

**MPSI
MP2I**

MATHS

**36 semaines pour réviser
et approfondir son cours**

- **243 exercices corrigés**
- **17 problèmes corrigés**



Cédric Thomas

**MPSI
MP2I**

MATHS

**36 semaines pour réviser
et approfondir son cours**

Cédric Thomas

Professeur agrégé de mathématiques



Du même auteur aux éditions Ellipses

Maths Spé, Première, 14 sujets-type corrigés de l'épreuve anticipée du Bac, Annales 2026, 2^e édition, 2026.

Maths Techno, Première, 10 sujets-type corrigés de l'épreuve anticipée du Bac, 2026.

Maths Tronc commun, Première, 10 sujets-type corrigés de l'épreuve anticipée du Bac, 2025.

ISBN 9782340-117969

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

A ma femme,
A mes enfants,
A mes parents.

Selon que notre idée est plus ou moins obscure,
L'expression la suit, ou moins nette, ou plus pure.
Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
Et les mots pour le dire arrivent aisément.

Hâtez-vous lentement ; et, sans perdre courage,
Vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage :
Polissez-le sans cesse et le repolissez ;
Ajoutez quelquefois, et souvent effacez.

A tous les professeurs
Qui m'ont ouvert l'esprit aux mathématiques.
Et à tous ceux qui aujourd'hui
Poursuivent leur œuvre, résistent.

Avant-propos

Cet ouvrage a été conçu pour être un **compagnon** de l'étudiant de première année de classe préparatoire.

Sa **structure chronologique**, fondée sur une progression classique, permet aussi bien :

- un **accompagnement quotidien et différencié** semaine/week-end ;
- un accompagnement pendant les vacances scolaires pour les **révisions** des notions étudiées lors de la période précédente ;
- un accompagnement pour un travail de **consolidation** des notions de première année avant l'entrée en deuxième année.

Ce livre comprend **243 exercices** (parfois regroupés) et **17 problèmes**. Ces exercices et ces problèmes bénéficient dans leur totalité de **corrigés très détaillés et illustrés** de représentations graphiques lorsque le sujet s'y prête.

Les exercices sont de longueur et de difficulté variées. Ils abordent **l'ensemble des savoir-faire** utiles et nécessaires à la réussite en première année. Leur résolution fait aussi bien appel à des méthodes classiques qu'à des prises d'initiative plus originales.

L'aspect technique, qui est essentiel en mathématiques et qui pose problème à de nombreux étudiants, n'est pas oublié. Une bonne habileté calculatoire est en effet un **atout précieux** et j'ai pour habitude de dire qu'on ne s'entraîne jamais trop à calculer. Et personne ne contestera qu'en tout état de cause, on ne calcule jamais trop bien.

Les 17 problèmes nécessitent un temps de recherche plus long. Ils balayent les grandes notions de première année et constituent un **entraînement** idéal pour les **devoirs surveillés** et les épreuves de concours.

Le contenu de cet ouvrage est fondé sur le programme officiel de **MPSI/MP2I** et c'est d'abord aux étudiants de cette filière qu'il s'adresse.

Je le pense également capable de rendre de fiers services aux étudiants de toute filière contenant une solide composante mathématique, en classes préparatoires comme à l'université (**PCSI, BCPST, L1/L2 etc...**)

Il peut enfin constituer une intéressante source d'entraînement pour les étudiants préparant le **CAPES** ou l'**Agrégation** de mathématiques.

Malgré le soin apporté à la réalisation de ce livre, des coquilles voire des erreurs peuvent subsister. Le lecteur pourra s'il le souhaite m'adresser directement toute correction, et plus généralement tout commentaire à l'adresse électronique : thomasprofmaths@gmail.com.

Je remercie enfin Jonathan Etrog et Rémi Chmura pour la relecture de certains chapitres de ce livre.

Table des matières

Index des notations et abréviations	7
Index des problèmes	8

<i>SEMAINE</i>	<i>CHAPITRE</i>	<i>ÉNONCÉS</i>	<i>CORRIGÉS</i>
1	Calcul algébrique	9	12
2	Logique et raisonnements	21	23
3	Ensembles et applications	33	35
4	Relations binaires	45	48
5	Rappels et compléments sur les fonctions	55	57
6	Fonctions usuelles	65	67
7	Nombres complexes	75	77
8	Compléments sur les réels	87	89
9	Suites numériques	95	98
10	Primitives et changement de variable	107	111
11	Équations différentielles linéaires	125	127
12	Structures algébriques usuelles	143	146
13	Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	155	158
14	Polynômes	169	171
15	Arithmétique des polynômes	179	183
16	Fractions rationnelles	197	199
17	Matrices et systèmes linéaires	211	213
18	Limites et continuité	221	224
19	Dérivabilité	237	240
20	Fonctions convexes	251	253
21	Analyse asymptotique de niveau 1	261	264
22	Espaces vectoriels (sans la notion de dimension)	273	276

23	Applications linéaires (sans la notion de dimension)	287	291
24	Espaces vectoriels ayant une partie génératrice finie	307	310
25	Matrices et applications linéaires	323	327
26	Intégration	341	344
27	Séries numériques	353	356
28	Développements limités et développements asymptotiques	365	368
29	Groupes symétriques	377	379
30	Déterminants	385	389
31	Familles sommables	395	397
32	Espaces préhilbertiens réels	407	411
33	Dénombrement	423	426
34	Espaces probabilisés finis	433	436
35	Indicateurs de position et de dispersion d'une variable aléatoire	445	449
36	Fonctions de deux variables	459	462

Index des notations et abréviations

F^E : ensemble des applications de E dans F .

$\mathcal{L}(E, F)$: ensemble des applications linéaires de E dans F .

$|E|$: cardinal de l'ensemble E .

cf. : confer.

$\mathcal{C}^k(I, J)$: ensemble des fonctions de classe C^k sur I à valeurs dans J .

$M_{i,j}$: coefficient situé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne de M .

$\mathbb{K}$: corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$.

$\mathcal{C}_f$: courbe représentative de la fonction f .

(i, j, k) : cycle dans le contexte des permutations.

$DL(a; n)$: développement limité à l'ordre n en a .

$a|b, P|Q$: l'entier a divise l'entier b , le polynôme P divise le polynôme Q .

$\mathcal{L}(E)$: ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel E .

(HR) : hypothèse de récurrence.

id_E : application identité de l'ensemble E , notée id s'il n'y a pas d'ambiguïté.

i.e : id est (c'est-à-dire).

$GL(E)$: ensemble des isomorphismes de l'espace vectoriel E .

$j : e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (dans le contexte des nombres complexes).

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficient dans $\mathbb{K}$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{K}$.

$GL_n(\mathbb{K})$: ensemble des matrices inversibles d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{K}$.

$M(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$: matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

$M(u, \mathcal{B})$: matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$.

