cette relation, ainsi que celle donnant l'expression de la vitesse permettent d'établir une relation entre x et v :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0).$$

Un mouvement est dit accéléré si la norme de sa vitesse augmente au cours du temps (le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$).

Un mouvement est dit retardé si la norme de sa vitesse diminue au cours du temps (le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$).

3. Mouvement circulaire

Un mobile M décrit un cercle de rayon R et de centre O à la vitesse angulaire ω

$$\left(\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \right)$$

Coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$

Expression de la vitesse :

$$\boxed{\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta}$$

Expression de l'accélération :

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \Rightarrow \vec{a} = \omega \frac{dR}{dt} \vec{e}_\theta + R \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_\theta + R\omega \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \Rightarrow \vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_r + R\dot{\omega} \vec{e}_\theta}$$

Mouvement circulaire uniforme :

La vitesse angulaire est constante, alors : $v = R\omega$ et $a = R\omega^2$.

Coordonnées curvilignes :

On associe la base orthonormée $(\vec{\tau}, \vec{n})$ à la trajectoire circulaire plane.

Expression de la vitesse : $s = R\theta$, $\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} \Rightarrow \vec{v} = R\omega \vec{\tau}$

L'accélération au point M se note : $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$

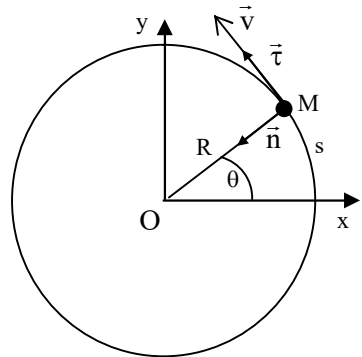
$\vec{a}_n = a_n \vec{n}$: accélération normale $a_n = \frac{v^2}{R}$.

$\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau}$: accélération tangentielle $a_\tau = \frac{dv}{dt}$.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{n} + \frac{dv}{dt} \vec{\tau}}$$

R est le rayon de courbure. Si R est constant, nous avons une trajectoire circulaire, si R tend vers l'infini, la trajectoire devient rectiligne.

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.



Mouvement circulaire uniforme

Un point (S) est en mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire est un cercle et si le module du vecteur vitesse est constant.

$\vec{n}$ et $\vec{\tau}$ définissent la base de Frenet.

Le vecteur vitesse a pour caractéristiques :

- direction : tangente à la trajectoire ;
- sens : celui du mouvement ;
- norme : $v = R\omega$ où ω est la vitesse angulaire en rad.s^{-1} et R le rayon du cercle.

$\vec{v} = v \vec{\tau}$ avec $\vec{\tau}$ vecteur unitaire tangent à la trajectoire. Le vecteur vitesse n'est pas constant car sa direction varie au cours du temps, par contre sa norme est constante.

Le vecteur accélération a pour caractéristiques :

- direction : normale à la trajectoire ;
- sens : dirigé vers le centre O du cercle, on dit alors que l'accélération est centripète ;
- norme : $a_n = \frac{v^2}{R}$ en m.s^{-2} et $a_\tau = 0$.

Enoncés des exercices

Exercice 1

Dans un référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un point M se déplace selon les équations horaires suivantes :

- a) $x(t) = t + 1$; $y(t) = t^2 + 1$; $z(t) = 0$.
- b) $x(t) = 3 \cos t$; $y(t) = 3 \sin t$; $z(t) = 0$.

Donner dans chaque cas l'équation de la trajectoire de M et en déduire sa nature.

Exercice 2

On considère un mobile M animé d'un mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon $R = 2,0$ m et de vitesse angulaire $\omega = 4,0 \text{ rad.s}^{-1}$.

1. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, $\theta = 0$. Donner l'équation horaire de l'écart angulaire θ .
2. On choisit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que l'axe Ox passe par la position du mobile M à l'instant $t = 0$.
 - Faire un schéma, représentant le mobile M à l'instant $t = 0$ et à un instant t quelconque.
 - Etablir les expressions des coordonnées x et y du point M.
 - Etablir l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ dans ce repère.
3. Calculer les valeurs de :
 - de la norme du vecteur vitesse v du mobile ;
 - de la norme du vecteur accélération a ;
 - de la période de révolution T ;
4. Exprimer dans la base $\vec{i}, \vec{j}$ les vecteurs unitaires $\vec{t}$ et $\vec{n}$ et exprimer les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en fonction de $\vec{t}$ et $\vec{n}$.

Exercice 3

Une voiture de longueur $AA' = 4$ m, roulant à 108 km.h^{-1} , souhaite doubler un véhicule BB' de longueur identique, roulant à la même vitesse et situé à 8 m d'elle.

Lorsque l'avant A de la voiture atteint un point O de la route, elle acquiert une accélération constante de 2 m.s^{-2} .

Dans combien de temps A arrivera-t-elle à la hauteur de B ? Quelle distance A aura-t-elle parcourue ? Quelle vitesse aura-t-elle alors ?

Exercice 4

Un point matériel M se déplace sur l'axe OX avec une accélération $\vec{a} = a\vec{i}$ avec $a > 0$.

1. Déterminer le vecteur vitesse sachant que $v(t=0) = v_0$.
2. Déterminer le vecteur position $\vec{OM}$ sachant que $x(t=0) = x_0$.
3. Montrer que $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$.
4. Quelle est la condition que doit vérifier $\vec{a} \cdot \vec{v}$ pour que le mouvement soit uniformément accéléré ? retardé ?

Exercice 5

Une personne est située au sommet d'un immeuble, il lance une balle vers le ciel, à la verticale, avec une vitesse initiale de $24,5 \text{ m.s}^{-1}$. La balle retombe sur le sol 6,0 s plus tard. L'accélération de la balle vaut $a = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

1. Quelle est la hauteur de l'immeuble ?
2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?
3. On reproduit l'expérience, mais cette fois on lâche sans vitesse initiale du haut de cet immeuble une seconde balle 4 s après la première.
A quelle altitude z , les deux balles se rejoignent ? On cherchera d'abord à quelle date elles se rencontrent.

Exercice 6

Distance nécessaire pour s'arrêter sur une ligne droite horizontale

La sécurité routière insiste fortement sur le respect de distances minimales entre les véhicules afin qu'en cas d'incident imprévu, tout véhicule puisse s'arrêter sans danger.

Sur autoroute, près des deux tiers des conducteurs ne respectent pas la distance de sécurité entre leur voiture et le véhicule qui les précède. Garder ses distances avec le véhicule que l'on suit est pourtant le meilleur moyen d'éviter une collision ou pire un carambolage.

La distance d'arrêt d'un véhicule correspond à la distance parcourue pendant le temps de réaction de son conducteur à laquelle s'ajoute la distance de freinage.

– Temps de réaction noté t_R : on évalue à une seconde le temps minimum nécessaire pour que le conducteur réagisse en cas d'incident ou d'apparition d'un obstacle et ce, dans les meilleures conditions. Pendant ce temps-là, le véhicule continue sa course. Ce n'est qu'une fois l'information assimilée que le conducteur commence vraiment à freiner.

– Distance de freinage : sa longueur varie en fonction de la vitesse du véhicule, de l'efficacité du système de freinage, de la pente, ...

