

collection dirigée par Xavier MERLIN

METHOD'

mathématiques

Seconde

4^e édition

**NOUVEAUX
PROGRAMMES**

280 méthodes
170 exercices corrigés



Thomas PETIT

collection dirigée par Xavier MERLIN

METHOD'

mathématiques

Seconde

**NOUVEAUX
PROGRAMMES**

4^e édition

280 méthodes
170 exercices corrigés

Thomas PETIT

Professeur agrégé de mathématiques
au lycée Marie Curie (Nogent-sur-Oise)



Collection **MethodiX**

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-118324

Dépôt légal : juillet 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

"Les plus belles victoires,
les seules qui ne donnent aucun regret,
sont celles que l'on fait sur l'ignorance".

Général Napoléon BONAPARTE

Extrait du discours prononcé à l'Institut, au retour de la campagne d'Egypte

BONAPARTE dit vrai : comprendre, acquérir des connaissances, rendre intelligibles des notions qui paraissent floues, c'est remporter la plus belle des victoires. Sans méthode, les égyptologues et les scientifiques n'auraient sans doute pas pu autant découvrir, sans méthode on ne peut rien.

La méthode c'est le fondement de ce livre, METHOD' SECONDE, et aussi de tous les autres livres de la collection METHOD' et METHODIX, collection qui vous donne une liste de méthodes à maîtriser pour répondre à la plupart des questions qui vous sont posées au cours de l'année. La méthode c'est la clef de la réussite.

Peut-être avez-vous déjà feuilleté ce livre en vous interrogeant sur son mode d'emploi, résolument différent des autres manuels ? Comment donc l'utiliser, vous demandez-vous ? Et bien justement, de la manière la plus simple et la plus naturelle possible, dans un ton décontracté mais sérieux, fun mais rigoureux, cool et méthodique pour vous faire apprendre et comprendre tout le programme de seconde (et ainsi, vous permettre de progresser et de vous perfectionner !). Cependant, voici quelques indications de bon usage de cet ouvrage :

Comment utiliser les méthodes ?

L'originalité de cette collection tient dans l'exposé des méthodes, présentées sans détour et de manière immédiate : près de 270 méthodes vous permettront d'acquérir le savoir-faire que l'on exige des élèves. Très visuelles par leur intitulé, elles vous permettront de retrouver rapidement une notion que vous voulez comprendre (ou approfondir). Elles couvrent l'ensemble du programme et sont toujours illustrées par un ou plusieurs exemples (souvent des classiques voire des incontournables), vous permettant de les assimiler et de les maîtriser d'autant plus vite !

Comment utiliser les trois rubriques en fin de chapitre ?

▪ **La rubrique "Réflexes"**

On vous conseille de bien étudier cette rubrique. En effet, dans une situation donnée, il suffit parfois d'une petite indication pour savoir quelle méthode immédiatement appliquer. Apprendre par cœur les rubriques "réflexes" vous sera donc d'une aide précieuse (surtout les jours de DS). Pour vous faciliter la tâche, on vous les a récapitulés sous forme de tableau, afin de les mémoriser en un clin d'œil !

▪ **La rubrique "Astuces"**

Si vous bloquez sur un point, si vous avez du mal à retenir une formule ou le nom d'un théorème, cette rubrique vous sera d'un grand secours : un peu comme si un bon génie vous chuchotait directement à l'oreille les réponses que vous cherchez. Pas besoin de frotter une lampe à huile, simplement bien lire cette rubrique !

▪ La rubrique "Erreurs"

Pour éviter de commettre des erreurs archi-classiques (tellement classiques d'ailleurs qu'elles énervent beaucoup vos professeurs), bien lire cette rubrique, véritable caverne d'Ali Baba des bourdes, confusions et erreurs à ne pas commettre. Nous vous conseillons de bien en prendre connaissance pendant vos révisions afin de ne pas les reproduire le jour J : vous éviterez ainsi l'exaspération de votre prof ainsi que beaucoup de ratures (rouges) sur votre copie.

▪ La rubrique "Démonstrations, algorithmes et approfondissements"

C'est là que sont répertoriés ce que vous devez savoir faire (que ce soit en raisonnement ou en programmation) en fonction du titre du chapitre. Il vous suffit ensuite de vous reporter aux pages concernées des chapitres 18, 19, 20 consacrés.

Recommandations avant d'attaquer la partie Exercices.

Les chapitres d'exercices comportent deux rubriques : les énoncés et les corrigés. Voici quelques conseils...

▪ Comment faire les exercices ?

Le futur "roi des DS" que vous rêvez d'être se doit de s'exercer avant de se jeter dans la gueule du loup. Cela tombe bien : 150 exercices de mathématiques et plus de 150 automatismes ont été sélectionnés pour vous permettre de bien vous tester et vous mettre en condition ! Bien sûr, le plus efficace reste de bien chercher avant de lire la correction (ce qui vous permettra de passer en revue les méthodes du chapitre). Plus vous aurez cherché, plus vous aurez mémorisé les méthodes, et plus vous aurez les idées claires !

▪ Comment étudier les corrigés ?

Après avoir bien cherché les exercices, vous serez sans doute impatient de regarder leur correction. Bonne nouvelle : les corrigés des exercices sont méthodiquement rédigés, de manière complète (pour vous permettre d'assimiler efficacement toutes les méthodes), et les méthodes utilisées pour les résoudre sont indiquées en début de correction (au cas où vous vous sentiriez un peu perdu).

Quand utiliser ce livre ?

Quand vous voulez, et le plus souvent (si possible) ! Peut-on l'utiliser après les cours ? Bien sûr, pour retrouver vite le théorème ou la définition que l'on n'a pas "pigés" : le format de ce livre permet d'aider ceux qui veulent comprendre vite une notion sans avoir besoin forcément de relire quinze ou vingt pages avant. Peut-on l'utiliser avant les cours ? Oh que oui, et c'est même très efficace pour savoir à l'avance de quoi le cours parle, et quelles sont les méthodes hyper classiques qui vous attendent ! (Dans une ambiance détendue, cool et sans se prendre la tête !). De même, vous pouvez l'utiliser en même temps que vous apprenez votre cours (comme ça vous assimilerez le cours ET les méthodes en même temps) et aussi, bien sûr, pour réviser avant vos DS. N'hésitez pas à en user et à en abuser !! En choisissant METHOD', vous prenez l'habitude, dès votre entrée au lycée, de travailler directement sur les méthodes. Gain de temps, efficacité, automatisme : vous constaterez très vite par vous-même les nombreux avantages de cette nouvelle façon de travailler. Ensuite, la collection METHOD'X vous accompagnera jusqu'au BAC, et même en classe prépa si vous choisissez cette orientation. Et ça, vous pouvez vérifier : il n'y a que CETTE collection qui vous l'offre !

Alors bon courage, bonnes méthodes et au travail !

Thomas PETIT

Xavier MERLIN

Table des matières

NOMBRES ET CALCULS, ALGÈBRE

Chapitre 1. Méthodes sur les nombres réels	11
1. Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et droite numérique.....	11
2. Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$	12
3. Valeur absolue et distance.....	14
A- Notation $ a $	14
B- Distance entre deux nombres réels a et b	15
4. Intervalles centrés et valeurs absolues	16
5. Nombres décimaux, valeurs approchées et encadrements	17
6. Nombres rationnels et irrationnels	20
Chapitre 2. Méthodes d'arithmétique.....	25
1. Ensemble $\mathbb{N}$ et ensemble $\mathbb{Z}$	25
2. Multiples et diviseurs.....	26
3. Nombres premiers	29
Chapitre 3. Méthodes d'algèbre	35
1. Comment simplifier une expression fractionnaire ?	35
2. Comment simplifier des calculs avec des puissances ?	37
3. Comment simplifier des calculs avec des racines carrées ?	38
4. Comment développer ?	40
5. Comment factoriser ?	43
6. Comment comparer deux nombres ?	45
7. Comment « additionner » des inégalités ?	47
8. Comment exprimer une variable en fonction des autres ?	48
9. Comment maîtriser les applications numériques ?	51
Chapitre 4. Méthodes de résolution d'équations.....	57
1. Comment résoudre algébriquement une équation ?	57
A- Equation du type $ax + b = 0$	57
B- Equation " produit nul "	58
C- Equation quotient	59
D- Equation $x^2 = k$ ($k \geq 0$)	59
E- Equation $\frac{1}{x} = k$ ($k \neq 0$)	62
F- Equation $\sqrt{x} = k$ ($x \geq 0, k \geq 0$)	63
G- Equation $x^3 = k$	64
H- Equation $ x = k$ ($k \geq 0$)	64
2. Comment mettre en équation un problème ?	65
A- Problèmes arithmétiques.....	65
B- Problèmes géométriques.....	66
Chapitre 5. Méthodes de résolution d'inéquations.....	73
1. Comment résoudre algébriquement une inéquation ?	73
A- Inéquations $ax + b < 0$, etc.	73
B- Inéquations $(ax + b)(cx + d) < 0$, etc. et tableaux de signes	76
C- Inéquations $ x < k$, etc. ($k \geq 0$)	78
2. Comment mettre en inéquation un problème ?	78

GEOMETRIE

Chapitre 6. Méthodes sur les vecteurs	81
1. Comment montrer que deux vecteurs sont égaux ?	81
2. Somme de deux vecteurs, produit d'un vecteur par un réel, colinéarité de deux vecteurs.....	83
3. Applications de la colinéarité : alignement, parallélisme	85
4. Somme de deux vecteurs. Relation de Chasles	88
A- Comment construire une somme de deux vecteurs ?	88
B- Comment simplifier une somme de vecteurs ?	89
5. Base. Coordonnées et norme d'un vecteur. Longueur et milieu d'un segment	92
6. Barycentre de deux ou trois points	95
A- Comment construire un barycentre à 2 points ?	95
B- Comment construire un barycentre à 3 points ?	96
C- Comment résoudre un problème de géométrie avec les barycentres ?.....	98
Chapitre 7. Méthodes sur la géométrie.....	105
1. Ce qu'il faut savoir sur les triangles	105
2. Ce qu'il faut savoir sur les quadrilatères.....	107
3. Comment calculer des longueurs ?	108
4. Comment calculer des angles ?.....	113
5. Comment calculer des aires ?	117
6. Comment calculer des volumes ?.....	118
7. Problème d'optimisation.....	120
Chapitre 8. Méthodes sur les droites.....	125
1. Vecteur directeur d'une droite	125
2. Pente (ou coefficient directeur) d'une droite.....	127
3. Tracés de droite	131
A- Comment tracer les droites du type $(d): y = mx + p$?	131
B- Comment tracer les droites du type $(d): y = k$?	134
C- Comment tracer les droites du type $(d): x = k$?	135
D- Comment tracer les droites du type $(d): ax + by + c = 0$?	136
4. Equations de droite.....	138
A- Comment obtenir une équation de la droite (AB) ?	138
B- Comment obtenir une équation de la droite (d) passant $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{u}$?	146
C- Comment obtenir une équation de la droite (d) passant par $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et parallèle à (d') ?	146

