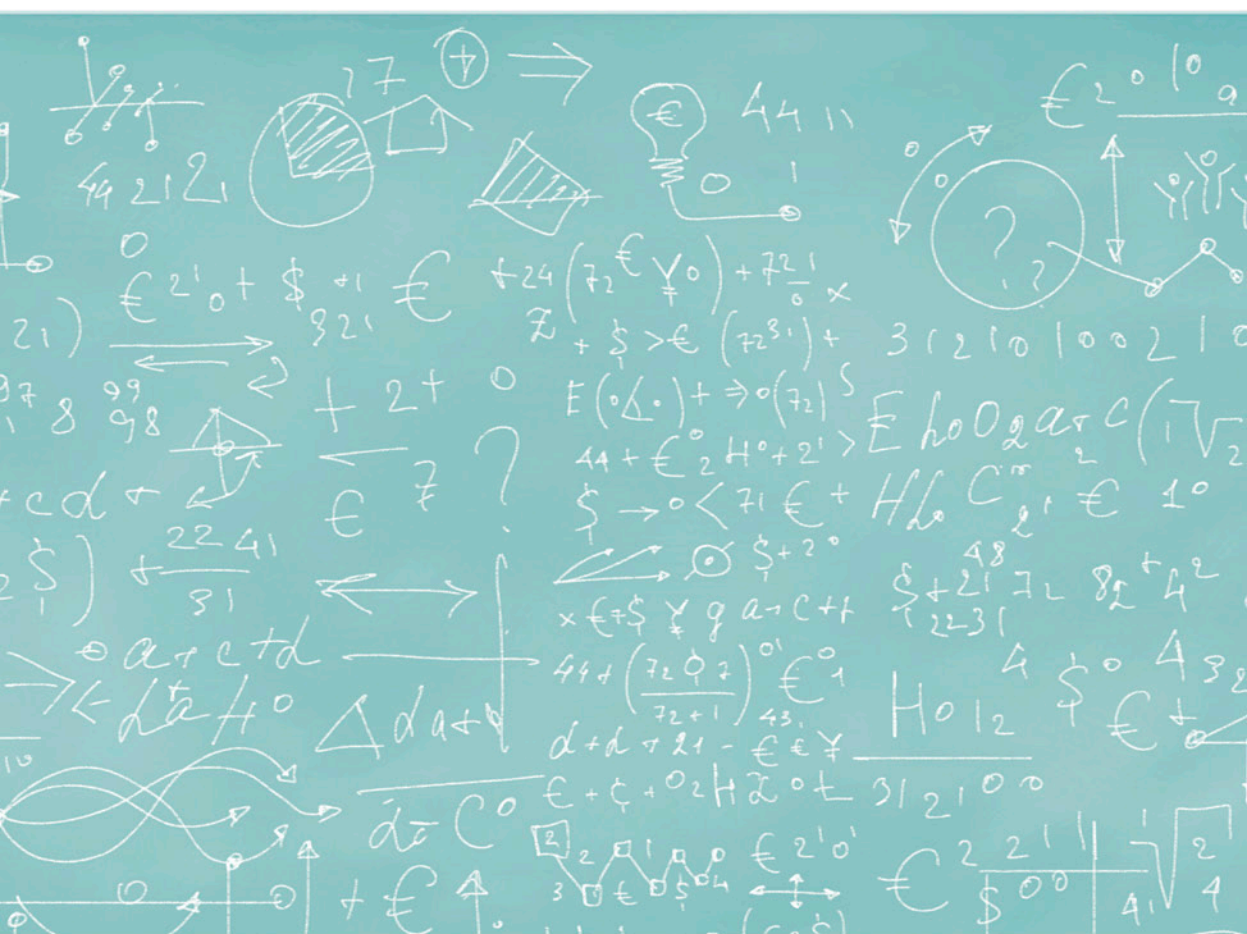


MICROÉCONOMIE

EXERCICES CORRIGÉS

2^e édition



Bosco Menard



MICROÉCONOMIE

EXERCICES CORRIGÉS

MICROÉCONOMIE

EXERCICES CORRIGÉS

2^e édition

Bosco Menard



ISBN 9782340-118195

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Chère lectrice, cher lecteur,

J'ai le plaisir de vous présenter la deuxième édition de mon recueil d'exercices de microéconomie.

Il a été conçu pour aider les étudiantes et étudiants dans la préparation des concours de l'ENS Paris-Saclay, de l'EDHEC, de l'Insee, ou encore de tout concours ou partiel présentant une épreuve de microéconomie. Pour mieux vous accompagner, les calculs sont détaillés et les graphiques nombreux.

Ces exercices ont été calibrés pour pouvoir être résolus en une heure environ par des étudiants de licence bien préparés. Toutefois, les exercices les plus difficiles nécessiteront certainement plus de temps.

Chaque chapitre commence par un exercice classique, sans difficulté particulière, et conçu pour appliquer un maximum de notions de cours sur un cas standard. Les exercices suivants sont des cas particuliers permettant d'approfondir vos connaissances sur des situations originales.

Je suis toujours ravi d'avoir vos retours. Pour toute suggestion d'amélioration, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse suivante :

boscomenard@hotmail.com

J'en profite pour remercier tous les lecteurs et lectrices de la première édition qui m'ont signalé diverses coquilles, et ainsi contribué à l'amélioration de cet ouvrage. Un très grand merci à mes ami.es qui ont courageusement examiné certains chapitres de ce livre, et un immense merci à ma grand-mère Fafote, qui a héroïquement TOUT relu.

Je vous souhaite une excellente préparation, et beaucoup de réussite dans vos projets.

Bosco Menard

Sommaire

1. Théorie du consommateur.....	7
1.1. Le consommateur, cas standard.....	8
1.2. La dualité du programme du consommateur	14
1.3. Consommateur et équilibre en coin.....	20
1.4. Élasticités et types de biens.....	24
1.5. Effet de substitution et effet de revenu	31
1.6. Consommateur et crédit	37
1.7. Arbitrage travail-loisir et taxation.....	42
1.8. Arbitrage travail-loisir et impôt progressif	47
1.9. Arbitrage travail-loisir et recettes fiscales.....	55
1.10. Aversion au risque et placements financiers.....	61
2. Théorie du producteur	67
2.1. Le producteur, cas standard.....	68
2.2. Substitution des facteurs de production	75
2.3. Seuil de fermeture et seuil de rentabilité.....	84
2.4. Producteur et horizons temporels	91
2.5. Développement horizontal du producteur	97
2.6. Investissement de capacité	103
2.7. Négociations salariales.....	109
2.8. Initiation à la théorie de l'assurance	116
3. L'équilibre partiel.....	123
3.1. Équilibre partiel et protectionnisme.....	124
3.2. Équilibre partiel et subventions.....	132
3.3. Équilibre partiel et ouverture des économies	138
3.4. Équilibre partiel et publicité	143