Le Code de la Route a fixé une règle claire : l'intervalle de sécurité à ménager entre vous et le véhicule qui vous précède est au moins la distance que vous parcourez en 2 secondes. Plus votre vitesse est élevée, plus cette distance doit être grande.

Pour les véhicules lourds (PTAC > 3,5 t) ou ceux dont la longueur dépasse 7 mètres, les ensembles de véhicules (voiture + caravane) et les camping-cars, cette distance est d'au moins 50 mètres.

Comment évaluer la bonne distance de sécurité ? Prenez un point de repère visuel sur le bord de la route comme un arbre ou un panneau de signalisation. Une fois que le véhicule qui vous précède est passé à sa hauteur, comptez 2 secondes. Si votre véhicule passe ce repère avant ce délai, vous êtes trop près.

Autre astuce : sur autoroute, les lignes délimitant la bande d'arrêt d'urgence mesurent 39 mètres et sont espacées entre elles de 13 mètres. A 130 km.h^{-1} , vous devez au moins laisser un intervalle de 2 traits soit environ 90 mètres pour arrêter votre véhicule sans percuter celui qui vous précède.

On considère un véhicule roulant sur une route rectiligne horizontale Ox à la vitesse v_0 prise égale pour l'instant à 130 km.h^{-1} avec un mouvement uniforme. On notera $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire de l'axe Ox dans le sens du déplacement.

On prendra l'origine des temps à l'instant où un obstacle a surgi et celle de l'espace à la position initiale (pour $t = 0$).

Pour les applications numériques, on prendra $t_R = 1,0 \text{ s}$.

1. Rappeler la définition d'un mouvement rectiligne puis d'un mouvement uniforme.
2. Lorsqu'un obstacle sur la voie apparaît au conducteur, la première phase du mouvement vers l'immobilisation correspond au temps de réaction t_R . Que peut-on dire de la nature du mouvement au cours de cette phase ? En déduire l'expression de la vitesse au cours du temps pour cette phase.
3. La seconde correspond au freinage proprement dit. Par souci de simplification, on considère que le freinage consiste à imposer une décélération a_0 constante. Si on suppose que $a_0 > 0$, donner l'expression du vecteur accélération au cours du temps puis celle du vecteur vitesse.
4. En déduire la position $x(t)$ du véhicule en fonction du temps.
5. Déterminer l'instant t_1 pour lequel le véhicule s'arrête. En déduire la distance d'arrêt d_a en fonction de v_0 , a_0 et t_R .
6. Exprimer puis calculer la valeur minimale de la décélération permettant d'utiliser les lignes de la bande d'arrêt d'urgence pour évaluer la distance de sécurité c'est-à-dire pour que la distance d'arrêt soit inférieure à la distance D des deux lignes de la bande d'arrêt d'urgence.
7. Pour une valeur de décélération $a_0 = 12 \text{ m.s}^{-2}$, comparer les temps d'arrêt et les distances d'arrêt pour des vitesses respectivement de 90 et 130 km.h^{-1} . Les résultats sont-ils logiques ?
8. Pour déterminer la validité de la règle préconisée par le Code de la Route de maintenir une distance par rapport au véhicule devant soi correspondant à la distance parcourue en 2,0 s, calculer la décélération a_2 qui permettrait un arrêt du véhicule à l'instant $t_2 = 2,0 \text{ s}$. Retrouve-t-on la même distance d'arrêt qu'avec la technique précédente pour une vitesse initiale de 130 km.h^{-1} ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 7

Dans un plan xOy de base orthonormée $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, un point matériel M décrit la spirale logarithmique $r = r_0 e^{\theta}$ avec une vitesse angulaire ω constante où $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$. A l'instant initial le point M est sur l'axe Ox à une distance r_0 de l'origine O .

1. Déterminer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point M .
2. En exprimant $\vec{v} \wedge \vec{a}$ dans la base de Frenet :
 - a) Montrer que le rayon de courbure ρ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}$$

- b) En déduire son expression en fonction de r_0 .

Exercice 8

Un point matériel M est animé d'un mouvement défini par les équations horaires suivantes en coordonnées cartésiennes :

$$x = r \cos(\omega t) ; y = r \sin(\omega t) ; z = b \omega t \quad (r \text{ et } \omega \text{ constant}) \text{ et } \theta = \omega t$$

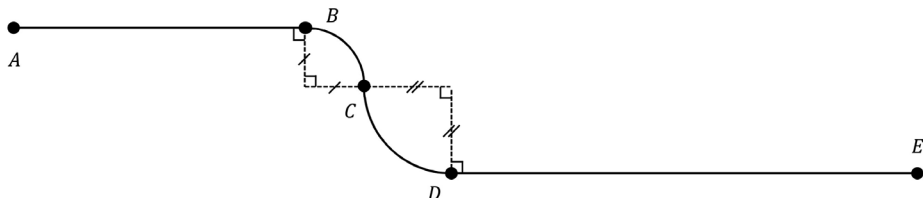
1. Etablir l'équation de la trajectoire du point M .
Montrer que la trajectoire du point M est une hélice, faire un schéma.
2. Exprimer avec les coordonnées cartésiennes le vecteur vitesse et accélération, puis calculer leur module.
3. Calculer le pas de cette hélice.
4. Calculer $\vec{v} \cdot \vec{a}$. Commenter.
5. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique.
6. Exprimer le vecteur vitesse et accélération dans cette base et vérifier que leur module correspond au résultat de la question 2.
7. Montrer que le vecteur vitesse fait un angle α constant avec le plan (Ox, Oy) .
8. Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 9

On étudie un mobile M_a , assimilé à un point matériel (ou corpuscule), en mouvement uniforme dans le référentiel du laboratoire à la vitesse de 25 cm.s^{-1} , sur une piste qui comporte quatre portions :

- un segment rectiligne AB de longueur 1 m ;
- un quart de cercle BC de longueur 50 cm ;
- un quart de cercle CD de longueur 75 cm ;
- un segment rectiligne DE de longueur 2 m .

La piste est parcourue par M_a de A vers E :



1. Quelle durée τ met M_a pour parcourir la totalité de la piste (de A à E) ?
2. On note a_1 la norme de l'accélération de M_a sur la portion BC. Que vaut a_1 ?
3. On note a_2 la norme de l'accélération de M_a sur la portion CD. Quelle relation existe-t-il entre a_1 et a_2 ?
4. Lorsque M_a atteint le point D, à un instant pris comme origine temporelle, un second mobile M_b (également assimilé à un point matériel) quitte E en direction de D. Son mouvement est uniforme dans le référentiel du laboratoire à la vitesse de 50 cm.s^{-1} . A quelle date t_r les deux mobiles se rencontrent-ils ?
5. Quelle est alors la distance d_a parcourue par M_a sur la piste DE ?
6. Quelle était, $1/5 \text{ s}$ avant la rencontre, la distance d séparant M_a et M_b ?

Partiel

Exercice 1

Dans le système de coordonnées cylindriques, donner les expressions des grandeurs suivantes.

1. Le vecteur déplacement $\overrightarrow{OM}$.
2. Le vecteur vitesse $\vec{v}$.
3. Le vecteur accélération $\vec{a}$.
4. Le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$.

Exercice 2

On considère une courbe C, sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne $s(t)$. La vitesse du point M dans $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ est $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ de

module $v = \frac{ds(t)}{dt}$. On définit la base de Frenet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ telle que : $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = v\vec{t}$.