FONCTIONS

Chapitre 9. Méthodes sur les fonctions de référence.....	153
1. Représentations graphiques et tableaux de variations	153
A- La fonction valeur absolue	153
B- La fonction carrée (parabole)	154
C- La fonction inverse (hyperbole)	155

D- La fonction racine carrée	157
E- La fonction cube	158
2. Equations $f(x) = k$, inéquation $f(x) < k$	159
A- Equation $ax + b = k$, inéquation $ax + b < k$	159
B- Equation $ x = k$, inéquation $ x < k$ ($k \geq 0$)	161
C- Equation $x^2 = k$, inéquation $x^2 < k$ ($k \geq 0$)	162
D- Equation $\frac{1}{x} = k$, inéquation $\frac{1}{x} < k$ ($k \neq 0$)	164
E- Equation $\sqrt{x} = k$, inéquation $\sqrt{x} < k$ ($x \geq 0, k \geq 0$)	165
F- Equation $x^3 = k$, inéquation $x^3 < k$	167
Chapitre 10. Méthodes sur les fonctions.....	171
1. Ensemble de définition d'une fonction.....	171
2. Courbe représentative d'une fonction.....	176
A- Comment tracer la courbe d'une fonction linéaire ?	176
B- Comment tracer la courbe d'une fonction affine ?.....	177
C- Comment tracer la courbe d'une fonction générale ?.....	178
D- Comment savoir si un point appartient à une courbe ?	179
3. Signe d'une fonction affine et des fonctions de référence, tableaux de signes des fonctions produit ou quotient	181
4. Résolution d'équations et d'inéquations	182
A- Comment résoudre $f(x) = k$ et $f(x) < k$?	182
B- Comment résoudre $f(x) = g(x)$ et $f(x) < g(x)$?	186
5. Fonction paire, impaire. Traduction géométrique	188
Chapitre 11. Méthodes sur les variations et extremums d'une fonction	195
1. Croissance, décroissance, monotonie, tableau de variations d'une fonction.....	195
A- Comment étudier la monotonie (croissance ou décroissance) d'une fonction ?	195
B- Tableau de variations.....	197
2. Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle	199
3. Variations d'une fonction affine, coefficient directeur et taux d'accroissement	202
4. Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube	203
A- Fonction carré	203
B- Fonction inverse	205
C- Fonction racine carrée	208
D- Fonction cube	209

STATISTIQUES ET PROBABILITES

Chapitre 12. Méthodes sur l'information chiffrée et la statistique descriptive	213
1. Proportions	213
2. Evolution	217
3. Statistique à une variable	220
A- Comment déterminer la moyenne et l'écart-type ?	220
B- Comment déterminer la médiane et l'écart interquartile ?	222

4. Comment comparer deux séries statistiques ?	224
Chapitre 13. Méthodes sur le croisement de deux variables catégorielles	231
1. Tableaux croisés d'effectifs	231
2. Fréquences marginales	232
3. Fréquences conditionnelles	233
A-Fréquences conditionnelles en ligne	233
B-Fréquences conditionnelles en colonne	234
4. Un exemple pour tout retenir !	235
Chapitre 14. Méthodes sur les probabilités	239
1. Probabilités conditionnelles et tableaux croisés d'effectifs	239
2. Probabilités conditionnelles et arbres pondérés	242
Chapitre 15. Méthodes sur l'échantillonnage	249
1. Vocabulaire de la théorie de l'échantillonnage	249
2. Version vulgarisée de la loi des grands nombres	250
3. Encadrement d'une fréquence attendue à partir d'une probabilité donnée	251
4. Estimation d'une probabilité par une fréquence observée sur un échantillon	253

PROGRAMMATION ET LOGIQUE

Chapitre 16. Méthodes sur la programmation	255
1. Fonctions	255
A- Fonctions à un ou plusieurs arguments	255
B- Fonctions associées à l'aléatoire	257
2. Instructions et boucles	257
A- Instruction conditionnelle IF-ELSE	257
B- Boucle bornée FOR	259
C- Boucle non bornée WHILE	261
Chapitre 17. Méthodes sur le vocabulaire ensembliste et logique	267
1. Le " et " ($\cap$) et le " ou " ($\cup$) logique (intersection et réunion)	267
2. Appartenance ($\in$), inclusion ($\subset$) pour les ensembles	268
3. Implications et équivalences	269
4. Négations et contraposées	273
5. Énoncés vrais, énoncés faux	274
A- Comment montrer qu'un énoncé est vrai ?	274
B- Comment montrer qu'un énoncé est faux ?	275
6. Raisonnements	276

DEMONSTRATIONS-ALGORITHMES-APPROFONDISSEMENTS

Chapitre 18. Démonstrations exigibles	281
A- Démonstrations du chapitre 1 (nombres réels)	281
B- Démonstrations du chapitre 2 (arithmétique)	282
C- Démonstration du chapitre 3 (algèbre)	283
D- Démonstration du chapitre 6 (vecteurs)	283
E- Démonstration du chapitre 8 (droites)	284
F- Démonstration du chapitre 10 (fonctions)	284
G- Démonstrations du chapitre 11 (variations et extremums d'une fonction)	285

Chapitre 19. Algorithmes exigibles	289
A- Algorithmes du chapitre 1 (nombres réels)	289
B- Algorithmes du chapitre 2 (arithmétique)	289
C- Algorithmes du chapitre 3 (algèbre)	290
D- Algorithmes du chapitre 8 (droites)	291
E- Algorithmes du chapitre 11 (variations et extremums d'une fonction)	292
F- Algorithmes du chapitre 14 (échantillonnage)	294
Chapitre 20. Approfondissements	299
A- Approfondissements du chapitre 1 (nombres réels)	299
B- Approfondissements du chapitre 3 (algèbre)	300
C- Approfondissements du chapitre 7 (géométrie)	301
D- Approfondissements du chapitre 8 (droites)	305
E- Approfondissements du chapitre 11 (variations et extremums d'une fonction)	307

EXERCICES ET CORRIGES

Chapitre 1	311
Chapitre 2	317
Chapitre 3	323
Chapitre 4	329
Chapitre 5	339
Chapitre 6	345
Chapitre 7	357
Chapitre 8	363
Chapitre 9	369
Chapitre 10	375
Chapitre 11	387
Chapitre 12	395
Chapitre 13	405
Chapitre 14	413
Chapitre 15	421
Chapitre 16	425
Chapitre 17	431

Chapitre 1

METHODES SUR LES NOMBRES REELS

Les nombres réels c'est « tout le monde » puisqu'il contient :

- les nombres entiers positifs : 0, 1, 2, 3, ..., 14 587, ...
- les nombres entiers strictement négatifs : ... -23 567, ..., -3, -2, -1.
- les nombres décimaux (qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule comme 16,75 par exemple).
- les nombres rationnels (c'est-à-dire toutes les fractions) à développement décimal (régulier) fini ou pas, comme $\frac{3}{4} = 0,75$, $\frac{1}{3} = 0,33333...$,

$$\frac{1}{7} = 0,1428571428571...$$

- et enfin tous les nombres « bizarres » (qu'on appelle irrationnels) comme $\pi = 3,141592653589...$, $\sqrt{2} = 1,41421356237...$ à développement décimal franchement casse-c... euh... pardon casse-pieds car très irrégulier (en même temps c'est ça qui font leur beauté, tout leur mystère paraît-il...)

Bref dans cette gigantesque poubelle à nombres qu'on appelle nombres réels et qu'on note $\mathbb{R}$, comment s'y retrouver ?

C'est justement l'objet de ce chapitre qu'on va se charger de vous expliquer. Du coup n'oubliez pas de couper votre smartphone car il va falloir être un minimum attentif, c'est parti !

1. Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et droite numérique

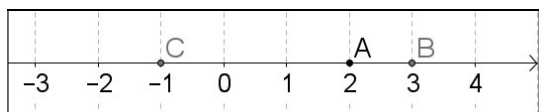
Bonne nouvelle, on dispose d'une sympathique droite graduée (appelée droite numérique) sur laquelle on peut disposer les nombres réels (pas n'importe comment bien sûr, on n'est pas à la foire... mais en utilisant les graduations). Voyons tout ça !

METHODE 1 : Comment associer à chaque point de la droite numérique un unique nombre réel et réciproquement ?

■ Principe :

Aucune difficulté, il suffit d'être attentif aux graduations.

■ **Exemple** : On considère les points de la droite numérique ci-dessous :

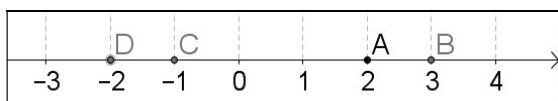


- 1) Déterminer les nombres réels associés aux points A, B et C.
- 2) Placer sur la droite numérique, le point D associé au nombre -2 .

1) Rien de compliqué (c'est même curieux tellement c'est facile...) :

- le point A est associé au nombre réel 2 ;
- le point B est associé au nombre réel 3 ;
- le point C est associé au nombre réel -1 .

2) On obtient :



REMARQUE : Ce qu'il faut bien comprendre, c'est qu'il n'y a aucun piège : à chaque point de la droite numérique est associée une unique valeur réelle.

■ **Exemple (automatisme)** : Deux graduations successives correspondent à $0,5$. Si le point M est situé trois graduations à droite de 0, quel est son abscisse ?

C'est immédiat, $3 \times 0,5 = 1,5$ donc l'abscisse du point M est $1,5$ (car on est à droite de 0).

2. Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$

METHODE 2 : Comment utiliser les caractérisations d'appartenance à un intervalle ?

■ Principe :

a) Lorsque le crochet entoure le nombre, on dit qu'il est fermé, dans le cas contraire on dit qu'il est ouvert.

Par exemple, $[2;3[$ est fermé en 2 (mais ouvert en 3), cela veut dire qu'il contient 2 mais pas 3 !

$]2;3]$ est fermé en 3 (mais ouvert en 2), cela veut dire qu'il contient 3 mais pas 2, $[2;3]$ est fermé en 2 et en 3, cela veut dire qu'il contient 2 et 3, $]2;3[$ est ouvert en 2 et en 3, donc il ne contient ni 2 ni 3.

b) On ne ferme jamais l'infini (c'est presque philosophique, car on ne l'atteint jamais !), il ne faut jamais écrire $[-\infty;3]$ mais $] -\infty;3]$.

Inégalités	Intervalles	Droite graduée
$a \leq x \leq b$	$x \in [a;b]$	
$a < x \leq b$	$x \in]a;b]$	
$a \leq x < b$	$x \in [a;b[$	
$a < x < b$	$x \in]a;b[$	
$x \leq a$	$x \in]-\infty;a]$	
$x < a$	$x \in]-\infty;a[$	
$x \geq b$	$x \in [b;+\infty[$	
$x > b$	$x \in]b;+\infty[$	

■ **Exemple :** Traduire en termes d'intervalles les inégalités suivantes :

- a) $-2 \leq x \leq 3$ b) $0 < x \leq \frac{5}{2}$ c) $-3 \leq x < 0$ d) $-5 < x < 3$
e) $x \leq -4$ f) $x < 0$ g) $x \geq 2,1$ h) $x > 5$

On a :

- a) $x \in [-2;3]$ b) $x \in]0;\frac{5}{2}]$ c) $x \in [-3;0[$ d) $x \in]-5;3[$
e) $x \in]-\infty;-4]$ f) $x \in]-\infty;0[$ g) $x \in [2,1;+\infty[$ h) $x \in]5;+\infty[$

■ **Exemple :** Traduire en termes d'inégalités l'appartenance aux intervalles suivants :

- a) $x \in [-5;2]$ b) $x \in]-1;\frac{3}{2}]$ c) $x \in [-5;1[$ d) $x \in]-1;4[$
e) $x \in]-\infty;5,1]$ f) $x \in]-\infty;-1[$ g) $x \in [0;+\infty[$ h) $x \in]-3;+\infty[$

On a :

- a) $-5 \leq x \leq 2$ b) $-1 < x \leq \frac{3}{2}$ c) $-5 \leq x < 1$ d) $-1 < x < 4$
e) $x \leq 5,1$ f) $x < -1$ g) $x \geq 0$ h) $x > -3$

■ **Exemple** : Déterminer à quel(s) intervalle(s) appartiennent les nombres 0 et 2

- a) $I_1 =]-5; 4[$ b) $I_2 =]0; 4[$ c) $I_3 =]-5; -3[$ d) $I_4 = [0; 5[$
 e) $I_5 = [-1; +\infty[$ f) $I_6 =]-\infty; \infty[$ g) $I_7 =]-5; 0[$ h) $I_8 =]-7; 0]$

On obtient : $0 \in I_1, 0 \in I_4, 0 \in I_5, 0 \in I_6, 0 \in I_8$.

On obtient : $2 \in I_1, 2 \in I_2, 2 \in I_4, 2 \in I_5, 2 \in I_6$.

REMARQUE : Ces écritures sous forme d'intervalle seront extrêmement utiles dans le chapitre 5 (Inéquations), donc autant être fort sur ce chapitre !

■ **Exemple (géométrie)** : Lors d'un DS, Brice à son exercice trouve une longueur égale à -3 . Il remarque (par pur hasard, évidemment) que son camarade lui trouve une longueur égale à 4. Qui risque d'avoir raison ?

Comme x est une longueur, on a forcément $x \in [0; +\infty[$ (et oui une longueur est forcément positive). Brice hésitant entre les deux valeurs -3 et 4, comme $-3 \notin [0; +\infty[$ il faut l'écartier et se concentrer sur la valeur restante, la valeur 4 !

■ **Exemple (automatisme)** :

1) Traduire en terme d'intervalles l'inégalité suivante : $x \geq 2$.

2) Traduire en terme d'inégalités l'intervalle suivant : $x \in]-\infty; 3[$.

3) Traduire en terme d'intervalle : « la vitesse v est strictement inférieure à 120 km/h. »

1) $x \geq 2$ se traduit par $x \in [2; +\infty[$.

2) $x \in]-\infty; 3[$ se traduit par $x < 3$.

3) $v \in [0; 120[$ (en km/h).

3. Valeur absolue et distance

A- Notation $|a|$

« C'est quoi a avec des barres ? » est la question la plus entendue dans les cours de maths de France et de Navarre. Pour être clair, déjà on dit « valeur absolue de a » (ce qui est quand même plus classe que « a avec des barres », à moins que ça soit une barre de rire et encore...) et ce qu'il faut en retenir c'est que $|a|$ est toujours positif (quitte à rendre positif ce qui était négatif). Voyons plus précisément ce que c'est !

METHODE 3 : Comment simplifier une valeur absolue ?

■ Principe :

On applique la formule $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$ ou $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$. (En gros, une valeur absolue change le négatif en positif).

■ Exemple : Simplifier :

a) $|4|$ b) $|-7|$ c) $|8-5|$ d) $|3-11|$ e) $|2-3|+|3-4|$ f) $|-1|+|1|$

a) $|4| = 4$ b) $|-7| = 7$ c) $|8-5| = |3| = 3$ (penser à simplifier d'abord $8-5$)

d) $|3-11| = |-8| = 8$ e) $|2-3|+|3-4| = |-1|+|-1| = 1+1 = 2$ f) $|-1|+|1| = 0+1+1 = 2$.

■ Exemple (automatisme) : Simplifier $\left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|$.

Comme $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2-3}{6} = \frac{-1}{6}$ (négatif) on a $\left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$.

B- Distance entre deux nombres réels a et b

Comment calculer la distance entre deux réels ? Bon, entre 5 et 3 la distance vaut 2 ($5-3=2$), tout comme à priori la distance entre 3 et 5 (et pourtant $3-5=-2$). Etrange paradoxe. Comment trouver une formule universelle qui marche tout le temps ? Eh bien on l'a trouvé, c'est justement la valeur absolue qu'on vient de voir (car $|5-3| = |2| = 2$ et $|3-5| = |-2| = 2$). C'est parti !

METHODE 4 : Comment calculer la distance entre deux nombres réels ?

■ Principe :

$|a-b|$ désigne la distance entre les deux nombres réels a et b tout simplement.

■ Exemple : Déterminer la distance entre les deux réels :

a) 10 et 4. b) 4 et 10. c) 5 et -2.

a) La distance entre 10 et 4 vaut $|10-4| = |6| = 6$.

b) La distance entre 4 et 10 vaut $|4-10| = |-6| = 6$.

c) La distance entre 5 et -2 vaut $|5-(-2)| = |5+2| = |7| = 7$. Trop easy, non ?

■ **Exemple (automatisme) :** Vrai ou Faux ? La distance entre 1 et 5 est strictement supérieure à celle entre -2 et -7.

La distance entre 1 et 5 vaut $|1-5| = |-4| = 4$.

La distance entre -2 et -7 vaut $|-2-(-7)| = |-2+7| = |5| = 5$.

Réponse : Faux.

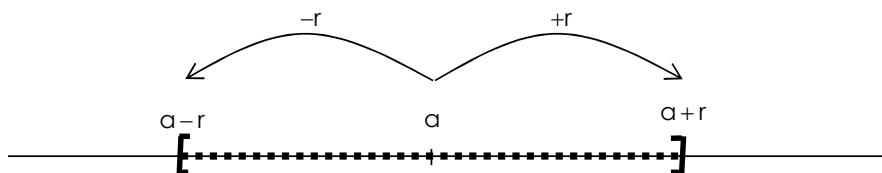
4. Intervalles centrés et valeurs absolues

Bon, passons aux intervalles graphiques, vous allez voir c'est super facile...

METHODE 5 : Comment représenter l'intervalle $[a-r; a+r]$ ($r \geq 0$) ?

■ Principe :

C'est tout simplement un intervalle centré en a avec $a-r$ sur le bord gauche et $a+r$ sur le bord droit, comme ci-dessous :

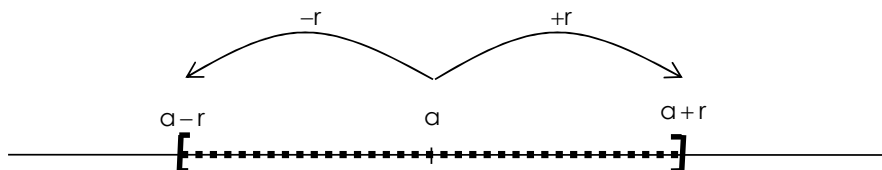


REMARQUE : Bon c'est pas dur, on reconnaît immédiatement le centre a et le rayon r . Voyons maintenant le lien entre ces intervalles, les inéquations et les valeurs absolues !

METHODE 6 : Comment utiliser la caractérisation $|x-a| \leq r$?

■ Principe :

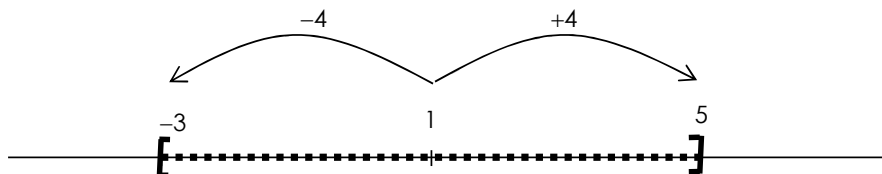
$|x-a|$ est graphiquement la distance de x à a . $|x-a| \leq r$ signifie donc que la distance de x à a est inférieure ou égale à r .



Ainsi : $|x-a| \leq r$ équivaut à : $a-r \leq x \leq a+r \Leftrightarrow x \in [a-r; a+r]$.