4. L'équilibre général.....	153
4.1. Équilibre général, cas standard.....	154
4.2. Équilibre général et études préliminaires	162
4.3. Variations sur l'équilibre général.....	170
4.4. Équilibre général en coin.....	175
4.5. Équilibre général avec dotation inconnue.....	180
4.6. Équilibre général à trois biens	185
4.7. Équilibre général de production	189
4.8. Équilibre général de production et pollution	193
5. Le monopole.....	201
5.1. Le monopole, cas standard.....	202
5.2. Double monopole	210
5.3. Monopole et subventions.....	215
5.4. Monopole et discrimination.....	221
5.5. Monopole, discrimination et optimum social.....	228
5.6. Monopole naturel	237
5.7. Tarif binôme	243
6. Le duopole	255
6.1. Le duopole graphiquement	256
6.2. Duopole et coûts quas-fixes	262
6.3. Duopole de Bowley	270
6.4. Duopole et stratégie d'exclusion.....	279
6.5. Entente et théorie des jeux.....	284
6.6. Duopole avec coût de transport.....	293
6.7. Triopole	301
6.8. Duopole avec produits différenciés	305
6.9. Oligopole et externalités	311
7. Biens publics et externalités	317
7.1. Biens publics, cas standard	318
7.2. Biens publics et taxation optimale.....	324
7.3. Biens publics et inégalités	329
7.4. Biens publics et fonction quasi linéaire	337
7.5. Le financement d'une infrastructure publique.....	343
7.6. Externalités et optimum.....	347
7.7. Externalités subies par le consommateur	353

Chapitre 1

Théorie du consommateur

Contents

1.1	Le consommateur, cas standard	8
1.2	La dualité du programme du consommateur	14
1.3	Consommateur et équilibre en coin	20
1.4	Élasticités et types de biens	24
1.5	Effet de substitution et effet de revenu	31
1.6	Consommateur et crédit	37
1.7	Arbitrage travail-loisir et taxation	42
1.8	Arbitrage travail-loisir et impôt progressif	47
1.9	Arbitrage travail-loisir et recettes fiscales	55
1.10	Aversion au risque et placements financiers	61

1.1 Le consommateur, cas standard

Soit un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction suivante :

$$U(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

Les variables x et y représentent la consommation de deux biens différents. Le revenu de l'agent est noté R . Les prix des biens x et y sont notés p_x et p_y . α et β sont positifs.

Question 1 Étudiez les courbes d'indifférence du consommateur et représentez-les dans un repère (x, y) .

Question 2 Rappelez les hypothèses sur les préférences du consommateur standard et associez-les aux caractéristiques graphiques des courbes d'indifférence.

Question 3 Écrivez le programme du consommateur puis calculez les demandes marshaliennes du consommateur.

Question 4 Calculez la fonction d'utilité indirecte.

Question 5 Vérifiez l'identité de Roy pour le bien x .

Question 6 Application numérique : déterminez les demandes marshaliennes et l'utilité atteinte avec :

— $\alpha = 3/4$ et $\beta = 1/4$

— $R = 16$, $p_x = 2$ et $p_y = 1$.

puis représentez la situation dans un graphique (x, y) .

Correction - Le consommateur - cas standard

1. Les courbes d'indifférence se déterminent en isolant un des biens dans la fonction d'utilité. On fixe préalablement un niveau d'utilité $\bar{U}$.

Chaque courbe d'indifférence correspond à un niveau d'utilité différent. C'est pour cela qu'il en existe une infinité.

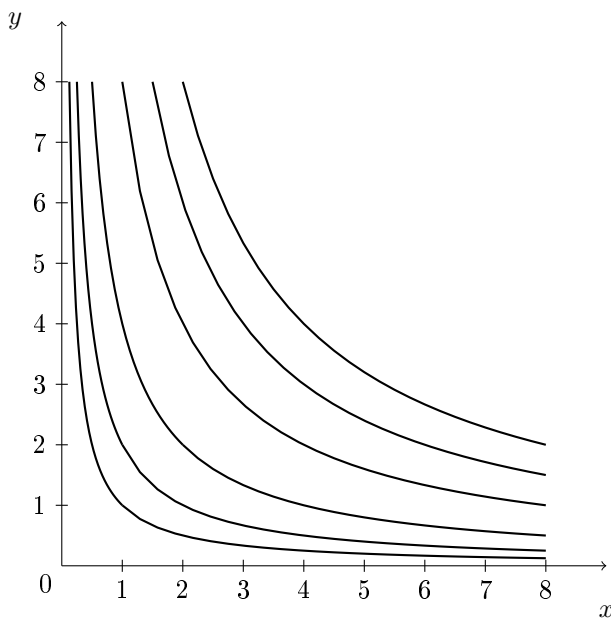
$$\bar{U} = x^\alpha y^\beta$$

$$\Leftrightarrow y^\beta = \frac{\bar{U}}{x^\alpha}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\bar{U}^{1/\beta}}{x^{\alpha/\beta}}$$

1. $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{\bar{U}^{1/\beta}}{x^{\alpha/\beta+1}} < 0$, la courbe d'indifférence est décroissante.
2. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{\beta}(\alpha/\beta + 1) \frac{\bar{U}^{1/\beta}}{x^{\alpha/\beta+2}} > 0$, la courbe d'indifférence est convexe.
3. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} y = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$

Une courbe d'indifférence relie l'ensemble des couples (x, y) qui permettent d'atteindre un niveau de satisfaction $\bar{U}$ donné.



2. Il existe huit axiomes sur la forme des préférences du consommateur standard. Tous ont une conséquence graphique.

1. *Comportement de maximisation* : le consommateur maximise son utilité. Conséquence graphique : le but est de trouver la courbe d'indifférence la plus éloignée de l'origine possible.
2. *Unicité de la relation de préférence* : chaque individu est doté d'une relation de préférence unique. Conséquence graphique : toutes les courbes d'indifférence d'un même consommateur ont les mêmes propriétés (dérivées, limites etc.).
3. *Complétude* : les agents sont capables de comparer et de classer tous les paniers existants. Conséquence graphique : l'ensemble des points du repère (x, y) peut être envisagé et comparé par le consommateur à un autre panier.
4. *Réflexivité des préférences* : les paniers apportant exactement le même niveau de satisfaction au consommateur sont identifiés. Conséquence graphique : l'ensemble de ces paniers constitue une courbe d'indifférence.
5. *Transitivité des préférences* : si un panier 1 est préféré au panier 2, et le panier 2 à un panier 3, alors le panier 1 est préféré au panier 3. Conséquence graphique : deux courbes d'indifférence ne peuvent jamais se croiser.
6. *Continuité des préférences* : il n'y a pas de discontinuité des préférences. Conséquence graphique : les courbes d'indifférence sont continues.
7. *Non saturation des préférences* : le consommateur n'est jamais indifférent à une augmentation de consommation. Conséquence graphique : les courbes d'indifférence sont asymptotes aux axes pour les valeurs extrêmes.
8. *Convexité des préférences* : le consommateur préfère un panier mélangé. Conséquence graphique : les courbes d'indifférence sont convexes.