1. Que désignent les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$.
2. Exprimer l'accélération $(\vec{a}(M/\mathcal{R}))$ du point M. On notera ρ le rayon de courbure de la trajectoire de C au point M.
3. Exprimer ρ en fonction de $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{a}(M/\mathcal{R})$.

Exercice 3

Une barre rectiligne AB de longueur $2b$ se déplace dans le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de telle sorte que (fig. 1 et 2) :

- son extrémité A se trouve sur le demi-axe positif Oz ;
- son extrémité B décrit le demi-cercle du plan (xOy) de centre I (O, b, O) et de rayon b, à la vitesse angulaire ω constante et positive.

A l'instant $t = 0$, B se trouve en O.

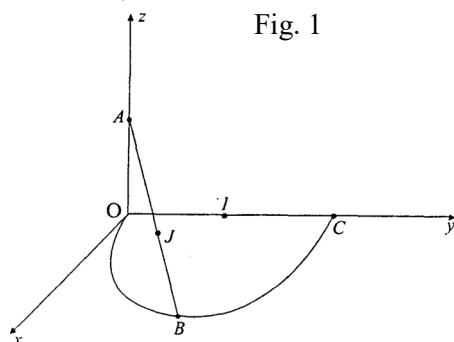


Fig. 1

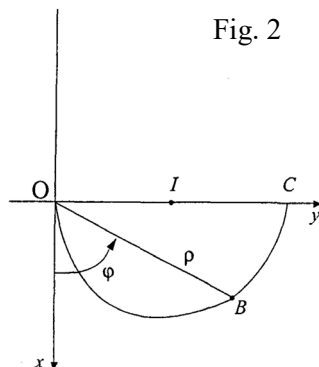


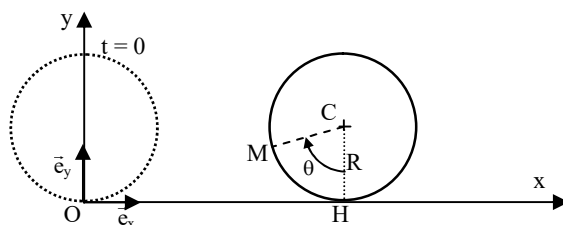
Fig. 2

1. Déterminer la durée T du mouvement.
2. Etablir les expressions en fonction du temps t des coordonnées polaires ρ et ϕ de B.
3. Déterminer l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ et décrire le mouvement de la barre.
4. Calculer les coordonnées cartésiennes X, Y et Z du milieu J de la barre.
5. Déterminer la valeur moyenne $\langle v^2 \rangle$ du carré de la vitesse v de J , calculée sur la durée T du mouvement.
6. Indiquer la nature du mouvement de J .

Exercice 4

On s'intéresse à la trajectoire et aux grandeurs cinématiques (vitesse, accélération) de la valve d'une roue (centre C, rayon R) de vélo dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. Cette valve est assimilée à un point M (figure ci-dessous). Le mouvement de M est analysé dans $\mathcal{R}$; on suppose qu'il s'effectue dans le plan Oxy, où O est l'origine du repère cartésien dont la base est $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ étant des vecteurs unitaires ; x et y désignent respectivement les coordonnées cartésiennes de M. La roue roule sans glisser le long de l'axe Ox avec une vitesse constante $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ et $\theta(t) = \omega t$. A l'instant $t = 0$, la valve est en O.

1. Justifier la relation $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overline{OC}$ et $\overline{CM}$ dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de R et ωt .



3. Exprimer le vecteur position du point M, $\overrightarrow{OM}$. Tracer la courbe représentative de la trajectoire de M.
4. Quelle est l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de M dans $\mathcal{R}$?
5. Déduire la norme $v = \|\vec{v}\|$ du vecteur vitesse. Pour quelle phase de la trajectoire le mouvement de M est-il accéléré ? Pour quelle phase est-il décéléré ?
6. Quelle est l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ de M et sa norme dans $\mathcal{R}$? Comment est orienté le vecteur accélération tout au long du mouvement ?
7. Représenter le vecteur vitesse à un instant t quelconque et pour $\theta = \pi$.
8. On suppose désormais que $0 \leq \omega t \leq 2\pi$. Déduire de la question 4 et 5 l'expression du vecteur $\vec{\tau}$, vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M dans le référentiel $\mathcal{R}$ et dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
9. Calculer $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ puis $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ et dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, où s désigne l'abscisse curviligne de M.
10. En déduire l'expression du rayon de courbure ρ de la trajectoire dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Corrigés des exercices

Corrigé 1

a) Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps entre les composantes :

$$x(t) = t + 1 \Rightarrow t = x(t) - 1.$$

$$\text{On reporte dans } y(t) : y(t) = (x - 1)^2 + 1 \Rightarrow y(t) = x^2 - 2x + 2.$$

L'équation obtenue est de la forme $y = ax^2 + bx + c$, on en déduit que la nature de la trajectoire est parabolique.

b) On élève au carré les expressions de $x(t)$ et $y(t)$:

$$x^2 = 9\cos^2 t \text{ et } y^2 = 9\sin^2 t \text{ comme } \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \text{ il vient :}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$$

L'équation est de la forme $x^2 + y^2 = R^2$, c'est l'équation d'un cercle. La trajectoire est donc un cercle de centre $C(0, 0)$ et de rayon $R = 3$ m.

Corrigé 2

1. la vitesse angulaire est définie par : $\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta = \omega t + \text{cte.}$

La cte (constante) se détermine à partir des conditions initiales :

$$\text{A } t = 0, \theta = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0, \text{ d'où :}$$

$$\boxed{\theta = \omega t ; \theta = 4t}$$

2. Expressions des coordonnées :

$$\vec{x} = R \cos \theta \vec{i} \Rightarrow \vec{x} = R \cos \omega t \vec{i}$$

$$\vec{y} = R \sin \theta \vec{j} \Rightarrow \vec{y} = R \sin \omega t \vec{j}$$

Expression du vecteur vitesse :

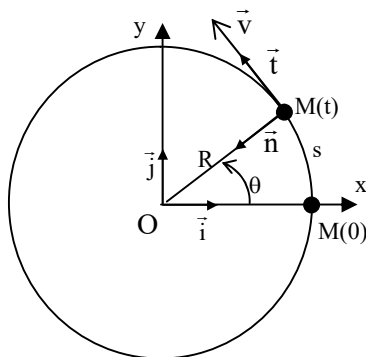
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\vec{v} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega R \sin \omega t \\ \frac{dy}{dt} = \omega R \cos \omega t \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v} = -\omega R \sin \omega t \vec{i} + \omega R \cos \omega t \vec{j}}$$

Expression du vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j}$$



$$\vec{a} = -R\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t \vec{j}$$

3. Norme des vecteurs :

$$\|\vec{v}\| = v\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v = \sqrt{(-\omega R \sin \omega t)^2 + (\omega R \cos \omega t)^2} \Rightarrow$$

$$v = R\omega \text{ soit } v = 8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\|\vec{a}\| = a\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow a = \sqrt{(-\omega^2 R \sin \omega t)^2 + (-\omega^2 R \cos \omega t)^2} \Rightarrow$$

$$a = R\omega^2 \text{ soit } a = 32 \text{ m.s}^{-2}$$

Période de révolution : 1 tour, $\theta = 2\pi$ soit : $T = \frac{2\pi}{\omega}$. $T = 1,5 \text{ s}$.