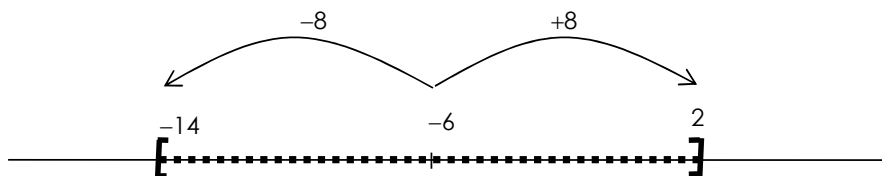
Cette caractérisation va maintenant nous permettre de résoudre graphiquement des inéquations !

■ **Exemple :** Résoudre l'inéquation $|x - 1| \leq 4$.



Ainsi $|x - 1| \leq 4$ équivaut à $-3 \leq x \leq 5$ c'est-à-dire $x \in [-3; 5]$. Donc $S = [-3; 5]$.

■ **Exemple :** Résoudre l'inéquation $|x + 6| \leq 8$.



Ainsi $|x + 6| \leq 8 \Leftrightarrow -14 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-14; 2]$. Donc $S = [-14; 2]$.

Et voilà, c'en est fini des valeurs absolues. Facile, n'est-ce pas ?

5. Nombres décimaux, valeurs approchées et encadrements

C'est quoi un décimal ? Eh bien c'est un nombre qui possède un nombre fini de chiffres après la virgule.

Par exemple : 23,567 ; -12,1 ; 53 mais pas $\frac{1}{3} = 0,33333\dots$ (car le développement décimal ne s'arrête pas).

Concernant les nombres décimaux, il y a un certain nombre de choses à connaître. On vous montre lesquelles (Eh reposez votre smartphone ! C'est le moment de vous réveiller et de suivre un peu).

METHODE 7 : Comment écrire un nombre décimal positif en notation scientifique ?

C'est ce qu'utilisent les ingénieurs et les physiciens (c'est donc incontournable !). Nous on le fait, parce que la notation scientifique est très utilisée en chimie, mécanique... électricité. L'idée est la suivante : donner un ordre de grandeur aux nombres et aux choses. Par exemple l'atome est de l'ordre de l'infiniment petit, plus précisément de l'ordre du nanomètre soit

10^{-9} mètre. Les galaxies par contre sont de l'ordre de l'infiniment grand : la nôtre par exemple, c'est-à-dire la voie lactée a un diamètre de l'ordre de 10^{21} mètre ! Rien à voir, donc. Voyons maintenant en détail comment faire. Tout nombre décimal positif peut s'écrire sous la forme $a \cdot 10^n$ avec : $1 \leq a < 10$ et n entier. Cette écriture s'appelle notation scientifique (ou ingénieure) et dans l'écriture $a \cdot 10^n$, 10^n s'appelle l'ordre de grandeur. Il faut bien connaître vos puissances de 10, car on va les utiliser tout le temps !

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000	1.000.000.000
10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^9

1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,000000001
10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}

Voici un moyen tout simple de s'en souvenir : on compte le nombre de zéros !
 Par exemple : 100.000.000.000 comporte 11 zéros après le 1, c'est donc 10^{11} .
 Par exemple : 0,000001 comporte 6 zéros en tout (attention à bien compter le zéro avant la virgule), c'est donc 10^{-6} (Attention, la puissance est négative car le nombre est entre 0 et 1). Bien, et ensuite, que faire ?

■ Principe

- Repérer entre quelles puissances de 10 consécutives se trouve le nombre.
- En déduire une factorisation par la première puissance de 10, pour trouver le nombre a .
- En déduire n .

■ Exemple : Ecrire 12,758 en notation scientifique.

12,758 est entre 10 et 100, donc on va factoriser par 10 ce qui donne :

$12,758 = 1,2758 \times 10$ et donc : $12,758 = 1,2758 \times 10^1$. Facile, non ?

■ Exemple (automatisme) : Ecrire les nombres suivants en notation scientifique.

- a) 123,4 b) 5037 c) 0,659 d) 0,034

a) 123,45 est entre 100 et 1000, donc : $123,45 = 1,2345 \cdot 100$ et donc :

$123,45 = 1,2345 \cdot 10^2$.

b) 5037 est entre 1000 et 10000 d'où : $5037 = 5,037 \cdot 1000$ soit : $5037 = 5,037 \cdot 10^3$.

c) 0,659 est entre 0,1 et 1, d'où : $0,659 = 6,59 \cdot 0,1$ d'où : $0,659 = 6,59 \cdot 10^{-1}$.

f) 0,034 est entre 0,01 et 0,1 d'où : $0,034 = 3,4 \cdot 0,01$ soit : $0,034 = 3,4 \cdot 10^{-2}$.

REMARQUE : Avec un peu d'habitude, vous n'aurez même plus besoin d'écrire toutes ces étapes pour trouver le résultat. Evidemment, il faut s'entraîner !

METHODE 8 : Comment donner une valeur approchée d'un nombre à 10^{-n} près ?

Pour commencer, une valeur approchée c'est une valeur tronquée.

Il n'y a d'ailleurs pas qu'un seul type de valeur approchée : il y a les valeurs approchées par défaut (légèrement en dessous), par excès (légèrement au-dessus) et arrondie (la plus proche de la valeur). Voyons cela !

■ Principe

Le plus simple est d'étudier un exemple : $\pi = 3,14159\dots$ (à la calculatrice)

Si on demande une valeur approchée à 10^{-3} près, on garde les deux premiers chiffres après la virgule (c'est-à-dire 1 et 4), et pour le troisième :

- a) On prend 1 pour une valeur approchée par défaut, ce qui donne : **3,141**.
- b) On prend 2 pour une valeur approchée par excès, ce qui donne : **3,142**.
- c) On prend 2 pour une valeur arrondie car 159 est plus proche de 200 que de 100, ce qui donne **3,142**.

Quoi qu'il en soit, un réel a dont on donne une valeur approchée b à 10^{-n} près vérifie l'inégalité $|a - b| \leq 10^{-n}$.

■ Exemple : Donner les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

a) par défaut b) par excès c) arrondie.

A la calculatrice, $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

- a) La valeur approchée à 10^{-5} près par défaut de $\sqrt{2}$ est : **1,41421**.
- b) La valeur approchée à 10^{-5} près par excès de $\sqrt{2}$ est : **1,41422**.
- c) La valeur arrondie à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$ est : **1,41421** car 13562 est plus proche de 10000 que de 20000.

■ Exemple : Donner les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près.

a) par défaut b) par excès c) arrondie.

A la calculatrice, $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

- a) La valeur approchée à 10^{-6} près par défaut de $\sqrt{2}$ est : **1,414213**.
- b) La valeur approchée à 10^{-6} près par excès de $\sqrt{2}$ est : **1,414214**.
- c) La valeur arrondie à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$ est : **1,414214** car 3562 est plus proche de 4000 que de 3000.

■ Exemple (automatisme) : Donner la valeur approchée arrondie au centième (ou à 10^{-2} près) de $\frac{2}{3}$.

On a $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$ donc la valeur approchée arrondie au centième est 0,67.

METHODE 9 : Comment donner un encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près ?

On dit que $a < x < b$ est un encadrement décimal du nombre x à 10^{-n} près lorsque $b - a = 10^{-n}$. Par exemple $3,14 < \pi < 3,15$ est un encadrement de $\pi = 3,14159\dots$ à 10^{-2} près.

■ **Principe**

Pour obtenir un encadrement décimal 10^{-n} près, il suffit d'une valeur approchée par défaut (à 10^{-n} près) et d'une valeur approchée par excès (à 10^{-n} près).

■ **Exemple** : Donner un encadrement décimal à 10^{-5} du nombre réel $\sqrt{2}$.
a) par défaut b) par excès c) arrondie.

A la calculatrice, $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

- La valeur approchée à 10^{-5} près par défaut de $\sqrt{2}$ est : **1,41421**.

- La valeur approchée à 10^{-5} près par excès de $\sqrt{2}$ est : **1,41422**.

Ainsi, un encadrement décimal à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$ est : **$1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$** .

■ **Exemple (automatisme)** : Donner un encadrement au dixième de $\frac{1}{3}$.

A la calculatrice, $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$ Au dixième $0,3 < \frac{1}{3} < 0,4$.

6. Nombres rationnels et irrationnels

METHODE 10 : Comment s'y retrouver entre nombre rationnel, nombre décimal et nombre irrationnel ?

■ **Principe**

Un nombre **rationnel** est un nombre réel pouvant s'écrire comme fraction de deux entiers. Par exemple $\frac{13}{7}$, $-\frac{144}{11}$, etc.

Un nombre **décimal** est rationnel (par exemple $0,25 = \frac{1}{4}$, $0,5 = \frac{1}{2}$, $0,75 = \frac{3}{4}$, $0,2 = \frac{1}{5}$, $0,4 = \frac{2}{5}$, $0,6 = \frac{3}{5}$, $0,8 = \frac{4}{5}$,) mais attention tout nombre rationnel n'est

pas décimal (par exemple $\frac{1}{3} \approx 0,333\ldots$ n'est pas décimal car son développement décimal ne s'arrête pas).

Un nombre **irrationnel** est un nombre qui n'est pas rationnel, c'est-à-dire ne pouvant pas s'écrire comme fraction de deux entiers. On les reconnaît facilement à leur développement décimal infini et très irrégulier (par exemple la longueur de la diagonale du carré de côté 1, à savoir $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$ est nombre irrationnel. Le périmètre d'un cercle de diamètre 1, à savoir $\pi = 3,14159265\ldots$ est un nombre irrationnel.

■ **Exemple :** Déterminer la nature (rationnel, décimal, ou irrationnel) des nombres suivants :

a) 3,7 b) -0,68 c) $\frac{1}{7}$ d) $\sqrt{7}$ e) $2\pi \times 4$ f) 1,666...

a) Le développement décimal est fini, donc 3,7 est décimal et donc rationnel car $3,7 = \frac{37}{10}$.

b) Le développement décimal est fini, donc $-0,68$ est décimal et donc rationnel car $-0,68 = -\frac{68}{100}$.

c) $\frac{1}{7}$ est un rationnel (car c'est une fraction d'entiers) mais comme $\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$ a un développement décimal infini, il n'est pas décimal.

d) $\sqrt{7} = 2,64575131106\dots$ a un développement décimal infini et irrégulier, on a donc : $\sqrt{7}$ est irrationnel.

e) $2\pi \times 4 = 8\pi = 25,1327412287\dots$ a un développement décimal infini et irrégulier (c'est normal puisqu'il fait intervenir π qui est de même nature, c'est-à-dire irrationnel), donc $2\pi \times 4$ est irrationnel.

f) 1,666... a un développement décimal infini et périodique (il s'agit de la fraction $\frac{5}{3}$) donc 1,666... est un rationnel mais n'est pas un décimal.