$a\mathbb{Z} + b$: ensemble des nombres de la forme $ak + b$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$o(x_i)$: ordre de multiplicité de la racine x_i .

$\mathcal{P}(E)$: ensemble des parties de l'ensemble E .

S_n : ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

$a \wedge b, P \wedge Q$: pgcd des entiers a et b , des polynômes P et Q .

$\mathbb{K}[X]$: ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}_n[X]$: ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés inférieurs ou égaux à n .

$(u|v)$: produit scalaire des vecteurs u et v .

Résolution de systèmes : $\xrightarrow{L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2}$ indique qu'on remplace la 1^{ère} ligne par 3 fois la 1^{ère} ligne moins 2 fois la 2^e, et que les systèmes sont équivalents.

$f|_A$: restriction de la fonction f à une partie A .

sev : sous-espace vectoriel.

M^T : transposée de la matrice M .

Index des problèmes

Chapitre	Thème	Enoncés	Corrigés
Nombres complexes	Etude d'une équation avec paramètre	76	83
Primitives	Intégrales abéliennes	109	119
Equations différentielles	Recherche de solutions périodiques	126	136
Structures Algébriques	Sous-groupes additifs de $(\mathbb{R}, +)$	145	151
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	Equation diophantienne avec paramètre	156	164
Polynômes	Polynômes de Tchebychev	170	176
Polynômes	Polynômes de Legendre	181	191
Continuité	Equation fonctionnelle	222	232
Espaces vectoriels	Equations différentielles et suites récurrentes	274	283
Applications linéaires	Opérateur de différence finie	289	300
Espaces vectoriels	Dualité	308	317
Applications linéaires	Commutateurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	325	335
Séries numériques	Problème de Bâle	355	362
Déterminants	Déterminants tridiagonaux	387	392
Familles sommables	Réarrangement de Riemann	396	403
Espaces préhilbertiens	Produit vectoriel	409	417
Probabilités	Collectionneur de vignettes	447	455

Calcul algébrique



EXERCICES DE LA SEMAINE

Exercice 1. Opérations sur les inégalités, valeur absolue

- 1- Sans étude des variations, encadrer pour tout $x \in [1; 5]$, la quantité :

$$q(x) = \frac{4x^2 - 3}{2x - 1}$$

- 2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x - 3| \leq |2x + 2|$.

Exercice 2. Opérations sur les inégalités, valeur absolue, racine carrée

- 1- Montrer que :

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = \frac{12 + 5\sqrt{6}}{6}$$

- 2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 - 9} \leq x - 5$.

Exercice 3. Calcul de sommes

- 1- Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n z^{2k+1}$$

- 2- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=0}^n i \times i! = (n+1)! - 1$$

- 3- Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$$

Exercice 4. Calcul de sommes, coefficients binomiaux

- 1- Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

2- Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p}$$

3- Montrer que pour tout $(m; n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$$

Exercice 5. Calcul de produits

n désigne un entier naturel.

1- Exprimer à l'aide de factorielles les produits suivants :

$$P_1 = \prod_{i=0}^n (i+3) \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{j=1}^n (n+j)$$

2- Calculer :

$$P = \prod_{m=1}^n \frac{3m+2}{3m+5}$$



EXERCICES DU WEEKEND

Opérations sur les inégalités, calcul de sommes et de produits

Partie A

Montrer que pour tout $(a; b) \in]-1; 1[^2$:

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$$

Partie B

n désigne un entier naturel.

1- Calculer :

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij$$

2- Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer :

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} z^{i+j}$$

Partie C

Pour tous entiers naturels n et p , on note :

$$u_{n,p} = \sum_{k=0}^n ((k+1)^p - k^p)$$

1- En considérant la suite $(u_{n,2})$, retrouver que :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2- De même, retrouver l'expression de :

$$\sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^3$$

3- En considérant la suite $(u_{n,5})$, montrer que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$



CORRIGÉ DES EXERCICES DE LA SEMAINE

Exercice 1

$$1- \quad 1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 25 \quad (x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0; +\infty[)$$

$$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 4 \leq 4x^2 \leq 100 \quad (4 > 0)$$

$$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq 4x^2 - 3 \leq 97$$

De plus :

$$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 10 \quad \text{car } 2 > 0$$

$$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq 2x - 1 \leq 9$$

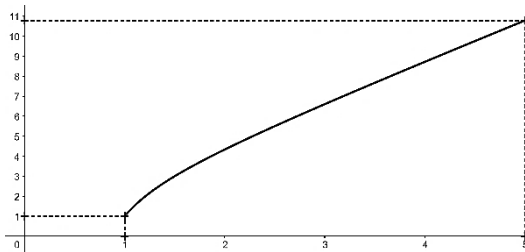
$$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{2x-1} \geq \frac{1}{9} \quad (x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[)$$

$$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{2x-1} \leq 1$$

On peut ensuite multiplier ces inégalités entre quantités **positives** :

$$\frac{1}{9} \leq \frac{4x^2 - 3}{2x - 1} \leq 97$$

Les valeurs extrêmes des quantités intermédiaires encadrées n'étant pas forcément obtenues pour la même valeur de la variable, on est en général assez loin d'obtenir les extrema de la fonction (voir ci-dessous pour l'exemple précédent).



2- La stratégie générale consiste à se défaire des valeurs absolues.

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ 3 - x & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad |2x + 2| = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \geq -1 \\ -2x - 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut résumer les différents cas dans un tableau :

x	$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 3$	$x \geq 3$
$ x - 3 $	$3 - x$	$3 - x$	$x - 3$
$ 2x + 2 $	$-2x - 2$	$2x + 2$	$2x + 2$
$ x - 3 \leq 2x + 2 $	$3 - x \leq -2x - 2$	$3 - x \leq 2x + 2$	$x - 3 \leq 2x + 2$

Premier cas

Dans $] -\infty; -1]$:

$$|x - 3| \leq |2x + 2| \Leftrightarrow 3 - x \leq -2x - 2$$

$$|x - 3| \leq |2x + 2| \Leftrightarrow x \leq -5$$

On obtient $] -\infty; -5]$ comme premier intervalle solution.

Deuxième cas

Dans $[-1; 3]$:

$$|x - 3| \leq |2x + 2| \Leftrightarrow 3 - x \leq 2x + 2$$

$$|x - 3| \leq |2x + 2| \Leftrightarrow 3x \geq 1$$

$$|x - 3| \leq |2x + 2| \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3} \quad (3 > 0)$$

On obtient $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ comme deuxième intervalle solution.