4. Expression de $\vec{n}$ et $\vec{t}$:

$$\vec{n} = -\cos \omega t \vec{i} - \sin \omega t \vec{j}$$

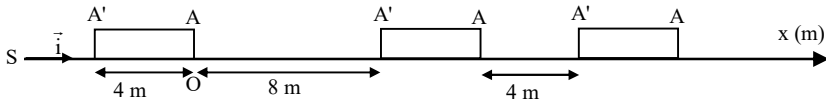
$$\vec{t} = -\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j}$$

$$\vec{v} = R(-\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j}) \Rightarrow \vec{v} = R\omega \vec{t} \text{ le vecteur est tangent à la trajectoire.}$$

$$\vec{a} = -R\omega^2 (\cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j}) \Rightarrow \vec{a} = R\omega^2 \vec{n} \text{ l'accélération est centripète.}$$

Corrigé 3

Schéma :



Soit S un point fixe de la route.

De S à O, la vitesse est constante $v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m.s}^{-1}$.

A partir de O, elle accélère de façon constante.

Vitesse de l'avant de la voiture (point A) par rapport à S :

$$\vec{v}_{A/S} = \frac{d\vec{SA}}{dt} \text{ or } \vec{SA} = \vec{SB} + \vec{BA} \Rightarrow \vec{v}_{A/S} = \frac{d\vec{SB}}{dt} + \frac{d\vec{BA}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_{A/S} = \frac{d\vec{SB}}{dt} - \frac{d\vec{AB}}{dt}$$

$$\vec{v}_{A/S} = \vec{v}_{B/S} + \vec{v}_{A/B} \text{ ou } \vec{v}_{A/S} = \vec{v}_{B/S} - \vec{v}_{B/A} \Rightarrow \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_{B/S} - \vec{v}_{A/S}$$

Le véhicule B a une vitesse constante : $\vec{v}_{B/S} = 30\vec{i}$

Le véhicule A accélère de façon constante depuis O : $\vec{v}_{A/S} = 30\vec{i} + at\vec{i}$

$$\vec{v}_{B/A} = 30\vec{i} - at\vec{i} - 30\vec{i} \Rightarrow \vec{v}_{B/A} = -at\vec{i} = -2t\vec{i}$$

$$x_{B/A} = -t^2 + x_0 \text{ soit avec } x_0 = 12 \text{ m (du point O=A au point B)}$$

$$x_{B/A} = -t^2 + 12$$

Le point A va coïncider avec le point B à $x_{B/A} = 0$, soit : $-t^2 + 12 = 0$

$$t = \sqrt{12} \Rightarrow t = 3,5 \text{ s}$$

La distance parcourue par A est alors de : $x = t^2 + 30t$

$$x = 117 \text{ m}$$

La vitesse sera de : $v = 2t + 30 = 37 \text{ m.s}^{-1}$ (environ 133 km/h).

Corrigé 4

1. Vecteur vitesse :

A l'instant $t = 0$, $v(0) = v_0$. $v = \int_0^t a dt \Rightarrow v = at + v_0$

$$\vec{v} = (at + v_0) \vec{i}$$

2. Vecteur position :

A l'instant $t = 0$, $x(0) = x_0$. $x = \int_0^t (at + v_0) dt \Rightarrow x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x} = \left(\frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \right) \vec{i}$$

3. On exprime le temps t : $t = \frac{v - v_0}{a}$ soit en le reportant dans l'expression de x :

$$x = \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + x_0 \Rightarrow x - x_0 = \frac{(v - v_0)^2}{2a} + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right)$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v - v_0}{a} \right) \left(\frac{(v - v_0)}{2} + v_0 \right) \Rightarrow x - x_0 = \left(\frac{v - v_0}{a} \right) \left(\frac{v + v_0}{2} \right)$$

$$2a(x - x_0) = (v - v_0)(v + v_0)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

4. Un mouvement est dit accéléré si la norme de sa vitesse augmente au cours du temps (le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$).

Un mouvement est dit retardé si la norme de sa vitesse diminue au cours du temps (le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$).

Corrigé 5

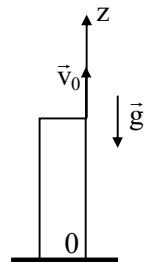
1. Le mouvement de la balle est rectiligne uniformément varié.

Equation de la trajectoire :

$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow a = -g \text{ on intègre } \Rightarrow v(t) = -gt + cte \quad (\text{à } t = 0 \text{ } v = v_0 \Rightarrow cte = v_0)$$

$$v(t) = -gt + v_0 \text{ on intègre } \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + z_0$$

z_0 correspond à la hauteur h de l'immeuble.



$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0 \Rightarrow z_0 = h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \text{ à } t = 6,0 \text{ s } (z = 0)$$

La balle touche le sol à $t = 6 \text{ s}$, soit :

$$h = -\frac{1}{2}9,8 \times 6,0^2 + 24,5 \times 6,0$$

$$\boxed{h = 29,4 \text{ m}}$$

2. La balle atteint sa hauteur maximale lorsque la vitesse s'annule, soit pour un temps $t = t_1$:

$$v(t) = -gt_1 + v_0 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} \text{ que l'on reporte dans l'équation de } z(t) :$$

$$z(t_1) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) + h \Rightarrow z(t_1) = \frac{v_0^2}{2g} + h$$

$$\text{Application numérique : } z(t_1) = \frac{24,5^2}{2 \times 9,8} + 29,4$$

$$\boxed{z(t_1) = 60 \text{ m}}$$

3. Au bout de 4 s, la hauteur atteinte par la première balle vaut :

$$z(t = 4) = -\frac{1}{2} \times 9,8 \times 4^2 + 24,5 \times 4 + 29,4 \Rightarrow z(t = 4) = 49 \text{ m.}$$

La vitesse est alors de : $v(t = 4) = -9,8 \times 4 + 24,5 = -14,7 \text{ m.s}^{-1}$.

On écrit les deux équations de trajectoire des balles 1 et 2 en prenant comme origine des temps le moment où l'on a lâché la balle 2.

$$z_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0t + h_1 \text{ avec } h_1 = 49 \text{ m et } v_0 = -14,7 \text{ m.s}^{-1} \text{ et}$$

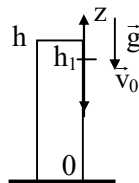
$$z_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

$$\text{On a } z_1(t) = z_2(t) \Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow t = \frac{h - h_1}{v_0}$$

$$\text{Application numérique : } t = \frac{29,4 - 49}{-14,7} \Rightarrow t = 1,33 \text{ s.}$$

$$\text{A } t = 1,33 \text{ s, } z_2(t) = -\frac{1}{2} \times 9,8 \times 1,33^2 + 29,4$$

$$\boxed{z_2(1,33) \approx 21 \text{ m}}$$



Corrigé 6

1. Un mouvement est rectiligne si sa trajectoire est une droite. Il est dit uniforme si la norme du vecteur vitesse est constante.