REMARQUE : Voici un petit récap' :

- *Décimal* : 0,34 ; 5,136.
- *Rationnel* : $\frac{5}{3} = 1,666\dots$, $0,15 = \frac{15}{100}$ (tout décimal est donc un rationnel).
- *Irrationnel* : $\pi = 3,14159\dots$, $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

■ **Exemple (automatisme) : QCM.** Le nombre 3,65 est

a) entier
b) irrationnel
c) rationnel mais non décimal
d) décimal et rationnel

Bonne réponse : d) décimal et rationnel.

En effet, le développement décimal est fini et $3,65 = \frac{365}{100}$.

METHODE 11 : Comment mémoriser les deux exemples d'irrationnels issus de la géométrie ?

■ Principe

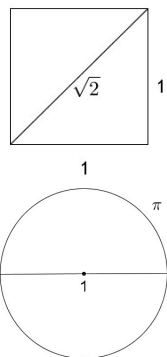
En pensant à un carré et à un rond !

1) La longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$ (d'après Pythagore) et Pythagore était intrigué par ce nombre très simple à construire et qui ne pouvait pas s'écrire comme une fraction de deux entiers.

2) Le périmètre d'un cercle de diamètre 1 vaut π .

Le cercle fascinait toutes les civilisations antiques (les Egyptiens, les Mésopotamiens et les Grecs). Le nombre π (baptisé ainsi par Archimède) est encore de nos jours étudié. Il ne peut pas s'écrire comme fraction de deux entiers, on doit se contenter de valeurs approchées.

Et voilà, terminé, c'est l'heure de passer aux exos mais comme on est sympa et qu'on vous aime bien on a fait un rappel de tout ce qu'il fallait retenir sous forme de réflexes !



Réflexes

	SITUATIONS	REFLEXES
1.	Traduire des inégalités en intervalle	Utiliser et maîtriser le tableau de conversions.
2.	Traduire un intervalle en inégalités	Utiliser et maîtriser le tableau de conversions.
3.	Déterminer la distance entre a et b	Calculer $ a - b $.
4.	Résoudre $ x - a \leq r$ ($r \geq 0$)	Utiliser l'équivalence $ x - a \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$ et un dessin !
5.	Ecrire un nombre décimal en notation scientifique	Se ramener à l'écrire sous la forme $a \cdot 10^n$ où $1 \leq a < 10$ et n entier.
6.	Donner une valeur approchée d'un nombre	Bien étudier ce qui est demandé, est-ce : ▪ une valeur approchée par défaut ? ▪ une valeur approchée par excès ? ▪ une valeur approchée arrondie ?
7.	Encadrer un nombre réel	Encadrer par une valeur approchée par défaut et une valeur approchée par excès
8.	Déterminer la nature d'un nombre	Fraction de deux entiers : rationnel Développement décimal fini : décimal et rationnel. Développement décimal infini régulier : rationnel Développement décimal infini irrégulier : irrationnel

Astuces

■ $\mathbb{N}$ comme entier **N**aturel, $\mathbb{D}$ comme nombre **D**écimal, $\mathbb{R}$ comme nombre **R**éel, bien jusqu'ici tout va bien on comprend l'origine de ces notations, mais pourquoi $\mathbb{Z}$ pour les entiers Relatifs (entiers négatifs et positifs) et $\mathbb{Q}$ pour les nombres Rationnels (c'est-à-dire les fractions d'entier) ?

La réponse est en Europe ! $\mathbb{Z}$ est l'initiale de **Z**ahlen qui en allemand signifie compter. $\mathbb{Q}$ est l'initiale de **Q**uotiente qui en italien signifie Quotient.

Historiquement $\mathbb{N}$ est l'initiale du mot italien **N**aturale et $\mathbb{R}$ l'initiale du mot allemand **R**eal. Toutes ces notations (sauf $\mathbb{D}$, française) sont donc italiennes et allemandes comme leurs inventeurs : Giuseppe Peano (1858-1932) pour l'Italie et Richard Dedekind (1831-1916) pour l'Allemagne. Ah l'Europe...

■ Les intervalles servent essentiellement à trois choses :

- la résolution algébrique d'inéquations (genre résoudre $2x + 3 \geq 0$) ;
- la résolution graphique d'inéquations (genre résoudre $f(x) \geq 0$ où f est une fonction) ; nous les retrouverons donc bien sûr dans le chapitre 10 ;
- les domaines de définition de fonctions (même si ce n'est pas tellement difficile).

■ L'intervalle a un sens en français assez peu éloigné du sens mathématique. En effet, si l'on y réfléchit bien, lorsque vous regardez un film policier, l'heure du crime s'exprime souvent sous la forme d'un intervalle : si le crime a eu lieu entre 2 heures et 3 heures du matin, on a donc : crime $\in [2;3]$.

■ Il faut bien sûr bien connaître les puissances de dix, qui sont très souvent utilisées en physique notamment lors des comparaisons de distance : les puissances de dix à exposant positif pour les distances astronomiques, celles à exposant négatif pour l'infiniment petit : les atomes, les molécules.

Erreurs

■ Ne pensez pas que $]-\infty;2[$ "c'est pareil" que $]-\infty;1,9]$! Non ! $]-\infty;2[$ signifie que l'on prend tous les nombres strictement plus petits que 2 comme 1,9 c'est vrai mais aussi comme 1,99 qui lui n'appartient pas à $]-\infty;1,9]$!

■ $|5 - 8|$ ne vaut pas $|5| - |8|$. En effet $|5 - 8| = |-3| = 3$ alors que $|5| - |8| = 5 - 8 = -3$.

Démonstrations-algorithme-approfondissements

Démonstrations	Algorithme	Approfondissements
Démo 1 - Démo 2	Algo 1	Approf 1 - Approf 2

Chapitre 2

METHODES D'ARITHMETIQUE

Les multiples, les diviseurs, c'est vraiment la base de l'arithmétique, on en fait d'ailleurs un paquet au collège. Mais bon, il vaut mieux revoir tout cela (bah oui parce qu'il y a eu... LES VACANCES !). Les nombres premiers, quant à eux, sont toujours un sujet d'étude inépuisé des mathématiciens. Leurs applications sont partout : communications téléphoniques, transactions et achats internet, même le simple message que vous venez d'envoyer à votre correspondant a été probablement crypté puis décrypté par des algorithmes utilisant des nombres premiers).

Sans vouloir faire de vous un hacker maîtrisant à mort les secrets de l'arithmétique et du secret des cartes bancaires ou de la cryptomonnaie, on va vous tout revoir en commençant par les bases à un rythme cool. Allez posez votre tel', c'est parti !

1. Ensemble $\mathbb{N}$ et ensemble $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{N}$ ce sont les premiers nombres qu'on apprend à l'école (0, 1, 2, 3, etc.) on les appelle d'ailleurs entiers naturels.

L'ensemble $\mathbb{Z}$, c'est la même chose mais avec les négatifs en plus (c'est-à-dire 0, 1, 2, 3, ... mais aussi -1, -2, -3 ...). Ainsi $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$.

METHODE 1 : Comment déterminer l'ensemble (parmi $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$) "le plus petit" auquel appartient un nombre ?

■ Principe

Rappelons que :

l'ensemble "le plus petit" auquel appartient un nombre (parmi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$) est :

a) $\mathbb{N}$ pour tous les nombres entiers positifs : 0, 1, 2, 3, ..., 14587, ...

b) $\mathbb{Z}$ pour tous les nombres entiers strictement négatifs : ... -237, ..., -3, -2, -1.

■ Exemple : Déterminer à quel ensemble ($\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$) appartiennent les nombres suivants :

a) 13 b) -77 c) $15 - 46$ d) $(-2\sqrt{3})^2$ e) $(3\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{3})^2$

a) 13 est un entier positif donc $13 \in \mathbb{N}$ et donc $13 \in \mathbb{Z}$.

b) -77 est un entier négatif donc $-77 \in \mathbb{Z}$ (mais $-77 \notin \mathbb{N}$).

c) $15 - 46 = -31$ donc $15 - 46 \in \mathbb{Z}$ mais $15 - 46 \notin \mathbb{N}$.

$$d) (-2\sqrt{3})^2 = (-2\sqrt{3}) \times (-2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 4 \times 3 = 12$$

donc $(-2\sqrt{3})^2 \in \mathbb{N}$ et donc $(-2\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Z}$.

$$e) (3\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{3})^2 = 3 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} - 5 \times 5 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 9 \times 5 - 25 \times 3 = 45 - 75 = -30$$

donc $(3\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Z}$ mais $(3\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{N}$.

■ **Exemple (automatisme) : Vrai ou faux :** $(\sqrt{11})^2 - (2\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Z}$ mais $(\sqrt{11})^2 - (2\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{N}$.

Réponse : Vrai.

Justification : $(\sqrt{11})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 11 - 4 \times 3 = 11 - 12 = -1$ donc $(\sqrt{11})^2 - (2\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Z}$

mais $(\sqrt{11})^2 - (2\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{N}$.

2. Multiples et diviseurs

METHODE 2 : Comment exploiter algébriquement un multiple, un diviseur ?

■ Principe

- 1) Un multiple n de m s'écrit de la forme $n = km$ avec k entier.
- 2) On dit que m est un diviseur de n lorsqu'il existe un entier k tel que $n = km$.

■ **Exemple :** 1) Déterminer la forme des entiers pairs.

2) En déduire la forme des entiers impairs.

1) Les entiers pairs sont les entiers qui sont multiples de 2, ils sont de la forme $2k$ avec k entier.

2) Les entiers impairs sont les entiers qui ne sont pas divisibles par 2, ils sont donc de la forme $2k+1$ avec k entier.