Troisième cas

Dans $[3; +\infty[$:

$$|x - 3| \leq |2x + 2| \Leftrightarrow x - 3 \leq 2x + 2$$

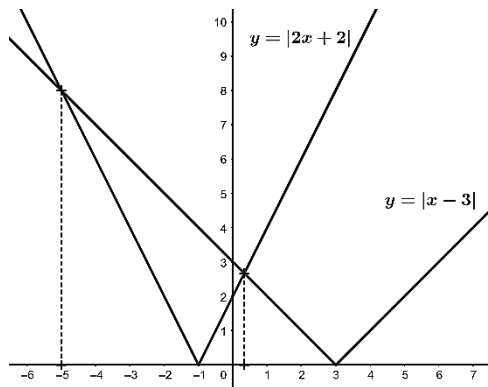
$$|x - 3| \leq |2x + 2| \Leftrightarrow x \geq -5$$

On obtient $[3; +\infty[$ comme troisième intervalle solution.

Finalement :

$$\mathcal{S} =] -\infty; -5] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

Graphiquement :



□

Exercice 2

- 1- On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = \frac{6 + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 6}{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = \frac{12 + 5\sqrt{6}}{18 - 12} = \frac{12 + 5\sqrt{6}}{6}$$

Cette stratégie permet de systématiquement éliminer les racines carrées du dénominateur.

- 2- On peut se placer dans l'intervalle $[5; +\infty[$ puisque $x - 5 \geq 0$ est une condition nécessaire évidente.

Dans cet intervalle les deux membres sont positifs et on peut alors passer aux carrés pour se défaire de la racine.

Dans $[5; +\infty[$:

$$\sqrt{x^2 - 9} \leq x - 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9}^2 \leq (x - 5)^2 \quad (x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } [0; +\infty[)$$

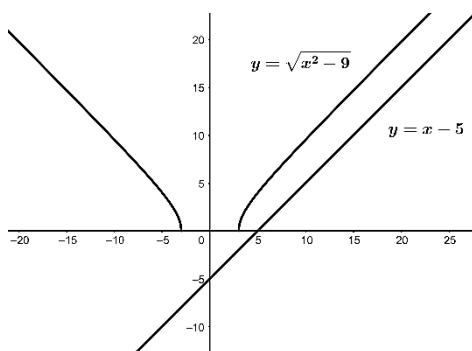
$$\sqrt{x^2 - 9} \leq x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq x^2 - 10x + 25$$

$$\sqrt{x^2 - 9} \leq x - 5 \Leftrightarrow 10x \leq 34$$

$$\sqrt{x^2 - 9} \leq x - 5 \Leftrightarrow x \leq 3,4 \quad (10 > 0)$$

Finalement $\mathcal{S} = \emptyset$ puisque les conditions $x \geq 5$ et $x \leq 3,4$ sont incompatibles.

Graphiquement :



□

Exercice 3

- 1- On peut se ramener au calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique en observant que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$z^{2k+1} = z \times (z^2)^k$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n z^{2k+1} = \sum_{k=0}^n z \times (z^2)^k = z \times \sum_{k=0}^n (z^2)^k$$

Il faut différencier les cas $z^2 = 1$ et $z^2 \neq 1$.

- Si $z^2 = 1$ i.e si $z = \pm 1$ alors :

$$\sum_{k=0}^n z^{2k+1} = z \sum_{k=0}^n 1 = (n+1)z = \begin{cases} n+1 & \text{si } z = 1 \\ -n-1 & \text{si } z = -1 \end{cases}$$

- Si $z^2 \neq 1$ alors :

$$\sum_{k=0}^n z^{2k+1} = z \times \frac{1 - (z^2)^{n+1}}{1 - z^2} = \frac{z - z^{2n+3}}{1 - z^2}$$

2- On peut se ramener à une somme télescopique en observant que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $i \times i! = (i+1-1) \times i! = (i+1)! - i!$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=0}^n i \times i! = \sum_{i=0}^n ((i+1)! - i!) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1.$$

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n j \times \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n 1 = n$$

Dans une somme double avec indices dépendants, il faut veiller à toujours respecter la relation entre les indices. Par exemple, si $1 \leq i \leq j \leq n$: à chaque valeur de i entre 1 et n , on fait varier j entre i et n ; ou à chaque valeur de j entre 1 et n , on fait varier i entre 1 et j . On peut donc écrire :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$

□

Exercice 4

1- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

2- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p 1^{n-p} = (1-1)^n = 0$$

3- On peut se ramener à une somme télescopique en utilisant le triangle de Pascal. Pour tout $(m; n) \in \mathbb{N}^2$ et tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m} = \sum_{k=0}^n \left[\binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1} \right]$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1} - \underbrace{\binom{m}{m+1}}_{=0} = \binom{m+n+1}{m+1}$$

car $m < m+1$

□

Exercice 5

1-

$$\bullet P_1 = \frac{1}{2} \left(1 \times 2 \times \prod_{i=0}^n (i+3) \right) = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n+3} i = \frac{(n+3)!}{2}$$

$$\bullet P_2 = \frac{1}{\prod_{i=1}^n j} \left(\prod_{j=1}^n j \right) \left(\prod_{j=1}^n (n+j) \right) = \frac{1}{n!} \left(\prod_{j=1}^n j \right) \left(\prod_{j=n+1}^{2n} j \right) = \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{2n} j$$

D'où :

$$P_2 = \frac{(2n)!}{n!}$$

2- Il s'agit d'un produit télescopique :

$$P = \prod_{m=1}^n \frac{3m+2}{3m+5} = \frac{\prod_{m=1}^n (3m+2)}{\prod_{m=1}^n (3m+5)} = \frac{\prod_{m=1}^n (3m+2)}{\prod_{m=2}^{n+1} (3m+2)} = \frac{5}{3n+5}$$

□



CORRIGÉ DES EXERCICES DU WEEKEND

Partie A

Pour tout $(a; b) \in]-1; 1[^2$:

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab| \quad \text{car } |1+ab| > 0$$

Comparer deux nombres **positifs** revient à comparer leurs carrés. Ainsi :

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1 \Leftrightarrow |a+b|^2 < |1+ab|^2$$

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1 \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2$$

De plus :

$$(a+b)^2 - (1+ab)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 1 - 2ab - a^2b^2$$

$$(a+b)^2 - (1+ab)^2 = a^2(1-b^2) + b^2 - 1$$

$$(a+b)^2 - (1+ab)^2 = a^2(1-b^2) - (1-b^2)$$

$$(a+b)^2 - (1+ab)^2 = (1-b^2)(a^2-1)$$

Or par hypothèse $1-b^2 > 0$ et $a^2-1 < 0$.

Il en découle que pour tout $(a; b) \in]-1; 1[^2$, $(a+b)^2 < (1+ab)^2$.