3. Le programme du consommateur s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \text{Max } U(x, y) = x^\alpha y^\beta \\ \text{s.c. } R = xp_x + yp_y \end{cases}$$

Ce qui signifie que le consommateur cherche à maximiser son utilité mais qu'il doit respecter une contrainte de ressources. On remarque que la fonction d'utilité est censée représenter toutes ses préférences. Autrement dit, le consommateur n'a ici aucun intérêt à conserver une partie de son revenu, puisque l'épargne ne lui procure aucune satisfaction.

4. Le lagrangien associé est : $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^\alpha y^\beta + \lambda[R - xp_x - yp_y]$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow \alpha x^{\alpha-1} y^\beta = \lambda p_x \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0 &\Leftrightarrow \beta x^\alpha y^{\beta-1} = \lambda p_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} xp_x = \frac{\alpha y p_y}{\beta} \\ yp_y = \frac{\beta x p_x}{\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow R = xp_x + yp_y \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \rightarrow (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} R = xp_x + \frac{\beta x p_x}{\alpha} \\ R = \frac{\alpha y p_y}{\beta} + yp_y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} R = xp_x \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \\ R = yp_y \frac{\alpha + \beta}{\beta} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^*(R, p_x) = \frac{\alpha R}{(\alpha + \beta)p_x} \\ y^*(R, p_y) = \frac{\beta R}{(\alpha + \beta)p_y} \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie bien que la consommation de chaque bien est croissante en fonction du revenu (plus l'individu est riche, plus il consommera) et décroissante en fonction de son prix (plus un bien est cher, moins le consommateur peut se permettre d'en acheter, et plus l'autre bien sera attractif comparativement au premier).

Il est utile de connaître ce résultat par cœur : il est commun à toutes les fonctions Cobb-Douglas. Il permet de vérifier ses résultats ou de gagner du temps sur des exercices où plusieurs consommateurs peuvent être à étudier, par exemple dans le cas d'un équilibre général.

5. La fonction d'utilité indirecte est la fonction qui permet de déterminer l'utilité atteinte en fonction d'un revenu et d'un système de prix donnés. Pour la déterminer, on injecte dans la fonction d'utilité l'expression des demandes marshalliennes en fonction des prix et du revenu.

$$\begin{aligned} V(R, p_x, p_y) &= U(x^*(R, p_x), y^*(R, p_y)) \\ &= \left(\frac{\alpha R}{(\alpha + \beta)p_x} \right)^\alpha \left(\frac{\beta R}{(\alpha + \beta)p_y} \right)^\beta \\ &= \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta R^{\alpha+\beta}}{(\alpha + \beta)^{\alpha+\beta} p_x^\alpha p_y^\beta} \end{aligned}$$

On remarque que cette utilité indirecte est croissante en fonction du revenu (plus le consommateur est riche, plus il pourra atteindre un niveau d'utilité élevé) et décroissante en fonction des prix (plus les prix sont élevés, moins il pourra consommer et moins son niveau d'utilité sera élevé).

6. L'identité de Roy est une relation qui permet de retrouver les demandes marshaliennes à partir de la fonction d'utilité indirecte. Son équation pour le bien x est :

$$\begin{aligned}
 x^*(R, p_x) &= - \frac{\frac{\partial V(\bar{R}, p_x, p_y)}{\partial p_x}}{\frac{\partial V(R, p_x, p_y)}{\partial R}} \\
 &= - \frac{-\alpha \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta R^{\alpha+\beta}}{(\alpha + \beta)^{\alpha+\beta} p_x^{\alpha+1} p_y^\beta}}{(\alpha + \beta) \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta R^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha + \beta)^{\alpha+\beta} p_x^\alpha p_y^\beta}} \\
 &= \frac{\alpha R}{(\alpha + \beta) p_x} \\
 &= x^*(R, p_x)
 \end{aligned}$$

L'identité de Roy est bien respectée.

7. Application numérique avec :

— $\alpha = 3/4$ et $\beta = 1/4$

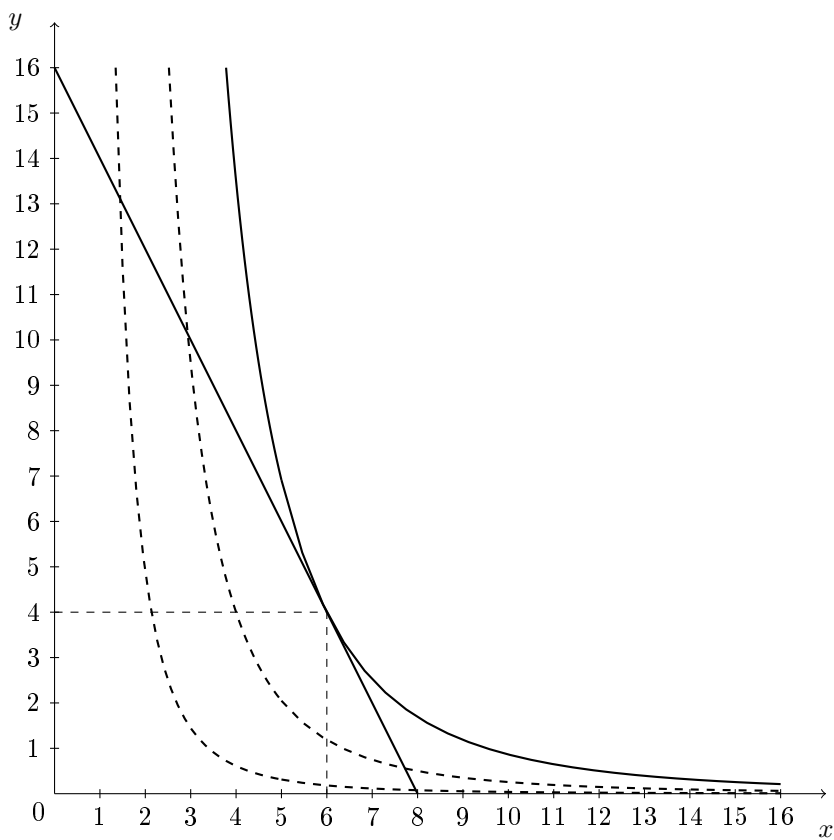
— $R = 16$, $p_x = 2$ et $p_y = 1$.