Remarque : $2k+2 = 2(k+1)$ est pair, $2k+3 = 2(k+1)+1$ est impair,

$2k+4 = 2(k+2)$ est pair, etc.

■ **Exemple :** 1) Déterminer la forme des multiples de 3.

2) En déduire la forme des entiers qui ne sont pas divisibles par 3.

1) Les multiples de 3 sont de la forme $3k$ avec k entier.

2) Les entiers qui ne sont pas divisibles par 3 sont donc de la forme $3k+1$ ou $3k+2$ avec k entier.

REMARQUE : $3k+3=3(k+1)$ est un multiple de 3, $3k+4=3(k+1)+1$ n'est pas divisible par 3, $3k+5=3(k+1)+2$ n'est pas divisible par 3, $3k+6=3(k+2)$ est un multiple de 3, etc.

■ **Exemple (automatisme)** : Donner, sans justification, une écriture algébrique adaptée :

- 1) d'un entier pair.
- 2) d'un entier impair.
- 3) d'un entier non divisible par 3.

- 1) $2k$ avec k entier.
- 2) $2k+1$ avec k entier.
- 3) $3k+1$ ou $3k+2$ avec k entier.

Pour aller plus vite et repérer par quoi un nombre est divisible, il faut connaître à fond les critères de divisibilité suivants :

METHODE 3 : Comment savoir si un entier est un multiple de 2 (ou admet 2 comme diviseur) ?

■ **Principe**

Un entier est pair si son chiffre des unités est pair (comme 28 ou 300. On rappelle que 0, 2, 4, 6, 8 sont pairs !).

METHODE 4 : Comment savoir si un entier est un multiple de 3 (ou admet 3 comme diviseur) ?

■ **Principe :**

Un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres l'est (comme 627 : la somme de ses chiffres $6+2+7=15$ est divisible par 3 !).

METHODE 5 : Comment savoir si un entier est un multiple de 4 (ou admet 4 comme diviseur) ?

■ **Principe**

Un entier est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres forment un entier qui l'est (comme 3132 : ses deux derniers chiffres forment le nombre 32 qui est divisible par 4).

METHODE 6 : Comment savoir si un entier est un multiple de 5 (ou admet 5 comme diviseur) ?**■ Principe**

Un entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 (comme 70 ou 155).

METHODE 7 : Comment savoir si un entier est un multiple de 6 (ou admet 6 comme diviseur) ?**■ Principe**

Un entier est divisible par 6 s'il est à la fois divisible par 2 et par 3 (comme 144 : 144 est divisible par 2 car il est pair et divisible par 3 car la somme de ses chiffres $1+4+4=9$ l'est).

METHODE 8 : Comment savoir si un entier est un multiple de 9 (ou admet 9 comme diviseur) ?**■ Principe**

Un entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres l'est (comme 927 : la somme de ses chiffres $9+2+7=18$ l'est).

METHODE 9 : Comment savoir si un entier est un multiple de 10 (ou admet 10 comme diviseur) ?**■ Principe**

Un entier est divisible par 10 si son dernier chiffre est 0 (comme 70 ou 5470).

■ Exemple (automatisme) : Sans justifier, répondre par Vrai ou faux.

- 1) 21 est divisible par 2.
- 2) 45 est divisible par 3.
- 3) 240 est divisible par 4.
- 4) 36 est divisible par 5.
- 5) 72 est divisible par 6.
- 6) 324 est divisible par 9.
- 7) 125 est divisible par 10.

- 1) Faux. 2) Vrai. 3) Vrai. 4) Faux. 5) Vrai 6) Vrai 7) Faux.

3. Nombres premiers

METHODE 10 : Comment déterminer des nombres premiers ?

Si on le savait, on serait riche ! Il y a un enjeu économique et stratégique à découvrir de nouveaux nombres premiers car ils servent à coder, au moyen de l'informatique, toutes sortes de choses : les transactions bancaires, les transactions Internet, les messages et les ordres militaires, ... et pour que le code soit robuste, il faut des nombres premiers très grands ! (afin que le premier hacker venu ne le découvre pas en deux, trois minutes).

(Rappelons, bien sûr, qu'un nombre premier est un nombre qui n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même).

Néanmoins, dès l'Antiquité le savant grec Eratosthène avait mis au point un système pour les déterminer. Le problème est que ce système, appelé crible, fonctionne beaucoup trop lentement (il faudrait des siècles et des siècles pour déterminer un nouveau nombre premier). Par exemple, il est inexploitable en temps de calcul pour déterminer les nombres premiers d'aujourd'hui de l'ordre de millions de chiffres ! Nous allons donc nous contenter de l'utiliser pour déterminer tous les nombres premiers de 1 à 100.

■ Principe :

Construire un tableau 10×10 contenant tous les entiers de 1 à 100.

- Barrer 1 qui n'est pas premier (c'est une convention).
- Entourer le 2 et barrer tous ses multiples : c'est-à-dire 4, 6, 8, ..., 98, 100.
- Entourer le 3 et barrer tous ses multiples : c'est-à-dire 6, 9, 12, 15, ..., 96, 99.
- 4 et ses multiples, c'est déjà fait (à cause de 2), passons !
- Entourer le 5 et barrer tous ses multiples : 10, 15, 20, ...
- 6 c'est fait (à cause de 3), passons !
- Entourer le 7 et barrer tous ses multiples : 14, 21, ...
- 8 déjà fait (à cause de 2) et 9 également (à cause de 3). Stop, on s'arrête (on arrête à 10).

Les nombres qui restent (c'est-à-dire ceux qui n'ont pas été barrés) sont les nombres premiers compris entre 1 et 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ainsi les nombres premiers compris entre 1 et 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, et 97.

METHODE 11 : Comment savoir si un entier est premier ?**■ Principe**

Un entier est premier s'il n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même.

Si le nombre est petit, on peut donc étudier tous les diviseurs entre 1 et lui-même.

En revanche, si le nombre est grand, cela serait trop long. Heureusement, on dispose d'un théorème d'Eratosthène (encore lui !) qui nous dit la chose suivante :

Théorème : si aucun des entiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$ ne divise n , alors n est premier. (Quel gain de temps, vous allez voir !)

■ Exemple (avec un nombre petit) : Montrer que 5 est premier.

Comme le nombre est petit, on peut regarder tous les cas (entre 1 et 5).

1 divise 5, 2 ne divise pas 5, 3 ne divise pas 5, 4 ne divise pas 5, et 5 divise 5.

Les seuls diviseurs de 5 sont 1 et 5, par conséquent 5 est premier.

■ Exemple (avec un nombre grand) : Montrer que 113 est premier.

Cette fois, le nombre est grand. Eratosthène va nous simplifier la vie : plutôt que de tester tous les diviseurs entre 2 et 113, on va tester uniquement ceux compris entre 2 et $\sqrt{113}$. Merci, Eratosthène !

On a $\sqrt{113} \approx 10,6$, donc on va tester si les nombres compris entre 2 et 10 divisent 113.

2 ne divise pas 113 (car 113 n'est pas pair), 3 ne divise pas 113 (car la somme de ses chiffres n'est pas divisible par 3), 4 ne divise pas 113 (sinon 2 le diviserait), 5 ne divise pas 113 (car 113 ne finit pas par 0 ni par 5), 6 ne divise pas 113 (sinon 2 le diviserait aussi), 7 ne divise pas 113 (car $\frac{113}{7} \approx 16,1$), 8 ne divise pas 113 (sinon 2 le diviserait aussi), 9 ne divise pas 113 (sinon 3 le diviserait aussi), 10 ne divise pas 113 (car 113 ne finit pas par 0).

Conclusion : 113 est premier.

■ Exemple (automatisme) : QCM : Parmi les entiers suivants, déterminer lequel est premier. a) 63 b) 71 c) 82 d) 121

Réponse : b) 71.

METHODE 12 : Comment décomposer un nombre en produit de facteurs premiers ?**■ Principe :**

Un bon moyen de procéder est de diviser tant qu'on peut par 2, puis par 3, puis par 5, etc. (c'est-à-dire par les nombres premiers eux-mêmes.)

Bien sûr, il faut repérer les nombres :

- divisibles par 2, c'est-à-dire les nombres pairs (122, 250, 328, ...) ;
- divisibles par 3, c'est-à-dire ceux dont la somme des chiffres est divisible par 3 (comme 123, 258, ...) ;
- divisibles par 5, c'est-à-dire ceux qui se finissent par 5 ou 0 (comme 100, 155, ...).

■ **Exemple** : Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 180.

$$180 = 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 45 = 2 \times 2 \times 3 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5. \text{ Stop !}$$

On a donc la décomposition : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

■ **Exemple** : Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de

a) 18

b) 100

c) 270

On a :

$$a) 18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2.$$

$$b) 100 = 2 \times 50 = 2 \times 2 \times 25 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2.$$

$$c) 270 = 2 \times 135 = 2 \times 3 \times 45 = 2 \times 3 \times 3 \times 15 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5.$$

■ **Exemple (automatisme)** : Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 30.

Réponse : $30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$.

METHODE 13 : Comment utiliser une décomposition en facteurs premiers pour simplifier une fraction ?

■ **Principe** :

Appliquez la méthode précédente au numérateur et au dénominateur puis simplifiez. (Décomposez par exemple 8 en $2 \times 2 \times 2$, 54 en $2 \times 3 \times 3 \times 3$, puis éliminez !).

■ **Exemple** : Mettre sous forme irréductible la fraction suivante $\frac{45}{60}$.

On décompose en facteurs premiers 45 ($45 = 3^2 \times 5$) puis 60 ($60 = 2^2 \times 3 \times 5$) ce

$$\text{qui donne : } \frac{45}{60} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{3^1}{2^2}.$$

REMARQUES :

a) On obtient là vraiment la simplification la plus aboutie.

b) Certaines calculatrices peuvent décomposer n'importe quel entier (pas trop grand) en produit de nombres premiers et donc simplifier n'importe quelle fraction d'entiers ! Elles ne font d'ailleurs pas que ça, vous n'avez pas idée de

ce qu'elles savent faire ! Attention, les calculatrices sont en général interdites pendant les automatismes. Certains professeurs les interdisent également aux DS (enfin on parle de ceux qui les connaissent) : souvent à cause de nombreux sites Internet permettant de télécharger sur ces petites machines des cours tout faits, des triches en tout genre, des gruges affichées et honteuses ! Ne nous voilons pas la face, c'est une pratique plus courante qu'on ne le croit, cela ne veut pas dire que l'on vous encourage à le faire d'autant plus que ça n'est pas forcément si efficace si l'on en croit les déclarations de certains élèves : "Monsieur, de toute façon les gruges des autres on n'y comprend rien, rien ne vaut la propre gruge qu'on a rentrée soi-même dans sa calculatrice".