Et finalement que pour tout $(a; b) \in]-1; 1[^2$:

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$$

Partie B

$$1- \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^n ij \right) = \prod_{j=1}^n \left(j^n \prod_{i=1}^n i \right) = \prod_{j=1}^n (j^n n!)$$

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij = (n!)^n \left(\prod_{j=1}^n j \right)^n = (n!)^n (n!)^n = (n!)^{2n}$$

2- Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} z^{i+j} = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^j (z^i \times z^j) \right) = \prod_{j=1}^n \left((z^j)^j \prod_{i=1}^j z^i \right)$$

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} z^{i+j} = \prod_{j=1}^n \left(z^{j^2} z^{\frac{j(j+1)}{2}} \right) = \prod_{j=1}^n \left(z^{\frac{3}{2}j^2} z^{\frac{j}{2}} \right) = z^{\frac{3}{2} \sum_{j=1}^n j^2} \times z^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j}$$

Or :

$$\frac{3}{2} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

Finalement :

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} z^{i+j} = z^{\frac{n(n+1)^2}{2}}$$

Dans une somme, un facteur commun à tous les termes peut « sortir » du signe $\sum$: c'est la mise en facteur.

$$\sum_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i$$

Dans un produit, un facteur commun à tous les facteurs peut aussi « sortir » du signe $\prod$ mais il apparaît alors à une puissance égale au nombre de facteurs du produit.

$$\prod_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i=1}^n a_i$$

Partie C

1- Soit $n \in \mathbb{N}$.

On exprime $u_{n,2}$ de deux manières différentes.

$$u_{n,2} = \sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$$

$$u_{n,2} = 2 \sum_{k=0}^n k + n + 1$$

Or $u_{n,2}$ est aussi une somme télescopique : $u_{n,2} = (n+1)^2 - 0^2 = (n+1)^2$.

Il s'ensuit que :

$$2 \sum_{k=0}^n k + n + 1 = (n+1)^2 \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{1}{2}((n+1)^2 - (n+1))$$

D'où finalement :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n+1}{2}(n+1-1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

2- On procède de la même manière avec $u_{n,3}$ puis avec $u_{n,4}$.

$$u_{n,3} = \sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3$$

Mais aussi :

$$u_{n,3} = \sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

$$u_{n,3} = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1$$

Il en découle que :

$$3 \sum_{k=0}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^3$$

Il vient alors :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) \right)$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n+1}{3} \left((n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1 \right) = \frac{n+1}{3} \left(n^2 + \frac{n}{2} \right)$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)}{3} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{3} \times \frac{2n+1}{2}$$

Et finalement :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Puis :

$$u_{n,4} = \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 0^4 = (n+1)^4$$

Mais aussi :

$$u_{n,4} = \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) = \sum_{k=0}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$$

$$u_{n,4} = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$$

$$u_{n,4} = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n + 1$$

Il en résulte que :

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n+1}{4} ((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1)$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n+1}{4} (n^3 + n^2) = \frac{(n+1)n^2}{4} (n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

3- Le principe déjà éprouvé trois fois dans les questions précédentes, est désormais clair. Reste la nécessité d'organiser le calcul.

$$u_{n,5} = \sum_{k=0}^n ((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 0^5 = (n+1)^5$$

Mais aussi :

$$u_{n,5} = \sum_{k=0}^n ((k+1)^5 - k^5) = \sum_{k=0}^n (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1)$$

$$u_{n,5} = 5 \sum_{k=0}^n k^4 + \frac{5n^2(n+1)^2}{2} + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{5n(n+1)}{2} + n + 1$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^n k^4 = \frac{(n+1)^5}{5} - \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{5}$$

$$\sum_{k=0}^n k^4 = \frac{n+1}{30} (6(n+1)^4 - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6)$$

$$\sum_{k=0}^n k^4 = \frac{n+1}{30} (6n^3 + 9n^2 + n - 1) \quad \text{après développement et réduction}$$

$$\text{Or } 6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(3n^2 + 3n - 1).$$

On obtient finalement :

$$\sum_{k=0}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

□

Logique et raisonnements



EXERCICES DE LA SEMAINE

Exercice 1. Tables de vérité

Utiliser des tables de vérité pour prouver que les formules ci-dessous sont des tautologies (i.e sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui les composent).

- 1- p ou $(\text{non } p)$.
- 2- $(p \text{ et } (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$.
- 3- $((p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

Exercice 2. Utiliser les quantificateurs, nier une proposition

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations.

- 1- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2- f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
- 3- f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
- 4- f s'annule sur $\mathbb{R}$.
- 5- f est nulle sur $\mathbb{R}$.
- 6- f s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Raisonnement par l'absurde

- 1- Montrer que si p est un nombre premier alors $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.
- 2- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2 + 2} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 4. Disjonction de cas

- 1- Pour tout entier naturel n , on note $a_n = 10^n + 3$.
 - a) Montrer que si $n \geq 1$ alors a_n n'est pas le carré d'un entier.
 - b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles a_n peut s'écrire comme la somme des carrés de deux entiers.
- 2- Montrer qu'il existe une infinité de couples $(a; b)$ vérifiant :

$$(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2 \text{ et } a^b \in \mathbb{Q}$$

Indication : on pourra s'aider du 1- de l'exercice 3.

Exercice 5. Analyse-synthèse

Soit une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{R}^*$.

Montrer que f peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en k et en $-k$.



EXERCICES DU WEEKEND

Réurrence, analyse-synthèse, raisonnement par l'absurde

Partie A

1- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11.

2- Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Z}$$

Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}$$

3- Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite de réels positifs définie par $v_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_{n+1}^2 = \sum_{k=1}^n v_k$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geq \frac{n}{4}$$

Partie B

Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad f(m+n) + f(m-n) = 2f(m) + 2f(n) \quad (*)$$

Partie C

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in [0; 1]^{n+1}$.

Montrer que :

$$\exists (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2 \mid \left(i \neq j \text{ et } |a_i - a_j| \leq \frac{1}{n} \right)$$



CORRIGÉ DES EXERCICES DE LA SEMAINE

Exercice 1

1-

p	non p	p ou (non p)
V	F	V
F	V	V

La proposition (p ou q) est fausse si et seulement si les propositions p et q sont simultanément fausses.

2-

p	q	$p \Rightarrow q$	p	p et ($p \Rightarrow q$)	q	$(p$ et ($p \Rightarrow q$)) $\Rightarrow q$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V

- La proposition ($p \Rightarrow q$) est fausse si et seulement si p est vraie et q est fausse.
- Il n'est pas indispensable de répéter les colonnes p et q mais cela peut permettre d'éviter certaines erreurs de lecture susceptibles de se produire lorsqu'il y a nécessité de se référer à des colonnes non adjacentes.

3-

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)$	$((p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

□

Exercice 2

1- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$

Négation : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x < y \text{ et } f(x) \geq f(y)).$

Une fonction croissante est une fonction qui conserve les inégalités. Une fonction décroissante renverse quant à elle les inégalités. C'est valable pour les inégalités strictes – et cela fait parfois une différence considérable – lorsque la fonction est strictement monotone. Ces propriétés sont grandement mises à contribution dès lors qu'on manipule des inégalités. Il est essentiel de les garder à l'esprit.