Les demandes marshaliennes sont :

$$\begin{aligned}
 x^*(16, 2) &= \frac{3/4 \cdot 16}{(3/4 + 1/4) \cdot 2} \\
 &= 6 \\
 y^*(16, 1) &= \frac{1/4 \cdot 16}{(3/4 + 1/4) \cdot 1} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

L'utilité atteinte est donc :

$$U(6, 4) = 6^{3/4} 4^{1/4} \approx 5,4$$



Le panier optimal choisi par le consommateur est le point $(6, 4)$, point de tangence entre la contrainte budgétaire et la courbe d'indifférence la plus éloignée de l'origine.

1.2 La dualité du programme du consommateur

Soit un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction suivante :

$$U(x, y) = x^\alpha (y + \gamma)^\beta$$

où x et y représentent la consommation de deux biens différents. Le revenu de l'agent est noté R . Les prix respectifs des biens x et y sont notés p_x et p_y .

Ici, α et β sont positifs et $\alpha + \beta = 1$.

Question 1 Calculez les demandes hicksiennes de l'agent.

Question 2 On suppose désormais et jusqu'à la fin que $\bar{U} \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha \geq \gamma$. Calculez la fonction de dépense de l'agent.

Question 3 Rappelez puis vérifiez le lemme de Shephard.

Question 4 Calculez désormais la fonction d'utilité indirecte de l'agent.

Question 5 Rappelez l'identité de Roy.

Question 6 Déterminez les demandes marshaliennes du consommateur.

Question 7 Schématisez le cheminement que vous venez de parcourir.

Correction - La dualité du programme du consommateur

1. Les demandes hicksiennes sont les demandes de biens qui permettent à un agent d'atteindre un niveau d'utilité donné en minimisant la dépense totale nécessaire en fonction des prix.

Le programme du consommateur s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \text{Min } R = xp_x + yp_y \\ \text{s.c. } \bar{U} = x^\alpha(y + \gamma)^\beta \end{cases}$$

Le Lagrangien associé est : $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xp_x + yp_y + \lambda[\bar{U} - x^\alpha(y + \gamma)^\beta]$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow p_x = \lambda \alpha x^{\alpha-1} (y + \gamma)^\beta \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0 &\Leftrightarrow p_y = \lambda \beta x^\alpha (y + \gamma)^{\beta-1} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha p_y (y + \gamma)}{\beta p_x} \\ y = \frac{\beta p_x x}{\alpha p_y} - \gamma \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \bar{U} = x^\alpha(y + \gamma)^\beta \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \rightarrow (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{U} = x^\alpha \left(\frac{\beta p_x x}{\alpha p_y} - \gamma + \gamma \right)^\beta \\ \bar{U} = \left(\frac{\alpha p_y (y + \gamma)}{\beta p_x} \right)^\alpha (y + \gamma)^\beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{U} \left(\frac{\alpha p_y}{\beta p_x} \right)^\beta = x^{\alpha+\beta} = x \\ \bar{U} \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha = (y + \gamma)^{\alpha+\beta} = y + \gamma \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } \bar{U} \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha \geq \gamma : \begin{cases} h_x^*(p_x, p_y, \bar{U}) = \bar{U} \left(\frac{\alpha p_y}{\beta p_x} \right)^\beta \\ h_y^*(p_x, p_y, \bar{U}) = \bar{U} \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha - \gamma \end{cases} \\ \text{si } \bar{U} \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha < \gamma : \begin{cases} h_x^*(p_x, p_y, \bar{U}) = \left(\frac{\bar{U}}{\gamma^\beta} \right)^\frac{1}{\alpha} \\ h_y^*(p_x, p_y, \bar{U}) = 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

2. La fonction de dépense représente la dépense minimale, pour des prix donnés, que doit payer le consommateur pour atteindre un certain niveau d'utilité.

La condition $\bar{U} \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha \geq \gamma$ est, par hypothèse, respectée. On peut donc utiliser l'expression des demandes hicksiennes de la forme :

$$\begin{cases} h_x^*(p_x, p_y, \bar{U}) = \bar{U} \left(\frac{\alpha p_y}{\beta p_x} \right)^\beta \\ h_y^*(p_x, p_y, \bar{U}) = \bar{U} \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha - \gamma \end{cases}$$

L'expression de la fonction de dépense est donc :

$$\begin{aligned} e(\bar{U}, p_x, p_y) &= h_x^*(p_x, p_y, \bar{U})p_x + h_y^*(p_x, p_y, \bar{U})p_y \\ \Leftrightarrow e(\bar{U}, p_x, p_y) &= \bar{U} \left(\frac{\alpha p_y}{\beta p_x} \right)^\beta p_x + \left(\bar{U} \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha - \gamma \right) p_y \\ \Leftrightarrow e(\bar{U}, p_x, p_y) &= \bar{U} \left(\left(\frac{\alpha p_y}{\beta p_x} \right)^\beta p_x + \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha p_y \right) - \gamma p_y \\ \Leftrightarrow e(\bar{U}, p_x, p_y) &= \bar{U} \left(\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\beta \frac{p_y^\beta}{p_x^{\beta-1}} + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^\alpha \frac{p_x^\alpha}{p_y^{\alpha-1}} \right) - \gamma p_y \\ \Leftrightarrow e(\bar{U}, p_x, p_y) &= \bar{U} p_x^\alpha p_y^\beta \left(\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\beta + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^\alpha \right) - \gamma p_y \\ \Leftrightarrow e(\bar{U}, p_x, p_y) &= \bar{U} \frac{p_x^\alpha p_y^\beta}{\alpha^\alpha \beta^\beta} - \gamma p_y \end{aligned}$$

Détails du calcul (rappel : $(\alpha + \beta = 1)$) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\beta + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^\alpha &= \frac{\alpha^\beta}{\beta^\beta} + \frac{\beta^\alpha}{\alpha^\alpha} \\ &= \frac{\alpha^\beta \alpha^\alpha}{\alpha^\alpha \beta^\beta} + \frac{\beta^\alpha \beta^\beta}{\alpha^\alpha \beta^\beta} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^\alpha \beta^\beta} + \frac{\beta}{\alpha^\alpha \beta^\beta} \\ &= \frac{1}{\alpha^\alpha \beta^\beta} \end{aligned}$$