Sans commentaire... c'est une honte ! (Mais en même temps il y a un peu de vrai là dedans...) : l'élève qui a dit cela a été collé quatre heures, sa calculatrice fut saisie et fouillée de fond en comble... (mais non, on plaisante...).

■ **Exemple (automatisme) :** Mettre sous forme irréductible $\frac{18}{24}$.

Réponse : $\frac{18}{24} = \frac{2 \times 3^2}{2^3 \times 3} = \frac{3^1}{2^2}$.

Réflexes

	SITUATIONS	REFLEXES
1.	Déterminer l'ensemble le plus petit auquel appartient un nombre (parmi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$)	Bien regarder si le nombre est entier et s'il est négatif ou positif.
2.	Critères de divisibilité	Un entier est pair si son chiffre des unités est pair. Un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres l'est. Un entier est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres forment un entier qui l'est. Un entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5. Un entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et par 3. Un entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres l'est. Un entier est divisible par 10 si son dernier chiffre est 0.
3.	Déterminer de "petits" nombres premiers (entre 1 et 100 par exemple)	Utiliser le crible d'Eratosthène.
4.	Savoir si un entier n est premier	Utiliser le théorème d'Eratosthène : « Si aucun des entiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$ ne divisent n , alors n est premier. »
5.	Trouver la décomposition en facteurs premiers d'un nombre	Diviser tant qu'on peut par 2, par 3, par 5, etc. (nombres premiers)

Astuces

■ Dans ce chapitre, nous avons vu quelques nombres premiers. Voici un conseil : on l'a déjà dit mais si vous voulez devenir riche, alors partez à la recherche de nouveaux nombres premiers ! (C'est une façon un peu intéressée de voir les Maths, mais bon...)

Si vous faites plus tard une terminale avec beaucoup de maths, vous serez déjà initié à l'arithmétique et à la cryptographie (donc sur la bonne voie !).

■ Pour continuer sur les nombres premiers, sachez qu'une fameuse conjecture, très simple à comprendre, n'est toujours pas démontrée (c'est d'ailleurs ce qui fait d'elle une conjecture, car si elle était démontrée, la conjecture deviendrait théorème !). Il s'agit de la conjecture de Goldbach, dont voici l'énoncé : "Tout entier pair (supérieur ou égal à 4) est somme de deux nombres premiers" Vous pouvez essayer, ça marche !

$4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11 = 7 + 7$,
 $16 = 3 + 13 = 5 + 11$, $18 = 5 + 13 = 7 + 11$, ... $128 = 19 + 109$...

D'après la communauté mathématique, pour tous les entiers pairs compris entre 4 et $4 \cdot 10^{18}$, on a déjà vérifié que ça marchait : ce qui ne prouve pas pour autant (loin s'en faut) que c'est vrai pour tous les autres entiers pairs puisqu'il y en a une infinité. Voici donc un défi passionnant, avec à la clé une gloire certaine ! (Vous avez vu, on essaie de vous motiver !) Cette conjecture est citée dans le 8^e problème de Hilbert (liste de problème posée par l'un des plus grands mathématiciens du vingtième siècle). Les problèmes de Hilbert sont au nombre de 23, ils ne sont pas tous résolus et certains d'entre eux sont même mis à prix 1 million de dollars par la communauté scientifique. Vous voyez qu'en plus de la gloire, vous pouvez même devenir riche en résolvant un des problèmes de Hilbert !

■ Eratosthène est surtout célèbre pour être le premier à avoir calculé le rayon de la Terre (sacré exploit !). Fallait le faire tout de même, on vous rappelle qu'à l'époque il n'y avait pas de satellite ! Comment a-t-il fait ? Eh bien en utilisant des méthodes mathématiques ! (Vous vous doutiez qu'il n'avait pas creusé le sol avec son mètre ruban en espérant traverser la Terre...). Ah Eratosthène, sur ce coup-là, j'en connais plusieurs qui diraient qu'il déchire (enfin peut-être qu'ils le diraient autrement, mais l'esprit et l'admiration y seraient tout autant présents).

Erreurs

■ Un multiple de 6 est aussi un multiple de 3 mais pas l'inverse. Par exemple 15 est un multiple de 3 mais pas de 6.

■ Le nombre 1 n'est pas premier. Le tout premier nombre premier est pair, il s'agit de 2 (inutile de préciser que c'est le seul nombre premier qui soit pair).

■ Les nombres premiers ne sont pas en nombre fini ! Non, il y en a une infinité et donc toujours de nouveaux à découvrir !

Démonstrations, algorithmes

Démonstrations	Algorithmes
Démo 3 - Démo 4	Algo 2 - Algo 3

Chapitre 3

METHODES D'ALGEBRE

Le calcul littéral, c'est vraiment le b.a.-ba des mathématiques et c'est pourquoi on vous en a fait faire pas mal au collège. Comme il y a eu les vacances, ne nous leurrions pas, il y a un risque important que vous ayez tout oublié (ne soyons pas naïfs, le cahier de maths de l'an dernier est soit parti en cendres après avoir servi à allumer le barbecue, soit il sert à caler la table sur laquelle est posée la console de jeux que vous ne quittez plus depuis trois mois comme en témoignent sans doute vos yeux déjà rougis, si, si, ne dites pas le contraire !). Heureusement, nous sommes là, pour vous remémorer ce que vous n'auriez pas dû oublier car en seconde vos professeurs aiment bien démarrer sur les chapeaux de roues, considérant que tout ça est acquis et qu'ils n'ont plus le devoir de le refaire. Nous on a décidé de vous le rappeler, premièrement parce qu'on vous aime bien, deuxièmement parce qu'on se met à votre place : que faire si on ne souvient plus d'une technique de calcul, d'une méthode de simplification, bref si on ne sait plus comment calculer !

Tout est là, oui tout (ouf !), car grâce à Method' : aucun risque d'amnésie ! (Alors, soulagé ?) Pour égayer ce chapitre, nous l'avons agrémenté des plus belles bourdes calculatoires que vous ne devez jamais faire ! (voir partie Erreurs). En attendant la bonne rigolade, attachez vos ceintures, éteignez votre console (ou votre smartphone), serrez les dents : et oui, il faut y aller maintenant !

1. Comment simplifier une expression fractionnaire ?

METHODE 1 : Utiliser la décomposition en facteurs premiers

■ Principe

Voir chapitre 2, méthode 12.

■ **Exemple** : Simplifier "le plus possible" (mettre sous forme irréductible) les fractions suivantes : a) $\frac{432}{192}$ b) $\frac{540}{81}$

$$\text{On a : a) } \frac{432}{192} = \frac{2^4 \times 3^3}{2^6 \times 3} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} . \quad \text{b) } \frac{540}{81} = \frac{2^2 \times 3^3 \times 5}{3^4} = \frac{2^2 \times 5}{3} = \frac{20}{3} .$$

■ **Exemple (automatisme)** : Réduire $\frac{100}{28}$

$$\text{On a : } \frac{100}{28} = \frac{2^2 \times 5^2}{2^2 \times 7} = \frac{5^2}{7} .$$

METHODE 2 : Simplifier petit à petit

■ Principe

Divisez (le plus possible) numérateur et dénominateur par 2 puis par 3, puis par 5, ... à la fin vous obtiendrez la simplification souhaitée ! Inconvénient de cette méthode : c'est parfois un peu long !

■ **Exemple** : Simplifier "le plus possible" (mettre sous forme irréductible) la fraction suivante : $\frac{432}{192}$.

$$\text{On a } \frac{432}{192} = \frac{2 \times 216}{2 \times 96} = \frac{216}{96} = \frac{2 \times 108}{2 \times 48} = \frac{108}{48} = \frac{2 \times 54}{2 \times 24} = \frac{54}{24} = \frac{2 \times 27}{2 \times 12} = \frac{27}{12} = \frac{3 \times 9}{3 \times 4} = \frac{9}{4}.$$

■ **Exemple (automatisme)** : Réduire $\frac{540}{81}$.

$$\text{On a : } \frac{540}{81} = \frac{2 \times 270}{3 \times 27} = \frac{2 \times 10 \times 27}{3 \times 27} = \frac{20}{3}.$$

METHODE 3 : Utiliser les règles sur les fractions

■ Principe

Il s'agit d'utiliser les règles suivantes, pour $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} & \text{b) } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} \quad \text{c) } \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b \times c} \quad \text{d) } \frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b} \end{array}$$

■ **Exemple** : Simplifier "le plus possible" (mettre sous forme irréductible) les fractions suivantes : a) $\frac{1}{0,5}$ b) $\frac{0,75}{0,25}$ c) $\frac{1,5}{1,75}$ d) $\frac{5}{0,4}$

$$\text{On a : a) } \frac{1}{0,5} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2. \quad \text{b) } \frac{0,75}{0,25} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{1} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$\text{c) } \frac{1,5}{1,75} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{4}} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{2 \times 7} = \frac{3 \times 2}{7} = \frac{6}{7}. \quad \text{d) } \frac{5}{0,4} = \frac{5}{\frac{4}{10}} = 5 \times \frac{10}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}.$$

■ **Exemple (automatisme)** : Réduire $\frac{2}{0,25}$.

$$\text{On a : } \frac{2}{0,25} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{1} = 8.$$

METHODE 4 : Utiliser la notation scientifique

■ Principe

L'écriture sous la forme $a \times 10^n$ (voir chapitre 2) permet souvent de simplifier des expressions (il ne faut pas hésiter à l'utiliser ! En maths, on ne travaille rarement pour rien !)