2- $\forall M \geq 0, \exists x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| > M.$

Négation : $\exists M \geq 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M.$

3- $\exists a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(a).$

Négation : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) > f(a).$

Un maximum est un majorant qui est atteint. S'il existe, il est unique. Par contre, s'il existe un majorant, il en existe une infinité (si M est un majorant alors tous les $M' > M$ sont aussi des majorants).

4- $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0.$

Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$

5- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0.$

Une fonction qui est nulle sur un ensemble s'annule sur cet ensemble : qui peut le plus, peut le moins. Par contre, une fonction qui s'annule sur un ensemble n'est en général pas nulle sur cet ensemble : le logarithme népérien s'annule en 1 et nulle part ailleurs.

6- Il y a plusieurs manières d'écrire cette proposition. La plus efficace repose probablement sur le fait d'observer qu'elle signifie que si deux réels ont des images nulles, alors ils sont forcément égaux. On obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow x = y)$$

On aurait aussi pu écrire :

$$(\exists! x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0)$$

Négation : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \neq y \text{ et } f(x) = f(y) = 0)$

□

Exercice 3

1- Supposons que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$:

$$\exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid (\sqrt{p} = \frac{a}{b} \text{ et } a \wedge b = 1)$$

On en déduit que :

$$p = \frac{a^2}{b^2} \text{ et donc que } a^2 = pb^2$$

Ainsi p divise a^2 . Et puisque p est premier, p divise a . Il existe donc un entier a' tel que $a = pa'$.

Il s'ensuit que $a^2 = p^2 a'^2$ et donc que $p^2 a'^2 = pb^2$.

La simplification par $p \neq 0$ donne alors $pa'^2 = b^2$.

Il en découle que p divise b^2 et donc que p divise b puisque p est premier. p divise a et b est alors en contradiction avec a et b sont premiers entre eux.

Finalement $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$ est une hypothèse fausse et donc $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

2- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \sqrt{n^2 + 2} \in \mathbb{N}$.

On a alors de manière évidente $N \geq n$.

De plus :

$$N = \sqrt{n^2 + 2} \Rightarrow N^2 = n^2 + 2$$

$$N = \sqrt{n^2 + 2} \Rightarrow N^2 - n^2 = 2$$

$$N = \sqrt{n^2 + 2} \Rightarrow (N - n)(N + n) = 2$$

$(N - n)$ et $(N + n)$ sont alors deux facteurs entiers positifs dont le produit fait 2, avec en outre $N + n \geq N - n$.

Il en découle que N et n sont solutions du système :

$$\begin{cases} N + n = 2 & (L_1) \\ N - n = 1 & (L_2) \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne alors $2N = 3$ et donc $N = 1,5$: il y a contradiction avec $N \in \mathbb{N}$.

En conséquence l'hypothèse « $\exists n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2 + 2} \in \mathbb{N}$ » est fausse.

Et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2 + 2} \notin \mathbb{N}$$

□

Dans le raisonnement par l'absurde, pour démontrer une proposition p , on suppose non p et on en déduit une contradiction. Il faut donc veiller à effectivement utiliser l'hypothèse non p . Dans le cas contraire, il s'agit au mieux d'un raisonnement direct mal nommé.

Exercice 4

1- On réduit le problème modulo 4.

Considérons un entier naturel n .

$$n \equiv 0 (4) \Rightarrow n^2 \equiv 0 (4)$$

$$n \equiv 1 (4) \Rightarrow n^2 \equiv 1 (4)$$

$$n \equiv 2 (4) \Rightarrow n^2 \equiv 4 (4) \quad \text{donc} \quad n \equiv 2 (4) \Rightarrow n^2 \equiv 0 (4)$$

$$n \equiv 3 (4) \Rightarrow n^2 \equiv 9 (4) \quad \text{donc} \quad n \equiv 3 (4) \Rightarrow n^2 \equiv 1 (4)$$

Ainsi le carré d'un entier ne peut être congru qu'à 0 ou 1 modulo 4.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$10 \equiv 2 (4) \quad \text{donc} \quad 10^n \equiv 2^n (4).$$

Ainsi dès que $n \geq 2$, $10^n \equiv 0 (4)$ et $a_n \equiv 3 (4)$.

Si $n \geq 2$, a_n n'est donc le carré d'aucun entier naturel.

De plus :

- $a_0 = 10^0 + 3 = 4 = 2^2$;
- $a_1 = 10^1 + 3 = 13$ donc a_1 n'est pas le carré d'un entier.

Finalement si $n \geq 1$, a_n n'est pas le carré d'un entier.

b) D'après le préambule, la somme des carrés de deux entiers ne peut être congrue qu'à 0 ; 1 ou 2 modulo 4.

On peut alors affirmer d'après a) que si $n \geq 2$ alors a_n ne peut pas s'écrire comme la somme des carrés de deux entiers.

De plus :

- $a_0 = 10^0 + 3 = 4 = 0^2 + 2^2$;
- $a_1 = 10^1 + 3 = 13 = 2^2 + 3^2$.

Finalement a_n s'écrit comme la somme des carrés de deux entiers si et seulement si $n = 0$ ou $n = 1$.

2- Soit p un entier premier.

On a déjà montré que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

Considérons maintenant le réel $x = (\sqrt{p})^{\sqrt{2}}$.

- Si $x \in \mathbb{Q}$ alors la propriété est démontrée ;

- Sinon, considérons le réel $y = x^{\sqrt{2}}$. Dans ce cas $y = a^b$ avec a et b dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

De plus :

$$y = x^{\sqrt{2}} = \left((\sqrt{p})^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{p})^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{p}^2 = p$$

Ainsi $y \in \mathbb{Q}$.

L'ensemble des nombres premiers étant infini, il y a bien une infinité de couples $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.

Nul besoin de le savoir pour démontrer la propriété du 2-, mais si p est premier alors $\sqrt[p]{p}^{\sqrt{2}}$ est non seulement irrationnel mais aussi transcendant. C'est une conséquence du théorème de Gelfond-Schneider.

□

Exercice 5

Analyse

Soit un réel k non nul et soit une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrivant $f = a + g$ avec a une fonction affine et g une fonction s'annulant en k et en $-k$.

a est affine donc il existe deux réels m et p tels que pour tout réel x :

$$a(x) = mx + p$$

L'évaluation de f en k et en $-k$ donne alors :

$$f(k) = a(k) + \underbrace{g(k)}_{=0} = mk + p \quad \text{et} \quad f(-k) = a(-k) + \underbrace{g(-k)}_{=0} = -mk + p$$

Il en résulte que m et p vérifient :

$$\begin{cases} mk + p = f(k) & (L_1) \\ -mk + p = f(-k) & (L_2) \end{cases}$$

De $L_1 + L_2$ on tire :

$$p = \frac{f(k) + f(-k)}{2}$$

Puis k étant non nul par hypothèse, de $L_1 - L_2$ on tire :

$$m = \frac{f(k) - f(-k)}{2k}$$

Il en découle que si a existe alors a est unique. Cela impose également l'unicité de $g = f - a$.