3. Le lemme de Shephard établit que la dérivée de la fonction de dépense par rapport au prix d'un bien donne la fonction de demande hicksienne de ce même bien. Soit :

$$\frac{\partial e(\bar{U}, p_x, p_y)}{\partial p_i} = h_i^*(p_x, p_y, \bar{U})$$

Vérification pour le bien x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(\bar{U}, p_x, p_y)}{\partial p_x} &= \bar{U} \alpha \frac{p_x^{\alpha-1} p_y^\beta}{\alpha^\alpha \beta^\beta} \\ &= \bar{U} \left(\frac{\alpha p_y}{\beta p_x} \right)^\beta \\ &= h_x^*(p_x, p_y, \bar{U}) \end{aligned}$$

et pour le bien y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(\bar{U}, p_x, p_y)}{\partial p_y} &= \bar{U} \beta \frac{p_x^\alpha p_y^{\beta-1}}{\alpha^\alpha \beta^\beta} - \gamma \\ &= \bar{U} \left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha - \gamma \\ &= h_y^*(p_x, p_y, \bar{U}) \end{aligned}$$

4. On sait que la fonction d'utilité indirecte est la fonction qui permet de déterminer l'utilité atteinte en fonction d'un revenu et d'un système de prix donnés. C'est l'exact symétrique de la fonction de dépense. Il suffit de prendre cette dernière et d'isoler l'utilité, qui est désormais la variable dépendante, en considérant désormais le revenu comme une variable.

$$\begin{aligned} e(\bar{U}, p_x, p_y) = \bar{U} \frac{p_x^\alpha p_y^\beta}{\alpha^\alpha \beta^\beta} - \gamma p_y &\Rightarrow \bar{R} = U \frac{p_x^\alpha p_y^\beta}{\alpha^\alpha \beta^\beta} - \gamma p_y \\ &\Leftrightarrow (\bar{R} + \gamma p_y) \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{p_x^\alpha p_y^\beta} = U \\ &\Leftrightarrow V(\bar{R}, p_x, p_y) = (\bar{R} + \gamma p_y) \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{p_x^\alpha p_y^\beta} \end{aligned}$$

5. L'identité de Roy énonce l'égalité entre la demande marshalienne d'un bien et l'opposé du rapport de la dérivée de la fonction d'utilité indirecte par le prix de ce bien sur la dérivée de cette même fonction par le revenu.

Mathématiquement :

$$x^*(R, p_x, p_y) = - \frac{\frac{\partial V(\bar{R}, p_x, p_y)}{\partial p_x}}{\frac{\partial V(\bar{R}, p_x, p_y)}{\partial \bar{R}}}$$

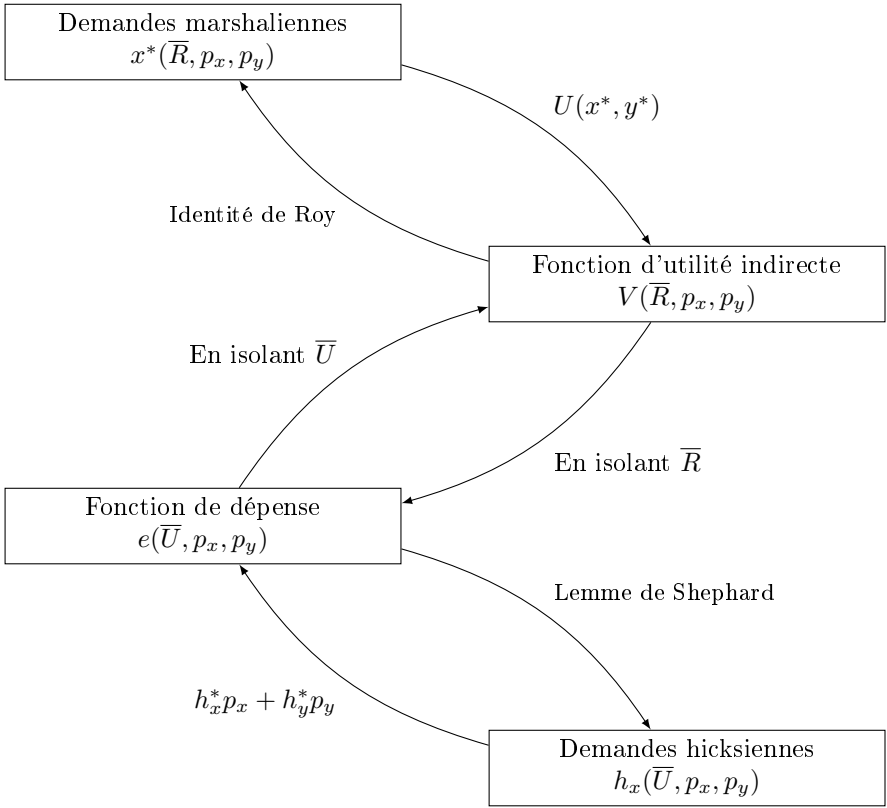
6. Utilisons l'identité de Roy pour trouver les demandes marshaliennes. Pour le bien x :

$$\begin{aligned} - \frac{\frac{\partial V(\bar{R}, p_x, p_y)}{\partial p_x}}{\frac{\partial V(\bar{R}, p_x, p_y)}{\partial \bar{R}}} &= - \frac{-\alpha(\bar{R} + \gamma p_y) \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{p_x^{\alpha+1} p_y^\beta}}{\frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{p_x^\alpha p_y^\beta}} \\ &= \frac{\alpha(\bar{R} + \gamma p_y)}{p_x} \\ &= x^*(\bar{R}, p_x, p_y) \end{aligned}$$

et pour le bien y :

$$\begin{aligned} - \frac{\frac{\partial V(\bar{R}, p_x, p_y)}{\partial p_y}}{\frac{\partial V(\bar{R}, p_x, p_y)}{\partial \bar{R}}} &= - \frac{-\beta(\bar{R} + \gamma p_y) \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{p_x^\alpha p_y^{\beta+1}} + \gamma \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{p_x^\alpha p_y^\beta}}{\frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{p_x^\alpha p_y^\beta}} \\ &= \frac{\beta(\bar{R} + \gamma p_y)}{p_y} - \gamma \\ &= y^*(\bar{R}, p_x, p_y) \end{aligned}$$

7. Résumé graphique de la théorie microéconomique du consommateur :



1.3 Consommateur et équilibre en coin

Soit un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction suivante :

$$U(x, y) = x^{1/4}(y + \gamma)^{3/4}$$

avec $\gamma > 0$. Les variables x et y représentent la consommation de deux biens différents. Le revenu de l'agent est noté R . Les prix respectifs des biens x et y sont notés p_x et p_y .

Question 1 Étudiez les courbes d'indifférence du consommateur et représentez-les dans un repère (x, y) .