2. Pendant le temps de réaction, il n'y a aucune action du conducteur, le mouvement reste donc identique (rectiligne uniforme). Entre $0 \leq t \leq t_R$, l'expression de la vitesse est :

$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$$

3. La décélération est constante : $\vec{a} = -a_0 \vec{e}_x$.

L'expression de la vitesse s'obtient en projetant le vecteur accélération sur l'axe Ox et en intégrant :

$$\ddot{x} = -a_0 \Rightarrow \dot{x} = v = -a_0 t + cte$$

La constante cte, se détermine pour le temps $t = t_R$ ($v = v_0$) :

$$v(t_R) = v_0 = -a_0 t_R + cte \Rightarrow cte = v_0 + a_0 t_R \text{ soit :}$$

$$v(t) = -a_0(t - t_R) + v_0$$

4. Position du véhicule :

Entre $t = 0$ et $t = t_R$, $x(t) = v_0 t$ (puisque $x(0) = 0$).

Pour $t > t_R$, on intègre l'expression de $v(t)$: $x(t) = -\frac{a_0}{2}(t - t_R)^2 + v_0 t + cte$.

La constante cte s'obtient en utilisant la continuité de la position, soit :

$$\text{En } t = t_R, x(t_R) = v_0 t_R = v_0 t_R + cte \Rightarrow cte = 0, \text{ d'où :}$$

$$x(t) = -\frac{a_0}{2}(t - t_R)^2 + v_0 t$$

5. Le véhicule s'arrête en $t = t_1$: $v(t_1) = 0 = -a_0(t_1 - t_R) + v_0 \Rightarrow$

$$t_1 = \frac{v_0}{a_0} + t_R$$

On en déduit la distance d'arrêt : $x(t_1) = d_a = -\frac{a_0}{2}(t_1 - t_R)^2 + v_0 t_1$ soit :

$$d_a = -\frac{a_0}{2} \left(\frac{v_0}{a_0} + t_R - t_R \right)^2 + v_0 \left(\frac{v_0}{a_0} + t_R \right)$$

$$d_a = \frac{v_0^2}{2a_0} + v_0 t_R$$

6. On désire que $d_a < D$, soit : $\frac{v_0^2}{2a_0} + v_0 t_R < D$

$$a_0 > \frac{v_0^2}{2(D - v_0 t_R)}$$

Application numérique : $v_0 = 130 \text{ km.h}^{-1} = \frac{130}{3,6} \text{ m.s}^{-1}$.

$$a_0 > \frac{(130/3,6)^2}{2(90 - (130/3,6) \times 1,0)} \Rightarrow a_0 > 12 \text{ m.s}^{-2}$$

7. Temps d'arrêts :

$$\text{Pour } v = 90 \text{ km/h : } t_1 = \frac{90/3,6}{12} + 1,0 \Rightarrow t_1 = 3,1 \text{ s.}$$

$$\text{Pour } v = 130 \text{ km/h : } t_1 = \frac{130/3,6}{12} + 1,0 \Rightarrow t_1 = 4,0 \text{ s.}$$

$$\text{Distance d'arrêt : } d_a = \frac{v_0^2}{2a_0} + v_0 t_R$$

$$\text{Pour } v = 90 \text{ km/h : } d_a = \frac{(90/3,6)^2}{2 \times 12} + \frac{90}{3,6} \Rightarrow d_a = 51 \text{ m.}$$

$$\text{Pour } v = 130 \text{ km/h : } d_a = \frac{(130/3,6)^2}{2 \times 12} + \frac{130}{3,6} \Rightarrow d_a = 90 \text{ m.}$$

Résultats logiques (heureusement), on double presque la distance d'arrêt en passant de 90 à 130 km/h, d'où l'importance de bien faire attention à sa vitesse.

8. Distance parcourue en 2 s ($t_R + t_{\text{freinage}}$), donc $t_{\text{freinage}} = 1 \text{ s}$ puisque $t_R = 1 \text{ s}$.

Le véhicule s'arrête au bout de 2 s ($v = 0$), on a :

$$0 = -a_0(t_R + t_{\text{freinage}} - t_R) + v_0 \Rightarrow a_0 = \frac{v_0}{t_{\text{freinage}}} \text{ soit } a_0 = 36 \text{ m.s}^{-2}.$$

$$\text{On trouve une distance d'arrêt de : } d_a = \frac{(130/3,6)^2}{2 \times 36} + \frac{130}{3,6} \Rightarrow d_a = 54 \text{ m.}$$

On trouve une distance d'arrêt inférieure, mais la décélération est importante, et le temps de total de réaction et freinage, est t-il toujours de 2 s ? Donc en fait il faut être vigilant et respecter les distances de sécurité.

Corrigé 7

1. Expression du vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = r_0 e^{\theta} \vec{e}_r$

$$\text{Vecteur vitesse : } \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr_0}{dt} e^{\theta} \vec{e}_r + r_0 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r + r_0 e^{\theta} \frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad (\theta = \omega t)$$

$$\boxed{\vec{v} = r_0 \omega e^{\omega t} \vec{e}_r + r_0 \omega e^{\omega t} \vec{e}_\theta}$$

$$\text{Vecteur accélération : } \vec{a} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = r_0 \omega \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_r + r_0 \omega e^{\omega t} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + r_0 \omega \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_\theta + r_0 \omega e^{\omega t} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = r_0 \omega^2 \vec{e}_r + r_0 \omega^2 e^{\omega t} \vec{e}_\theta + r_0 \omega^2 \vec{e}_\theta - r_0 \omega^2 e^{\omega t} \vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{a} = 2r_0 \omega^2 e^{\omega t} \vec{e}_\theta}$$

2. a) Expression du produit vectoriel dans la base de Frenet :

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} v & a_t \\ 0 & v^2 / \rho \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ v^3 / \rho \end{vmatrix}$$

Il vient : $\|\vec{v} \wedge \vec{a}\| = \frac{v^3}{\rho}$ soit :

$$\rho = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}$$

$$b) \vec{v} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} r_0 \omega e^{\omega t} & 0 \\ r_0 \omega e^{\omega t} & 2r_0 \omega^2 e^{\omega t} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r_0^2 \omega^3 e^{2\omega t} \end{vmatrix}$$

Module (norme) du vecteur vitesse : $v = \sqrt{(r_0 \omega e^{\omega t})^2 + (r_0 \omega e^{\omega t})^2} = \sqrt{2} r_0 \omega e^{\omega t}$

$$\rho = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|} \Rightarrow \rho = \frac{(\sqrt{2} r_0 \omega e^{\omega t})^3}{2r_0^2 \omega^3 e^{2\omega t}} = \frac{2\sqrt{2} r_0^3 \omega^3 e^{3\omega t}}{2r_0^2 \omega^3 e^{2\omega t}} \Rightarrow \boxed{\rho = 2r_0 e^{\omega t}}$$

Corrigé 8

1. Equation de la trajectoire :

$t = \frac{z}{b\omega}$ soit en reportant dans x et y : $x = r \cos\left(\frac{zt}{b}\right)$ et $y = r \sin\left(\frac{zt}{b}\right)$.

$$y = x \tan\left(\frac{zt}{b}\right)$$

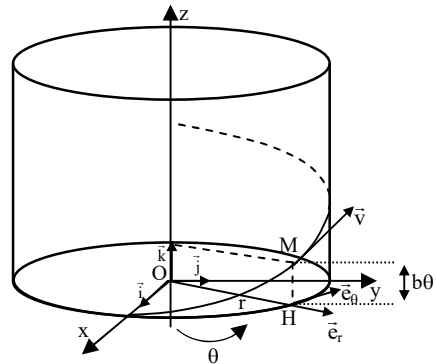
On élève au carré x et y :

$$x^2 = r^2 \cos^2\left(\frac{zt}{b}\right) \text{ et } y^2 = r^2 \sin^2\left(\frac{zt}{b}\right).$$

Comme

$$\cos^2\left(\frac{zt}{b}\right) + \sin^2\left(\frac{zt}{b}\right) = 1, \text{ il vient :}$$

$x^2 + y^2 = r^2$ équation d'un cercle de rayon a et de centre O , et comme z est une fonction linéaire du temps, la trajectoire du point M est une hélice.