Synthèse

Soit un réel k non nul et soit une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit a la fonction affine s'écrivant pour tout réel x , $a(x) = mx + p$ avec :

$$m = \frac{f(k) - f(-k)}{2k} \quad \text{et} \quad p = \frac{f(k) + f(-k)}{2}$$

Soit la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $g = f - a$.

On a par définition de g , $f = a + g$.

De plus :

$$a(k) = mk + p = \frac{f(k) - f(-k)}{2} + \frac{f(k) + f(-k)}{2} = f(k) \quad \text{et}$$

$$a(-k) = -mk + p = \frac{f(-k) - f(k)}{2} + \frac{f(k) + f(-k)}{2} = f(-k).$$

Il s'ensuit que :

$$g(k) = f(k) - a(k) = 0 \quad \text{et} \quad g(-k) = f(-k) - a(-k) = 0$$

Les fonctions a et g ainsi définies conviennent donc.

Leur unicité ayant été prouvée dans la partie analyse, la propriété est démontrée.

□

La phase d'analyse consiste en la recherche de conditions nécessaires aussi précises que possible. La phase de synthèse consiste à déterminer si ces conditions nécessaires sont suffisantes.

Dans le cadre de la résolution d'une équation, cela revient à déterminer les seuls candidats solutions puis à vérifier si ce sont effectivement des solutions.



CORRIGÉ DES EXERCICES DU WEEKEND

Partie A

1- Fondons la récurrence au rang 0

$10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0$ et $0 = 0 \times 11$ est bien un multiple de 11.

La récurrence est donc fondée au rang 0.

Hérédité

Soit k un entier naturel tel que $10^k - (-1)^k \equiv 0 \pmod{11}$ (HR).

$$10^{k+1} \equiv 10 \times 10^k \pmod{11}$$

$$10^{k+1} \equiv -1 \times (-1)^k \pmod{11} \text{ d'après (HR) et car } 10 \equiv -1 \pmod{11}$$

$$10^{k+1} \equiv (-1)^{k+1} \pmod{11}$$

Ainsi $10^{k+1} - (-1)^{k+1} \equiv 0 \pmod{11}$ et la propriété est héréditaire à partir du rang 0.

On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ un multiple de 11.

Il est important qu'il y ait cohérence entre le ou les rangs auquel ou auxquels on fonde la récurrence, et le rang à partir duquel on prouve l'hérédité. Car si on est seulement capable de faire tomber le premier domino et de prouver que si à partir du deuxième domino, lorsqu'un domino tombe il entraîne son successeur, on ne peut pas affirmer que tous les dominos tomberont.

2- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On note pour tout entier naturel n :

$$u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$$

Fondons la récurrence aux rangs 0 et 1

$$x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \text{ donc } u_0 \in \mathbb{Z}.$$

$$u_1 = x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \text{ par hypothèse.}$$

La récurrence est donc fondée aux rangs 0 et 1.

Hérédité

Soit $k \geq 1$ un entier tel que $u_k \in \mathbb{Z}$ et $u_{k-1} \in \mathbb{Z}$ (HR)

On observe que :

$$u_1 u_k = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k+1}} = u_{k+1} + u_{k-1}$$

Ainsi d'après (HR) :

$$u_{k+1} = u_1 u_k - u_{k-1} \in \mathbb{Z}$$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang 1.

En conséquence, on a prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.

C'est un exemple de récurrence double. Dans la mesure où on a besoin que deux dominos tombent pour entraîner la chute de leur successeur, il est nécessaire de s'assurer de pouvoir faire tomber les deux premiers.

3- On observe que l'information dont on dispose au rang $(n + 1)$ fait intervenir la totalité des rangs inférieurs : cela doit inciter à faire une récurrence forte i.e à considérer pour $n \geq 1$ la propriété :

$$P(n) : \forall p \in \llbracket 1; n \rrbracket, v_p \geq \frac{p}{4}$$

Fondons la récurrence au rang 1

$$v_1 = 1 \text{ par hypothèse donc } v_1 \geq \frac{1}{4}$$

La récurrence est donc fondée au rang 1.

Hérédité

Soit $k \geq 1$ un entier tel que $P(k)$ est vraie. (HR)

$$\sum_{p=1}^k v_p \geq \sum_{p=1}^k \frac{p}{4} \text{ d'après(HR) et donc :}$$

$$\sum_{p=1}^k v_p \geq \frac{1}{4} \times \frac{k(k+1)}{2}$$

Ainsi :

$$v_{k+1}^2 \geq \frac{k(k+1)}{8}$$

De plus :

$$\frac{k(k+1)}{8} - \frac{(k+1)^2}{16} = \frac{2k^2 + 2k - k^2 - 2k - 1}{16} = \frac{k^2 - 1}{16} \geq 0$$

Ainsi :

$$v_{k+1}^2 \geq \frac{k(k+1)}{8} \geq \frac{(k+1)^2}{16}$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, et puisque v_{k+1} et $(k+1)$ sont positifs, on obtient :

$$v_{k+1} \geq \frac{k+1}{4}$$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang 1.

On a finalement montré par récurrence que pour tout $n \geq 1$:

$$v_n \geq \frac{n}{4}$$

Partie B

1- Analyse

Soit une fonction $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant (**).

- $m = n = 0$ donne $2f(0) = 4f(0)$ donc $f(0) = 0$.
- $m = n = 1$ donne $f(2) + f(0) = 4f(1)$ donc $f(2) = 4f(1) = 2^2f(1)$.
- $m = 2$ et $n = 1$ donne $f(3) + f(1) = 2f(2) + 2f(1)$ donc $f(3) = 9f(1) = 3^2f(1)$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $f(n) = n^2f(1)$.

➤ Fondons la récurrence aux rangs 0 et 1

- $f(0) = 0$ et $0^2f(1) = 0$.
- $1^2 \times f(1) = 1 \times f(1) = f(1)$.

La récurrence est donc fondée.

➤ Hérédité

Soit un entier $k \geq 1$ tel que $f(k) = k^2f(1)$ et $f(k-1) = (k-1)^2f(1)$ (hypothèse de récurrence (HR)).

$m = k$ et $n = 1$ donne $f(k+1) + f(k-1) = 2f(k) + 2f(1)$.

Ainsi :

$$f(k+1) = 2k^2f(1) - (k-1)^2f(1) + 2f(1) \text{ d'après (HR)}$$

$$f(k+1) = (2k^2 - (k-1)^2 + 2)f(1)$$

Or :

$$2k^2 - (k-1)^2 + 2 = 2k^2 - k^2 + 2k - 1 + 2 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Il en résulte que la propriété est héréditaire à partir du rang 1.

On a donc montré que si f vérifie (*) alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n^2f(1)$$

f étant à valeurs entières, cela impose en outre que $f(1) \in \mathbb{Z}$.