Question 2 Calculez les demandes marshaliennes du consommateur en veillant à distinguer deux situations possibles.

Question 3 Calculez la fonction d'utilité indirecte.

Question 4 Application numérique. Déterminez l'utilité indirecte avec :

1. $\gamma = 10$, $p_x = 1$, $p_y = 6$ et $R = 10$.
2. $\gamma = 10$, $p_x = 1$, $p_y = 6$ et $R = 52$.

Correction - Consommateur et équilibre en coin

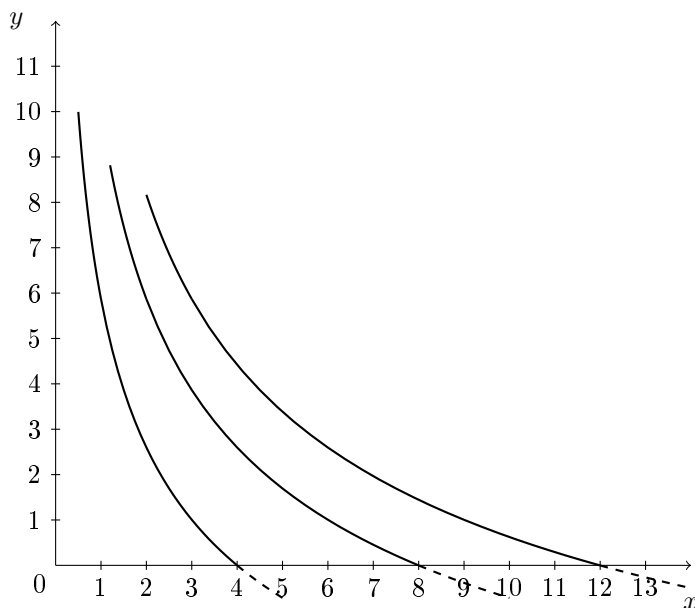
1.

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= x^{1/4}(y + \gamma)^{3/4} \\
 \Leftrightarrow (y + \gamma)^{3/4} &= \frac{\bar{U}}{x^{1/4}} \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{\bar{U}^{4/3}}{x^{1/3}} - \gamma
 \end{aligned}$$

1. $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{U}^{4/3}}{x^{4/3}} < 0$, la courbe d'indifférence est décroissante.
2. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\bar{U}^{4/3}}{x^{7/3}} > 0$, la courbe d'indifférence est convexe.

3. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} y = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\bar{U}^4}{\gamma^3}} y = 0$

On constate qu'il existe un équilibre en coin. On peut le prévoir dès que l'on découvre la fonction d'utilité : $U(x, y) = x^{1/4}(y + \gamma)^{3/4}$. L'utilité *peut être* positive *même si* la consommation de bien y est nulle. Dès lors, une absence de biens y peut être compensée par plus de biens x . Les courbes d'indifférence vont croiser l'axe des abscisses (axe où $y = 0$).



2. Le programme du consommateur s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \text{Max } U(x, y) = x^{1/4}(y + \gamma)^{3/4} \\ \text{sc. } R = xp_x + yp_y \end{cases}$$

Le lagrangien associé est : $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^{1/4}(y + \gamma)^{3/4} + \lambda[R - xp_x - yp_y]$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^{-3/4}(y + \gamma)^{3/4} = \lambda p_x \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^{1/4}(y + \gamma)^{-1/4} = \lambda p_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} xp_x = \frac{(y + \gamma)p_y}{3} \\ yp_y = 3xp_x - \gamma p_y \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow R = xp_x + yp_y \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \rightarrow (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} R = xp_x + 3xp_x - \gamma p_y \\ R = \frac{(y + \gamma)p_y}{3} + yp_y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4xp_x = R + \gamma p_y \\ (y + \gamma)p_y + 3yp_y = 3R \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } 3R \geq \gamma p_y : \begin{cases} x^*(R, p_x, p_y) = \frac{R + \gamma p_y}{4p_x} \\ y^*(R, p_x, p_y) = \frac{3R - \gamma p_y}{4p_y} \end{cases} \\ \text{si } 3R < \gamma p_y : \begin{cases} x^*(R, p_x, p_y) = \frac{R}{p_x} \\ y^*(R, p_x, p_y) = 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

3. La fonction d'utilité indirecte est la fonction qui permet de déterminer l'utilité atteinte en fonction d'un revenu et d'un système de prix donnés. Pour la déterminer, on injecte dans la fonction d'utilité l'expression des demandes marshaliennes en fonction des prix et du revenu.

1er cas : si $3R \geq \gamma p_y$,

$$\begin{aligned} V(R, p_x, p_y) &= U(x^*(R, p_x, p_y), y^*(R, p_x, p_y)) \\ &= \left(\frac{R + \gamma p_y}{4p_x} \right)^{1/4} \left(\frac{3R - \gamma p_y}{4p_y} + \gamma \right)^{3/4} \\ &= \left(\frac{R + \gamma p_y}{4p_x} \right)^{1/4} \left(\frac{3R + 3\gamma p_y}{4p_y} \right)^{3/4} \end{aligned}$$

2nd cas : si $3R < \gamma p_y$,

$$\begin{aligned} V(R, p_x, p_y) &= U(x^*(R, p_x, p_y), y^*(R, p_x, p_y)) \\ &= \left(\frac{R}{p_x}\right)^{1/4} (\gamma)^{3/4} \\ &= \left(\frac{R\gamma^3}{p_x}\right)^{1/4} \end{aligned}$$

4. Application numérique :

1. avec $R = 10$, $3R \leq \gamma p_y$, on a :

$$x^*(R, p_x, p_y) = \frac{R}{p_x} = \frac{10}{1} = 10$$

et

$$y^*(R, p_x, p_y) = 0$$

d'où :

$$V(R, p_x, p_y) = \left(\frac{R\gamma^3}{p_x}\right)^{1/4} = \left(\frac{10^4}{1}\right)^{1/4} = 10$$

2. avec $R = 52$, $3R \geq \gamma p_y$, on a :

$$x^*(R, p_x, p_y) = \frac{R + \gamma p_y}{4p_x} = \frac{52 + 10 \cdot 6}{4} = 28$$

et

$$y^*(R, p_x, p_y) = \frac{3R - \gamma p_y}{4p_y} = \frac{3 \cdot 52 - 10 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{26 - 10}{4} = 4$$

d'où :

$$V(R, p_x, p_y) = 28^{1/4} (4 + 10)^{3/4} = 2^{1/4} \cdot 14^{1/4} \cdot 14^{3/4} = 2^{1/4} \cdot 14$$

Très naturellement, on constate que l'utilité obtenue dans le second cas est supérieure, car le revenu est supérieur.