2. Expression du vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ et } \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = -r\omega \sin \omega t \vec{i} + r\omega \cos \omega t \vec{j} + b\omega \vec{k}}$$

$$\text{Module : } \|\vec{v}\| = v = [(-r\omega \sin \omega t)^2 + (r\omega \cos \omega t)^2 + b^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \omega \sqrt{r^2 + b^2}$$

Le vecteur vitesse est constant, le mouvement est uniforme.

Expression du vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - r\omega^2 \cos \omega t \vec{j}$$

$$\text{Module : } \|\vec{a}\| = a = [(-r\omega^2 \sin \omega t)^2 + (r\omega^2 \cos \omega t)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$a = r\omega^2$$

3. Pas de cette hélice : le pas de l'hélice correspond à la hauteur atteinte quand

θ a parcouru 2π , soit pour $t = \frac{2\pi}{\omega}$. Soit :

$$\text{Un pas } p = 2\pi b$$

4. Calcul de $\vec{v} \cdot \vec{a}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = (-r\omega \sin \omega t \vec{i} + r\omega \cos \omega t \vec{j} + b\omega \vec{k}) \cdot (-r\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - r\omega^2 \cos \omega t \vec{j})$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = r^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t - r^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$$

Le produit scalaire est nul, ce qui implique que le vecteur vitesse est perpendiculaire au vecteur accélération donc, l'accélération est parallèle au plan xOy, elle est purement normale.

5. Vecteur position $\vec{OM}$ dans la base cylindrique.

$$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM}$$

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

6. Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \quad (\vec{e}_z \text{ vecteur unitaire constant})$$

$$\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + b\dot{\theta} \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta + b\omega \vec{e}_z$$

$$\text{Module : } v = \omega \sqrt{r^2 + b^2}.$$

$$\text{Vecteur accélération : } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\omega \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \Rightarrow \vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r$$

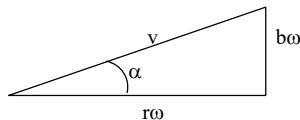
$$\text{Module : } a = r\omega^2.$$

On confirme bien sur les résultats de la question 2.

7. Montrer que le vecteur vitesse fait un angle α constant avec le plan (Ox, Oy).

On a :

$$\cos \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + b^2}} \text{ ou } \tan \alpha = \frac{b}{r}$$



Ou on peut utiliser le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{e}_z$ car comme $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta + b\omega\vec{e}_z$ on a : $r\omega\vec{e}_\theta$ qui est la vitesse du point H (projection du point M dans le plan xOy), H décrit un mouvement circulaire.

$b\omega\vec{e}_z$ qui est la vitesse du point Z (projection du point M sur l'axe Oz), Z a un mouvement rectiligne uniforme.

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_z = (r\omega\vec{e}_\theta + b\omega\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = b\omega \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{e}_z = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{e}_z\| \cos \alpha$$

$$b\omega = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{e}_z\| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}}$$

8. Rayon de courbure ρ de la trajectoire.

L'accélération est normale : $\vec{a} = -r\omega^2\vec{e}_r$ soit : $\rho = \frac{v^2}{a} \Rightarrow \rho = \frac{\omega^2(r^2 + b^2)}{r\omega^2}$

$$\boxed{\rho = \frac{(r^2 + b^2)}{r}}$$

Corrigé 9

On étudie un mobile M_a , assimilé à un point matériel (ou corpuscule), en mouvement uniforme dans le référentiel du laboratoire à la vitesse de 25 cm.s^{-1} , sur une piste qui comporte quatre portions :

- un segment rectiligne AB de longueur 1 m ;
- un quart de cercle BC de longueur 50 cm ;
- un quart de cercle CD de longueur 75 cm ;
- un segment rectiligne DE de longueur 2 m.

La piste est parcourue par M_a de A vers E :

1. Le mouvement du point M_a est uniforme, donc sa vitesse est constante.

Longueur totale de la piste : $AE = AB + BC + CD + DE$

$$AE = 4,25 \text{ m} = 425 \text{ cm}$$

Connaissant la vitesse, on en déduit τ : $\tau = \frac{AE}{v} \Rightarrow \tau = \frac{425}{25}$

$$\boxed{\tau = 17 \text{ s}}$$

2. La portion BC est un quart de cercle, le mouvement étant toujours uniforme son accélération tangentielle est nulle et son accélération normale a_1 vaut $\frac{v^2}{R}$.

Valeur de R : $BC = R\alpha \Rightarrow BC = R \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow R = \frac{2BC}{\pi}$. Il vient :

$$a_1 = \frac{\pi \cdot v^2}{2BC}$$

Application numérique : $a_1 = \frac{\pi \times 0,25^2}{2 \times 0,50} \Rightarrow a_1 = 0,20 \text{ m.s}^{-2}$

3. On effectue le même raisonnement : $a_2 = \frac{\pi \cdot v^2}{2CD}$.

Or $\frac{\pi v^2}{2} = BCa_1$ d'où $a_2 = \frac{BC}{CD}a_1$

$$a_2 = \frac{2}{3}a_1$$

4. A l'instant $t = 0$, M_a est au point D et M_b est au point E.

L'équation de la trajectoire pour M_a est : $x_a = v_a t$.

L'équation de la trajectoire pour M_b est : $x_b = -v_b t + x_E$.

Les deux mobiles se rencontrent quand : $x_a = x_b$.

$$x_a = x_b \Rightarrow v_a t = -v_b t + x_E \text{ soit au temps } t_r : t_r = \frac{x_E}{v_a + v_b}$$

Application numérique : $t_r = \frac{200}{75} = \frac{8}{3} \text{ s} \approx 2,67 \text{ s}$.

5. Distance parcourue par M_a : $x_a = v_a t_r \Rightarrow x_a = 25 \times \frac{8}{3}$

$$x_a = 67 \text{ cm}$$

6. On cherche : $D = x_b - x_a$ à la date $t = t_r - 1/5$.

$$d = -v_b t + x_E - v_a t \Rightarrow d = (-v_b - v_a)(t_r - \frac{1}{5}) + x_E$$

Application numérique : $d = (-50 - 25)(\frac{8}{3} - \frac{1}{5}) + 200$

$$d = 15 \text{ cm}$$

Corrigé du partiel

Exercice 1

1. C'est une question de cours.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

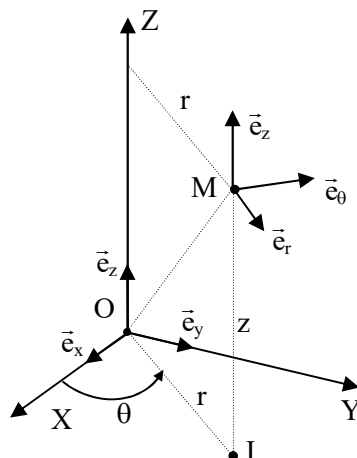
2. Vecteur vitesse

$$\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

Soit comme $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$:

$$\boxed{\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z}$$



3. Vecteur accélération

Soit $\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$, on dérive pour obtenir l'accélération :

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{d\dot{r}}{dt} \vec{e}_r + \dot{r} \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \dot{\theta} \frac{dr}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \frac{d\dot{z}}{dt} \vec{e}_z$$

Soit comme $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$: $\vec{a} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \dot{r} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r) + \ddot{z} \vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z}$$

4. Vecteur déplacement

L'idéal est de faire un schéma.