Finalement les seules fonctions pouvant vérifier la condition (*) sont les fonctions $f: n \mapsto an^2$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

Synthèse

Réciproquement soit $a \in \mathbb{Z}$ et soit une fonction $f: n \mapsto an^2$.
 f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

De plus pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$f(m+n) + f(m-n) = a(m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - 2mn + n^2)$$

$$f(m+n) + f(m-n) = a(2m^2 + 2n^2)$$

$$f(m+n) + f(m-n) = 2am^2 + 2an^2$$

$$f(m+n) + f(m-n) = 2f(m) + 2f(n).$$

Finalement les fonctions $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant (*) sont exactement les fonctions $n \mapsto an^2$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

Partie C

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in [0; 1]^{n+1}$.

Supposons que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2, \left(i \neq j \Rightarrow |a_i - a_j| > \frac{1}{n} \right) \quad (H)$$

Quitte à renuméroter les a_i , on peut supposer que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1}$.

On a alors :

$$|a_{n+1} - a_1| = a_{n+1} - a_1 = \sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i)$$

Or par hypothèse pour tout $i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, $a_{i+1} - a_i > \frac{1}{n}$.

Ainsi par l'inégalité triangulaire :

$$|a_{n+1} - a_1| \geq \sum_{i=1}^n |a_{i+1} - a_i| > n \times \frac{1}{n} = 1$$

C'est absurde puisque $(a_1, a_{n+1}) \in [0; 1]^2$.

L'hypothèse (H) est donc fausse et on peut par conséquent affirmer que :

$$\exists (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2 \mid \left(i \neq j \text{ et } |a_i - a_j| \leq \frac{1}{n} \right)$$

□

Ensembles et applications



EXERCICES DE LA SEMAINE

Exercice 1. Réunions et intersections

Soit F, G et H trois parties d'un ensemble E .

1- On suppose F, G et H non vides.

Montrer que : $((F \cup G) \subset (F \cup H) \text{ et } (F \cap G) \subset (F \cap H)) \Rightarrow (G \subset H)$

2- Montrer que : $F \setminus (F \setminus G) = F \cap G$.

3- Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation : $F \cup X = G$.

Exercice 2. Différence symétrique

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

On appelle différence symétrique de A et B , et on note $A \Delta B$, l'élément de $\mathcal{P}(E)$ défini par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Montrer que :

1- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2- Δ est une loi commutative et associative sur $\mathcal{P}(E)$.

On pourra utiliser une table de vérité pour démontrer l'associativité.

3- $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.

4- $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 3. Applications définies explicitement

Soit la fonction f définie pour $x \neq 2$ par :

$$f(x) = \frac{3+x}{2-x}$$

Déterminer deux intervalles maximaux (au sens de l'inclusion) entre lesquels f réalise une bijection.

Déterminer alors la fonction réciproque.

Exercice 4. Images directe et réciproque

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x \ln x$.

Déterminer les images directe et réciproque de l'intervalle $]0; 1]$ par f .

Exercice 5. Compositions

Soit E et F des ensembles, avec $E \neq \emptyset$, et soit $f \in F^E$.

- 1- Montrer que f est injective si et seulement si f est simplifiable à gauche.
- 2- Montrer que f est surjective si et seulement si f est simplifiable à droite.

On dit que f est simplifiable à gauche si $(f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$.

On dit que f est simplifiable à droite si $(g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h)$.



EXERCICES DU WEEKEND

Bijections, applications définies explicitement, composition

Partie A

- 1- Soit E et F deux ensembles, et soit $f \in F^E$ et $g \in E^F$ deux applications.
 - a) Montrer que si $f \circ g \circ f$ est bijective alors f et g sont bijectives.
 - b) Montrer que si $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et $f \circ g \circ f \circ g$ est injective alors f et g sont bijectives.

- 2- Soit f et g deux bijections de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Montrer que le produit fg de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas surjectif.

- 3- Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \llbracket 1; n \rrbracket$.

Montrer qu'il existe une unique bijection h de $\mathcal{P}(E_n)$ dans $\mathcal{P}(E_n)$ vérifiant pour tout $A \subset E_n$, $h(A) \cap A = \emptyset$.

Partie B

Soit f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = n + 1 \quad \text{et} \quad g(n) = \max(0; n - 1)$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g puis calculer $g \circ f$.

Que doit-on en retenir ?

Partie C

- 1- Trouver toutes les fonctions $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) + g \circ g(n) = 2n \quad (*)$$

- 2- Même question qu'au 1- avec la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) + g \circ g(n) = n \quad (**)$$



CORRIGÉ DES EXERCICES DE LA SEMAINE

Exercice 1

1- Soit $x \in G$. On raisonne par disjonction de cas.

Si $x \in F$ alors $x \in F \cap G$ donc $x \in F \cap H$ par hypothèse. Et en particulier, $x \in H$.

Sinon, $x \in F \cup G$ donc $x \in F \cup H$ par hypothèse. Mais puisque $x \notin F$, $x \in H$. On a montré que tout élément de G était un élément de H , ce qui constitue la définition de $G \subset H$.

2- On va utiliser que de manière générale : $A \setminus B = A \cap \bar{B}$. On a donc :

$$F \setminus (F \setminus G) = F \cap \overline{(F \cap \bar{G})} = F \cap (\bar{F} \cup \bar{\bar{G}}) = F \cap (\bar{F} \cup G) = \underbrace{(F \cap \bar{F})}_{=\emptyset} \cup (F \cap G)$$

Finalement on a bien : $F \setminus (F \setminus G) = F \cap G$.

L'intersection est distributive par rapport à la réunion et réciproquement. Pour tous ensembles A, B et C :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

3- Il faut avant tout remarquer que si G ne contient pas F alors pour toute partie X de E , G ne contient pas $F \cup X$, et que dans ce cas l'équation n'a pas de solution :

$$F \not\subset G \Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset$$

Si $F \subset G$ alors $X \subset G$ est une condition nécessaire évidente à la réalisation de $F \cup X = G$.

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $X \subset G$.

$(F \cup X) \cap \bar{F} = X \cap \bar{F}$ donc $F \cup X = G$ impose $X \cap \bar{F} = G \cap \bar{F}$ i.e $X \setminus F = G \setminus F$.

Il s'ensuit que $G \setminus F \subset X$.

Réciproquement, soit $X \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $G \setminus F \subset X \subset G$.

L'inclusion $F \cup X \subset G$ est immédiate.

Soit maintenant x dans G .

- Si $x \in F$ alors $x \in F \cup X$;
- Sinon $x \in G \setminus F$ donc $x \in X$ et par conséquent $x \in F \cup X$.

Il en résulte que $G \subset F \cup X$ et donc que $G = F \cup X$.

Finalement :

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid G \setminus F \subset X \subset G\} = \{G \setminus A; A \subset F\}$$

□

Exercice 2

1- On raisonne par double inclusion.