1.4 Élasticités et types de biens

Deux amis ont décidé d'aller manger dans un fast-food. Le hamburger coûte 3 euros et est noté x_1 . Les frites coûtent 2 euros et sont notées x_2 .

— Anouk dispose de 10 euros et sa fonction d'utilité est :

$$U_a(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$$

— Joseph dispose de 12 euros et sa fonction d'utilité est :

$$U_j(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2$$

Question 1 Définissez les courbes d'indifférence pour Anouk et Joseph. Représentez-les graphiquement, que pouvez-vous en déduire ?

Question 2 Écrivez les programmes de maximisation pour Anouk et Joseph. Résolvez.

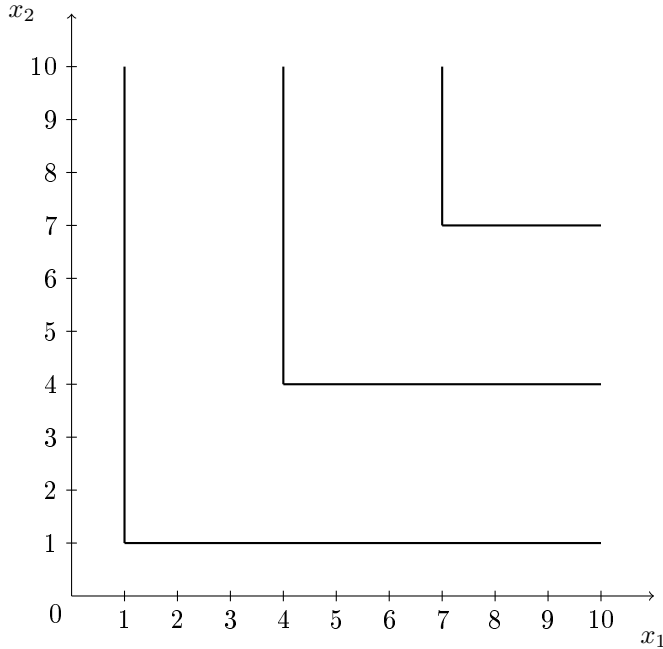
Question 3 Nous passons dans un cadre général : les fonctions d'utilité restent identiques, les prix et les revenus sont notés p_1 pour le bien 1, p_2 pour le bien 2, R_a pour le revenu d'Anouk et R_j pour le revenu de Joseph. Calculez pour chaque individu et pour chaque bien les élasticités-prix, les élasticités-revenu et les élasticités-prix croisés. Interprétez.

Question 4 Redonnez la typologie des biens selon les différentes élasticités.

Correction - Élasticités et types de biens

1. Pour Anouk les biens 1 et 2 sont des bien complémentaires parfaits. Son utilité n'augmente que se elle mange un hamburger et une portion de frites supplémentaire ensemble. Les courbes d'indifférence sont "en angle". Elles forment un angle droit aux points $x_1 = x_2$.

Graphiquement, pour Anouk :



Pour Joseph les courbes d'indifférence ont pour équation :

$$U_j(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2$$
$$\Rightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{2}(U_j - x_1^2)$$

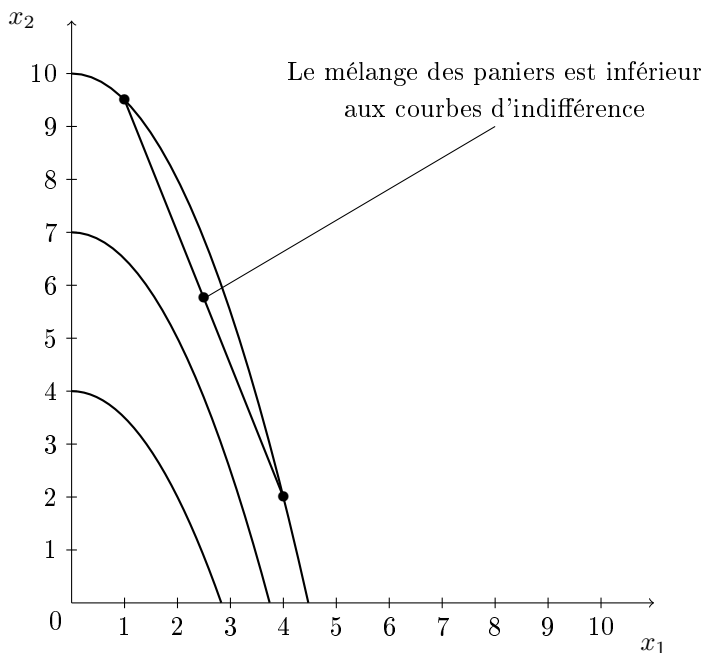
On obtient :

$$\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = -x_1$$
$$\Rightarrow \frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} < 0$$
$$\Rightarrow x_2(x_1) \text{ est décroissante.}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_2(x_1)}{\partial x_1^2} &= -1 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 x_2(x_1)}{\partial x_1^2} &< 0 \\ \Rightarrow x_2(x_1) &\text{ est concave.}\end{aligned}$$

Graphiquement, pour Joseph :



Si on trace un segment qui lie deux points de cette courbe d'indifférence, on se rend compte que les points appartenant à ce segment sont sous la courbe d'indifférence : Joseph n'aime pas les mélanges culinaires.

2. Pour Anouk nous avons :

$$\begin{cases} \text{Max} & U_a(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2) \\ \text{sc.} & 10 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

La fonction d'utilité d'Anouk n'est pas différentiable. Cependant, nous dispo-

sons d'un système d'équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 10 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases} \\ \Rightarrow & 10 = 3x_1 + 2x_1 \\ \Rightarrow & 10 = 5x_1 \\ \Rightarrow & x_1^* = x_2^* = 2 \end{aligned}$$

Pour Joseph nous avons :

$$\begin{cases} \text{Max} & U_j(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 \\ \text{sc.} & 12 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

La fonction d'utilité de Joseph n'est pas quasi-concave donc le programme n'est pas convexe, on ne peut pas le maximiser. Il existe une solution en coin.

— Soit Joseph n'achète que des hamburgers :

$$x_1^* = 4 \text{ et } x_2^* = 0 \quad \Rightarrow \quad U_j = 4^2 = 16$$

— Soit Joseph n'achète que des frites :

$$x_1^* = 0 \text{ et } x_2^* = 6 \quad \Rightarrow \quad U_j = 2 \cdot 6 = 12$$

Finalement l'utilité de Joseph est maximale lorsqu'il n'achète que des hamburgers, le panier optimal est donc $x_1^* = 4$ et $x_2^* = 0$.