On se déplace de M à M' de :

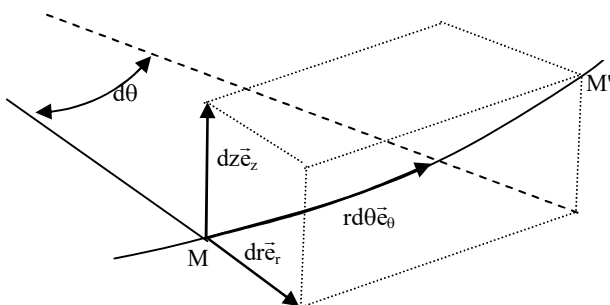
dr suivant $\vec{e}_r$

$r d\theta$ suivant $\vec{e}_\theta$

dz suivant $\vec{e}_z$.

Il vient :

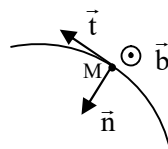
$$\boxed{d\overline{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z}$$



Exercice 2

1. Description des vecteurs unitaires :

$\vec{t}$ vecteur tangent à la trajectoire, dans le même sens que le mouvement.



$\vec{n}$ vecteur orienté vers le centre de la courbure et perpendiculaire à $\vec{t}$.

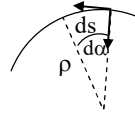
$\vec{b}$ vecteur perpendiculaire au plan contenant $\vec{t}$ et $\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$.

2. Expression de l'accélération :

Le vecteur vitesse est donné par $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = v\vec{t}$, on en déduit :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \Rightarrow \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} \text{ avec } ds = \rho d\alpha \text{ et } \frac{ds}{dt} = v$$



Et $\frac{d\vec{t}}{\rho d\alpha} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, $\vec{t}$ étant unitaire sa dérivée est un vecteur perpendiculaire.

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v.v. \frac{\vec{n}}{\rho}$$

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}}$$

3. On effectue le produit vectoriel $\vec{v}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{a}(M/\mathcal{R})$ soit :

$$v\vec{t} \wedge \left(\frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \right) = v\vec{t} \wedge \frac{dv}{dt} \vec{t} + v\vec{t} \wedge \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = \frac{v^3}{\rho} \vec{b} \quad (\text{car } \vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}).$$

$$\boxed{\vec{v}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{v^3}{\rho} \vec{b}}$$

On prend la norme :

$$\|\vec{v}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{a}(M/\mathcal{R})\| = \frac{v^3}{\rho} \|\vec{b}\| \quad (\vec{b} \text{ vecteur unitaire})$$

$$\boxed{\rho = \frac{v^3}{\|\vec{v}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{a}(M/\mathcal{R})\|}}$$

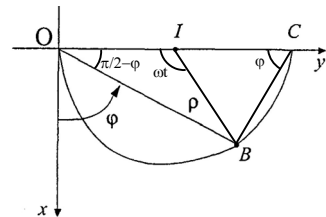
Exercice 3

1. Le point passe du O au point C avec un mouvement uniforme à la vitesse angulaire ω . Il décrit un demi-cercle en un temps :

$$\boxed{T = \frac{\pi}{\omega}}$$

2. Le triangle OIB est isocèle. Le point B se déplace à la vitesse angulaire donc l'angle $\widehat{OIB} = \omega t$.

On a dans ce cas : $\omega t + 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \pi$



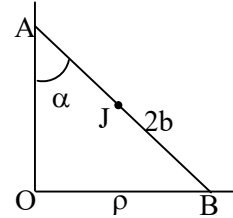
$$\varphi = \frac{\omega t}{2}$$

Expression de ρ : le triangle OBC est rectangle en B, il vient :

$$\rho = 2b \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \text{ soit } \rho = 2b \sin \varphi \text{ et } \boxed{\rho = 2b \sin \frac{\omega t}{2}}$$

3. Le triangle AOB est rectangle en O.

$$\sin \alpha = \frac{\rho}{2b} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \frac{\omega t}{2} \text{ soit : } \boxed{\alpha = \frac{\omega t}{2}}$$



4. Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OA} = 2b \cos \alpha \vec{e}_z \Rightarrow 2b \cos \frac{\omega t}{2} \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OB} = \rho \cos \varphi \vec{e}_x + \rho \sin \varphi \vec{e}_y = 2b \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \vec{e}_x + 2b \sin \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \vec{e}_y$$

On utilise les relations trigonométriques suivantes :

$$2 \sin a \cos a = \sin 2a \text{ et } \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\overrightarrow{OB} = b \sin \omega t \vec{e}_x + b(1 - \cos \omega t) \vec{e}_y.$$

On en déduit, les coordonnées de J :

$$\boxed{X = \frac{b}{2} \sin \omega t ; Y = \frac{b}{2} (1 - \cos \omega t) ; Z = b \cos \frac{\omega t}{2}}$$

5. Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OJ}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{b\omega}{2} \cos \omega t \vec{e}_x + \frac{b\omega}{2} \sin \omega t \vec{e}_y - \frac{b\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \frac{b\omega}{2} (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y - \sin \frac{\omega t}{2} \vec{e}_z)$$

$$\text{Norme : } v^2 = \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\omega t}{2}\right)$$

$$\text{Valeur moyenne : } \langle v^2 \rangle = \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) \text{ (la valeur moyenne de } \sin^2 a = 1/2)$$

$$\boxed{\langle v^2 \rangle = \frac{3b^2\omega^2}{8}}$$

6. Sur l'intervalle de temps de $t = 0$ à $T = \pi/\omega$, la fonction $\sin^2 \frac{\omega t}{2}$ est croissante, donc le mouvement de J est accéléré.