■ **Exemple** : Simplifier le plus possible les fractions suivantes :

$$a) \frac{0,0000195}{65000}$$

$$b) \frac{(600000)^2}{(2000)^4}$$

On a :

$$a) \frac{0,0000195}{65000} = \frac{1,95 \cdot 10^{-5}}{6,5 \cdot 10^4} = \frac{1,95}{6,5} \cdot 10^{-9} = 0,3 \cdot 10^{-9} = 3 \cdot 10^{-10}.$$

$$b) \frac{(600000)^2}{(2000)^4} = \frac{(6 \cdot 10^5)^2}{(2 \cdot 10^3)^4} = \frac{6^2 \cdot (10^5)^2}{2^4 \cdot (10^3)^4} = \frac{6^2 \cdot 10^{10}}{2^4 \cdot 10^{12}} = \frac{6^2}{2^4} \cdot 10^{-2} = 2,25 \cdot 10^{-2}.$$

■ **Exemple (automatisme)** : Réduire $\frac{8000}{200}$, en donner son écriture scientifique.

$$\text{On a : } \frac{8000}{200} = \frac{8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^2} = \frac{8}{2} \times 10^1 = 4 \times 10^1.$$

2. Comment simplifier des calculs avec des puissances ?

METHODE 5 : En utilisant les règles sur les puissances

■ Principe

On utilise les règles suivantes, pour $a \neq 0$, $b \neq 0$ (et n, m entiers) :

$$a) a^0 = 1$$

$$b) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$c) a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$d) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$e) (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$f) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$g) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

■ **Exemple** : Mettre sous forme irréductible 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$ 2) $(4 \cdot 10^{-3})^3 \cdot \frac{1}{2^5}$

On a : 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{2^7}{3^7} \cdot \frac{3^4}{2^4} = \frac{2^7 \cdot 3^4}{3^7 \cdot 2^4} = \frac{2^7}{2^4} \cdot \frac{3^4}{3^7} = 2^{7-4} \cdot 3^{4-7} = 2^3 \cdot 3^{-3} = \frac{2^3}{3^3}.$

2) $\left(4 \cdot 10^{-3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2^5} = 4^3 \cdot 10^{-9} \cdot 2^{-5} = (2^2)^3 \cdot (2 \times 5)^{-9} \cdot 2^{-5} = 2^6 \cdot 2^{-9} \cdot 5^{-9} \cdot 2^{-5}$
 $= 2^6 \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-5} \cdot 5^{-9} = 2^{-8} \cdot 5^{-9} = \frac{1}{2^8 \cdot 5^9}.$

■ **Exemple (automatisme) :** Réduire $(6 \times 10^{-2})^2 \times 10^3.$

On a : $(6 \times 10^{-2})^2 \times 10^3 = 6^2 \times 10^{-4} \times 10^3 = 36 \times 10^{-1} = 3,6.$

3. Comment simplifier des calculs avec des racines carrées ?

METHODE 6 : En utilisant les règles sur les racines carrées

■ Principe

On utilise les règles suivantes (pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$) :

a) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ b) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (si $b \neq 0$)

Il est utile (voire indispensable) de bien connaître les racines carrées suivantes :

a	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256
$\sqrt{a}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

a	1	100	10.000	1.000.000	0,01	0,0001	0,000001
$\sqrt{a}$	1	10	100	1000	0,1	0,01	0,001

■ **Exemple :** Simplifier : $\sqrt{8}, \sqrt{27}, \sqrt{125}, \sqrt{216}.$

On a : $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
 $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ $\sqrt{216} = \sqrt{36 \times 6} = \sqrt{36} \times \sqrt{6} = 6\sqrt{6} = 6\sqrt{2}\sqrt{3}.$

■ **Exemple :** Simplifier : $\sqrt{12}, \sqrt{20}, \sqrt{24}, \sqrt{28}, \sqrt{32}, \sqrt{40}.$

On a :
 $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
 $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\sqrt{3}$ $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
 $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ $\sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10} = 2\sqrt{2}\sqrt{5}$

■ **Exemple** : Simplifier : $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$.

On a : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ et $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

■ **Exemple** : Simplifier : $\sqrt{400}$, $\sqrt{1600}$.

On a : $\sqrt{400} = \sqrt{100 \times 4} = \sqrt{100} \times \sqrt{4} = 10 \times 2 = 20$.

$\sqrt{1600} = \sqrt{16 \times 100} = \sqrt{16} \times \sqrt{100} = 4 \times 10 = 40$.

■ **Exemple** : Simplifier : $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{1}{16}}$, $\sqrt{\frac{25}{36}}$.

On a : $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$; $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$; $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$.

■ **Exemple** : Simplifier : $\sqrt{0,04}$.

On obtient : $\sqrt{0,04} = \sqrt{4 \cdot 0,01} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{0,01} = 2 \cdot 0,1 = 0,2$.

■ **Exemple (automatisme)** : Simplifier :

1) $\sqrt{18}$ 2) $\sqrt{250.000}$ 3) $\sqrt{\frac{1}{50}}$

On a : 1) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

2) $\sqrt{250.000} = \sqrt{25 \times 10000} = \sqrt{25} \times \sqrt{10000} = 5 \times 100 = 500$.

3) $\sqrt{\frac{1}{50}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{25} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

METHODE 7 : En utilisant la propriété $\sqrt{a^2} = |a|$

■ **Principe**

$\sqrt{a^2} = |a|$ (on rappelle que $|5| = 5$ et que $|-2| = 2$).

■ **Exemple** : Simplifier : a) $\sqrt{4^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$

On a : a) $\sqrt{4^2} = |4| = 4$ b) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

■ **Exemple (automatisme)** : Simplifier $\sqrt{(2-6)^2}$.

On a : $\sqrt{(2-6)^2} = \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$.

METHODE 8 : En utilisant l'expression conjuguée

■ Principe

L'expression conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (bien sûr celle de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$).

Ensuite, on utilise le fait que : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$.

■ **Exemple** : Simplifier a) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ b) $\frac{5}{4 - \sqrt{13}}$

On a :

$$a) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{1 \times (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{3 - 5} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}.$$

$$b) \frac{5}{4 - \sqrt{13}} = \frac{5(4 + \sqrt{13})}{(4 - \sqrt{13})(4 + \sqrt{13})} = \frac{5(4 + \sqrt{13})}{16 - (\sqrt{13})^2} = \frac{5(4 + \sqrt{13})}{16 - 13} = \frac{5(4 + \sqrt{13})}{3}.$$

■ **Exemple (automatisme)** : Simplifier $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.

$$\text{On a : } \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{1 \times (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

4. Comment développer ?

METHODE 9 : Appliquer la distributivité

■ Principe

- 1) a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ b) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
 c) $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
- 2) a) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
 b) $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$
 c) $(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$
 d) $(a - b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d - b \cdot c - b \cdot d$
 e) $(a - b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d$

■ **Exemple** : Développer les expressions suivantes :

$$a) 2 \cdot (x+3) \quad b) \left(\frac{1}{2}x+3\right) \cdot 4 \quad c) \left(\frac{3}{4}x-2\right) \cdot (-2) \quad d) (2x+5) \cdot \left(\frac{1}{2}x+3\right)$$

On a : a) $2 \cdot (x+3) = 2x+6$.

b) $\left(\frac{1}{2}x+3\right) \cdot 4 = \frac{4}{2}x+12 = 2x+12$.

c) $\left(\frac{3}{4}x-2\right) \cdot (-2) = -\frac{3}{2}x+4$.

d) $(2x+5) \cdot \left(\frac{1}{2}x+3\right) = 2x \cdot \frac{1}{2}x + 6x + \frac{5}{2}x + 15 = x^2 + 6x + \frac{5}{2}x + 15 = x^2 + \frac{17}{2}x + 15$.

■ **Exemple (automatisme)** : Simplifier $2 \cdot (3x-2)$.

On a : $2 \cdot (3x-2) = 6x-4$.

■ **Exemple** : Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$a) x(x-1)+3x(x+1) \quad b) (2x+3)(2x+4)-(x+2)(x-1)$$

a) $x(x-1)+3x(x+1) = x^2 - x + 3x^2 + 3x = 4x^2 + 2x$.

b) $(2x+3)(2x+4)-(x+2)(x-1) = 4x^2 + 8x + 6x + 12 - (x^2 - x + 2x - 2)$
 $= 4x^2 + 8x + 6x + 12 - x^2 + x - 2x + 2 = 3x^2 + 13x + 14$.

REMARQUE : On peut aller dix fois plus vite avec une calculatrice munie de calcul formel ou avec XCas (ou avec l'IA), regardez (avec Xcas en ligne) !

$$\text{developper}((2x+3)*(2x+4)-(x+2)*(x-1))$$

$$3x^2 + 13x + 14$$

METHODE 10 : Utiliser les identités remarquables

■ Principe

Les connaître par cœur est un gain de temps phénoménal ! (Ce n'est pas difficile vu qu'il n'y en a que trois !) Les voici :

$$1) (m+p)^2 = m^2 + 2mp + p^2$$

$$2) (m-p)^2 = m^2 - 2mp + p^2$$

$$3) (m+p)(m-p) = m^2 - p^2$$

■ **Exemple** : Développer les expressions suivantes :

a) $(x+3)^2$ b) $(x-3)^2$ c) $(-x+3)^2$ d) $(-x-3)^2$

e) $(x+3)(x-3)$ f) $(-x+3)(-x-3)$ g) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)^2$ h) $(-3x-1)^2$

On obtient : a) $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.

b) $(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$.

c) $(-x+3)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$ car $(-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x \cdot x = x^2$.

d) $(-x-3)^2 = (-x)^2 - 2 \cdot (-x) \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.

e) $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$.

f) $(-x+3)(-x-3) = (-x)^2 - 3^2 = x^2 - 9$.

g) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}$.

h) $(-3x-1)^2 = (-3x)^2 - 2 \cdot (-3x) \cdot 1 + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1$.

■ **Exemple (automatisme)** : Simplifier $(5x-3)(5x+3)$.

On a : $(5x-3)(5x+3) = (5x)^2 - 3^2 = 25x^2 - 9$.

■ **Exemple** : Développer et simplifier $(x-1)^2 + (x+1)^2$

On a : $(x-1)^2 + (x+1)^2 = x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2$.

■ **Exemple (automatisme)** : Simplifier $(2x+2)^2 - (x+2)^2$.

On a : $(2x+2)^2 - (x+2)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 2 + 2^2 - (x^2 + 4x + 4)$
 $= 4x^2 + 8x + 4 - x^2 - 4x - 4 = 3x^2 + 4x$.