3. Rappels, pour le bien x_1 :

1. L'élasticité-prix $\varepsilon_p = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1^*}$
2. L'élasticité-revenu $\varepsilon_R = \frac{\partial x_1^*}{\partial R} \cdot \frac{R}{x_1^*}$
3. L'élasticité-prix croisée $\varepsilon_c = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_1^*}$

Pour Anouk :

$$\begin{aligned} & R = p_1x_1 + p_2x_2 \\ \Leftrightarrow & R = p_1x_1 + p_2x_1 \\ \Rightarrow & x_2^* = x_1^* = \frac{R}{p_1 + p_2} \end{aligned}$$

— **Élasticité-prix du bien 1 :**

$$\varepsilon_{p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1} = \frac{-R}{(p_1 + p_2)^2} \cdot \frac{p_1}{\frac{R}{p_1 + p_2}} = \frac{-p_1}{p_1 + p_2} < 0$$

Quand le prix du bien 1 augmente, la demande du bien 1 diminue.

— **Élasticité prix du bien 2 :**

$$\varepsilon_{p_2} = \frac{-p_2}{p_1 + p_2} < 0$$

Quand le prix du bien 2 augmente la demande du bien 2 diminue.

— **Élasticité revenu du bien 1 :**

$$\varepsilon_{R_1} = \frac{\partial x_1}{\partial R} \cdot \frac{R}{x_1} = \frac{1}{(p_1 + p_2)} \cdot \frac{R}{\frac{R}{p_1 + p_2}} = 1$$

Quand le revenu augmente de 1%, la demande pour le bien 1 augmente de 1%.

— **Élasticité-revenu du bien 2 :**

$$\varepsilon_{R_2} = \frac{\partial x_2}{\partial R} \cdot \frac{R}{x_2} = \frac{1}{(p_1 + p_2)} \cdot \frac{R}{\frac{R}{p_1 + p_2}} = 1$$

Quand le revenu augmente de 1%, la demande pour le bien 2 augmente de 1%.

— **Élasticité-prix croisée :**

$$\varepsilon_c = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_1} = \frac{-R}{(p_1 + p_2)^2} \cdot \frac{p_2}{\frac{R}{p_1 + p_2}} = \frac{-p_2}{p_1 + p_2} < 0$$

Quand le prix du bien 2 augmente la demande du bien 1 diminue : les biens sont complémentaires pour Anouk.

Pour Joseph :

$$x_1^* = \frac{R}{p_1} \text{ et } x_2^* = 0$$

$$\text{ou } x_1^* = 0 \text{ et } x_2^* = \frac{R}{p_2}$$

— **Élasticité-prix du bien 1 :**

$$\varepsilon_{p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1} = \frac{-R}{p_1^2} \cdot \frac{p_1}{\frac{R}{p_1}} = -1 < 0$$

Quand le prix du bien 1 augmente de 1%, la demande du bien 1 diminue de 1% ou bien ε_{p_1} est indéfinie.

— **Élasticité-prix du bien 2 :**

$$\varepsilon_{p_2} = \frac{\partial x_2}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_2} = \frac{-R}{p_2^2} \cdot \frac{p_2}{\frac{R}{p_2}} = -1 < 0$$

Quand le prix du bien 2 augmente de 1%, la demande du bien 1 diminue de 1% ou bien ε_{p_2} est indéfinie.

— **Élasticité-revenu du bien 1 :**

$$\varepsilon_{R_1} = \frac{\partial x_1}{\partial R} \cdot \frac{R}{x_1} = \frac{1}{p_1} \cdot \frac{R}{\frac{R}{p_1}} = 1$$

Quand le revenu augmente de 1%, la demande pour le bien 1 augmente de 1% ou bien ε_{R_1} est indéfinie.

— **Élasticité-revenu du bien 2 :**

$$\varepsilon_{R_2} = \frac{\partial x_2}{\partial R} \cdot \frac{R}{x_2} = \frac{1}{p_2} \cdot \frac{R}{\frac{R}{p_2}} = 1$$

Quand le revenu augmente de 1%, la demande pour le bien 2 augmente de 1% ou ε_{R_2} est indéfinie.

— **Élasticité-prix croisée :**

$$\varepsilon_c = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_1} = 0 \text{ ou bien } \varepsilon_c \text{ est indéfinie.}$$

Les demandes des deux biens sont indépendantes.

4.

— **L'élasticité-revenu :**

- < 0 : bien inférieur
- comprise entre 0 et 1 : bien normal
- > 1 : bien supérieur

— **L'élasticité-prix :**

- < 0 et :
 - comprise entre -1 et 0 : bien nécessaire, faiblement élastique
 - inférieure à -1 : bien fortement élastique
- > 0 : bien Veblen ou Giffen

— **L'élasticité-prix croisée :**

- < 0 : biens complémentaires

- $= 0$: biens indépendants
- > 0 : biens substituables

Remarques :

- Si le revenu apparaît dans l'expression finale de l'élasticité, elle est non-isoélastique (elle varie avec le revenu).
- Pour les biens complémentaires, la fonction d'utilité est de forme :

$$U(x_1, x_2) = \min(x, y)$$

- Pour les biens substituables, la fonction d'utilité est de forme :

$$U(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

avec α et β inférieurs à 1. C'est la forme la plus classique.

- Pour les biens parfaitement substituables la fonction d'utilité est de forme :

$$U(x, y) = x + y$$

Il existe différents paniers optimaux selon le rapport des prix. Il faut penser à distinguer les cas.

1.5 Effet de substitution et effet de revenu

Soit un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction suivante :

$$U(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$$

où x et y représentent la consommation de deux biens différents.

Le revenu de l'agent est noté R .

Les prix respectifs des biens x et y sont notés p_x et p_y .

Question 1 Calculez les demandes marshalliennes de l'agent.

Question 2 On pose :

— $R = 16$

— $p_x = 1$ et $p_y = 2$

Déterminez les demandes marshalliennes.

Question 3 On suppose désormais $p_x = 4$. Calculez les nouvelles demandes marshalliennes de l'agent. Comment ont évolué les demandes ?

Effet de revenu et effet de substitution : l'objectif est désormais de décomposer la variation de la demande en un effet de revenu et un effet de substitution. On étudie ici les effets de revenu et de substitution **au sens de Hicks**, c'est-à-dire à l'utilité constante.

Question 4 Déterminez le revenu théorique nécessaire pour que l'agent conserve la même utilité avec les nouveaux prix.

Question 5 Déterminez les demandes marshalliennes avec ce revenu théorique et les nouveaux prix.

Question 6 Décomposez la variation totale en effet de revenu et effet de substitution

Question 7 Représentez graphiquement la décomposition de l'effet total.

Question 8 Recommencez le processus selon l'interprétation de Slutsky, c'est-à-dire à pouvoir d'achat constant.