Exercice 4

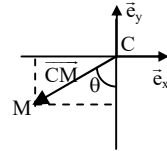
1. Le roulement sans glissement impose que l'arc HM soit égal à OI. Il vient : $HM = R\theta(t)$ d'où :

$$\overline{OH} = R\theta(t)$$

2. Expression des vecteurs :

$$\overline{OC} = \overline{OH} + \overline{HC} \Rightarrow \overline{OC} = R\theta(t)\vec{e}_x + R\vec{e}_y \Rightarrow \overline{OC} = R\omega t\vec{e}_x + R\vec{e}_y$$

$$\overline{CM} = -R\sin\theta\vec{e}_x - R\cos\theta\vec{e}_y \Rightarrow \overline{CM} = -R\sin\omega t\vec{e}_x - R\cos\omega t\vec{e}_y$$



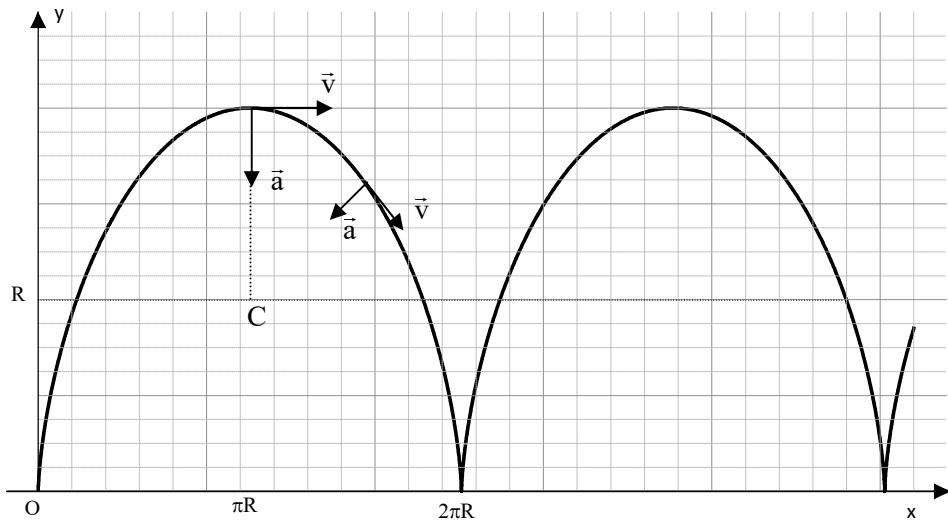
3. Vecteur position :

$$\overline{OM} = \overline{OH} + \overline{HC} + \overline{CM}$$

$$\overline{OM} = R\omega t\vec{e}_x + R\vec{e}_y - R\sin\omega t\vec{e}_x - R\cos\omega t\vec{e}_y$$

$$\overline{OM} = R(\omega t - R\sin\omega t)\vec{e}_x + R(1 - \cos\omega t)\vec{e}_y$$

Courbe



4. Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{Rd\omega t}{dt}\vec{e}_x - R\frac{d\sin\omega t}{dt}\vec{e}_x - R\frac{d\cos\omega t}{dt}\vec{e}_y$$

$$\vec{v} = R\omega(1 - \cos\omega t)\vec{e}_x + R\omega\sin\omega t\vec{e}_y$$

$$\vec{v} = R\omega((1 - \cos\omega t)\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$$

5. Norme : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$v = R\omega\sqrt{((1 - \cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t)} \Rightarrow R\omega\sqrt{1 - 2\cos\omega t + \cos^2\omega t + \sin^2\omega t}$$

$$v = R\omega\sqrt{2(1 - \cos\omega t)} \quad \text{et } 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$v = R\omega\sqrt{4\sin^2\frac{\omega t}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{v = 2R\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|} \quad \text{ou} \quad v = 2R\omega\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

Pour θ variant de 0 à π , $\sin\frac{\theta}{2} > 0$, le mouvement est accéléré.

Pour θ variant de π à 2π , $\sin\frac{\theta}{2} < 0$, le mouvement est décéléré.

6. Vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = R\omega(\omega\sin\omega t\vec{e}_x + \omega\cos\omega t\vec{e}_y)$$

$$\vec{a} = R\omega^2(\sin\omega t\vec{e}_x + \cos\omega t\vec{e}_y)$$

Norme : $a = R\omega^2\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}$

$$\boxed{a = R\omega^2}$$

L'accélération est constante au cours du mouvement.

Orientation du vecteur accélération :

$$\overrightarrow{CM} = -R\sin\omega t\vec{e}_x - R\cos\omega t\vec{e}_y \Rightarrow \sin\omega t\vec{e}_x + \cos\omega t\vec{e}_y = -\frac{\overrightarrow{CM}}{R} \quad \text{soit :}$$

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{\omega^2}{R}\overrightarrow{CM}}$$

$\vec{a}$ est toujours orienté vers le centre C de la roue.

7. Voir le schéma ci-dessus.

8. Le vecteur $\vec{\tau}$ est dirigé suivant le vecteur vitesse $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

$$\vec{\tau} = \frac{R\omega((1 - \cos\omega t)\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)}{2R\omega\sin\frac{\omega t}{2}} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{(1 - \cos\omega t)}{2\sin\frac{\omega t}{2}}\vec{e}_x + \frac{\sin\omega t}{2\sin\frac{\omega t}{2}}\vec{e}_y$$

$$\vec{\tau} = \frac{2\sin^2\frac{\omega t}{2}}{2\sin\frac{\omega t}{2}}\vec{e}_x + \frac{2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}}{2\sin\frac{\omega t}{2}}\vec{e}_y$$

$$\vec{\tau} = \sin \frac{\omega t}{2} \vec{e}_x + \cos \frac{\omega t}{2} \vec{e}_y$$

9. Expression de $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \vec{e}_x - \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \vec{e}_y$$

Expression de $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$: on écrit $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \frac{dt}{ds}$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{2R\omega \sin \frac{\omega t}{2}} \left(\frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \vec{e}_x - \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \vec{e}_y \right)$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{4R} \left(\frac{1}{\tan \frac{\omega t}{2}} \vec{e}_x - \vec{e}_y \right)$$

10. Le rayon de courbure est défini par $\rho = \left\| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right\|^{-1}$:

$$\left\| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right\| = \frac{1}{4R} \left(\frac{1}{\tan^2 \frac{\omega t}{2}} + 1 \right)^{1/2} \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right\|^{-1} = 4R \left(\frac{1}{\tan^2 \frac{\omega t}{2}} + 1 \right)^{-1/2}$$

$$\rho = \left\| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right\|^{-1} = 4R \left(\frac{\cos^2 \frac{\omega t}{2} + \sin^2 \frac{\omega t}{2}}{\sin^2 \frac{\omega t}{2}} \right)^{-1/2}$$

$$\rho = 4R \sin \frac{\omega t}{2}$$

On pouvait aussi passer par la relation : $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{n}$

$$\vec{n} = \frac{\rho}{v} \frac{d\vec{\tau}}{dt} \text{ et } \|\vec{n}\| = 1 = \frac{\rho \omega}{4R\omega \sin \frac{\omega t}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\omega t}{2} + \sin^2 \frac{\omega t}{2}}$$

$$\rho = 4R \sin \frac{\omega t}{2}$$

Chapitre 2

Lois de Newton et forces

La dynamique est l'étude des mouvements en fonction des causes (les forces) qui les produisent.

Les systèmes étudiés sont assimilés à des points matériels ou à des solides en translation dont le mouvement est décrit par rapport au centre de masse.

A. Masse, quantité de mouvement

1. La masse

La masse (en kilogramme kg) caractérise la quantité de matière contenue dans le système. La masse m , d'un système sera en général invariable dans le cadre de la mécanique newtonienne.

Le centre d'inertie I (ou centre de gravité G) d'un système, est le barycentre des points M_i de masse m_i défini par :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i}$$

2. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans un référentiel $\mathcal{R}$, est définie par :

$$\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

Pour un système matériel, constitué de n point matériel M_i de masse m_i , et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_i$ dans le référentiel d'étude, la quantité de mouvement est donnée par la somme de tous les vecteurs quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{v}_i$$

Comme les masses sont constantes dans le temps :

$$\vec{p} = m \frac{d\overrightarrow{OI}}{dt} \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}_I \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i = m$$