➤ Soit $x \in A \Delta B$.

- Si $x \in A \setminus B$ alors $x \in A$ et $x \notin B$ donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Et par conséquent $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
 - Sinon $x \in B \setminus A$ et par symétrie $x \in (B \cup A) \setminus (B \cap A)$ et par conséquent $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. ($A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$)
- On en déduit que $A \Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

➤ Réciproquement soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. En particulier $x \in A \cup B$.

- Si $x \in A$ alors $x \in A$ et $x \notin A \cap B$ donc $x \notin B$. Il en résulte que $x \in A \setminus B$ et donc que $x \in A \Delta B$.
- Si $x \in B$ alors par symétrie $x \in B \setminus A$ et donc $x \in A \Delta B$.

On en déduit que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset A \Delta B$.

Finalement on a bien : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2- La commutativité de Δ est une conséquence directe de la commutativité de la réunion. Pour toutes parties A et B de E :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$$

Pour prouver l'associativité, on dresse une table de vérité.

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

A	B	C	$A \Delta B$	$(A \Delta B) \Delta C$	$B \Delta C$	A	$A \Delta (B \Delta C)$
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F

Il ressort de cette table que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ et donc que Δ est associative.

$x \in A \Delta B$ est faux si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$ ont la même valeur de vérité.

3- Le sens réciproque $(B = C \Rightarrow A \Delta B = A \Delta C)$ est trivial.

Supposons maintenant que $A \Delta B = A \Delta C$.

➤ Soit $x \in B$.

- Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ donc $x \notin A \Delta B$. Ainsi $x \notin A \Delta C$ par hypothèse. Par ailleurs, $x \in A$ donc $x \in A \cup C$. Cela impose $x \in A \cap C$ (sinon on aurait $x \in A \Delta C$) et donc $x \in C$.
- Si $x \notin A$ alors $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$ donc $x \in A \Delta B$. Ainsi $x \in A \Delta C$ par hypothèse. En particulier $x \in A \cup C$, et puisque $x \notin A$, $x \in C$.

Il en résulte que $B \subset C$.

➤ On a par symétrie $C \subset B$.

Le sens direct est donc prouvé : $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

Finalement :

$$A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$$

4- Ce dernier point est une conséquence directe de la question précédente puisque pour tout $A \subset E : A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset$. On a alors :

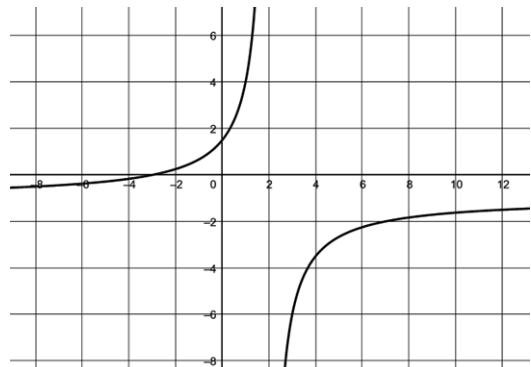
$(A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A \Delta B = A \Delta A)$ et donc d'après 3- : $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow B = A$.

□

Exercice 3

Il y a une infinité d'intervalles qui conviennent si on n'impose pas une propriété de maximalité. Sans cela, on pourrait par exemple faire remarquer lors d'une khôlle, que f réalise une bijection de l'intervalle $\{1\}$ sur l'intervalle $\{4\}$ et que la fonction réciproque, définie sur $\{4\}$, est celle qui envoie 4 sur 1...

On cherche donc plutôt ici des intervalles maximaux (au sens de l'inclusion) qui conviennent. On peut si nécessaire s'appuyer sur la courbe représentative de f ou sur son tableau des variations, pour se faire une première idée (voir ci-contre).



f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \neq 2$:

$$f'(x) = \frac{1 \times (2-x) - (-1) \times (3+x)}{(2-x)^2} = \frac{5}{(2-x)^2}$$

f est donc strictement croissante sur $] - \infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$. L'étude des limites et l'application du théorème de la bijection (la variante strictement monotone du théorème des valeurs intermédiaires) permettent alors de prouver que f réalise une bijection de $] - \infty; 2[$ sur $] - 1; +\infty[$ et de $]2; +\infty[$ sur $] - \infty; -1[$.

Qu'on se place dans $] - \infty; 2[$ ou dans $]2; +\infty[$, il faut pour déterminer la réciproque, résoudre l'équation $f(x) = y$ pour $y \neq -1$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{3+x}{2-x} = y$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3+x = (2-x)y \quad (2-x \neq 0)$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x(1+y) = 2y-3$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{2y-3}{1+y} \quad (1+y \neq 0)$$

Bilan

$$g = f|_{]-\infty; 2[} :] - \infty; 2[\rightarrow] - 1; +\infty[\text{ est bijective et } g^{-1} : \left. \begin{array}{l}] - 1; +\infty[\rightarrow] - \infty; 2[\\ x \mapsto \frac{2x-3}{x+1} \end{array} \right|$$

$$h = f|_{]2; +\infty[} :]2; +\infty[\rightarrow] - \infty; -1[\text{ est bijective et } h^{-1} : \left. \begin{array}{l}] - \infty; -1[\rightarrow]2; +\infty[\\ x \mapsto \frac{2x-3}{x+1} \end{array} \right|$$

Soit $f: E \rightarrow F$ une bijection et soit $f^{-1}: F \rightarrow E$ sa réciproque.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$$

Par exemple :

$$\begin{cases} y = \ln x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = \sin x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{Arcsin } y \\ y \in [-1; 1] \end{cases}$$

□

Exercice 4

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} + e^x \ln x = \frac{e^x}{x} (1 + x \ln x)$$

$f'(x)$ est donc du signe de $1 + x \ln x$.

On peut utiliser la concavité de $\ln$ sur $]0; +\infty[$ pour cette étude de signe.

Pour tout $x > 0$:

$$\ln x \leq \frac{x}{e} \Rightarrow \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{ex}$$

$$\ln x \leq \frac{x}{e} \Rightarrow -x \ln x \leq \frac{1}{e} \quad (x > 0)$$

$$\ln x \geq \frac{x}{e} \Rightarrow 1 + x \ln x \geq 1 - \frac{1}{e} > 0$$

$y = \frac{x}{e}$ est l'équation réduite de la tangente à $C_{\ln}$ en e . Par ailleurs, le changement de variable $x' = \frac{1}{x}$ est bijectif sur $]0; +\infty[$.

Ainsi $f' > 0$ sur $]0; +\infty[$ et f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

En particulier, f est continue et strictement croissante sur $]0; 1]$, et on obtient donc :

$$f([0; 1]) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)); f(1) \right] =]-\infty; 0].$$

(Voir ci-contre)

Soit $x > 0$. $x \in f^{-1}([0; 1])$ signifie exactement $0 < f(x) \leq 1$.

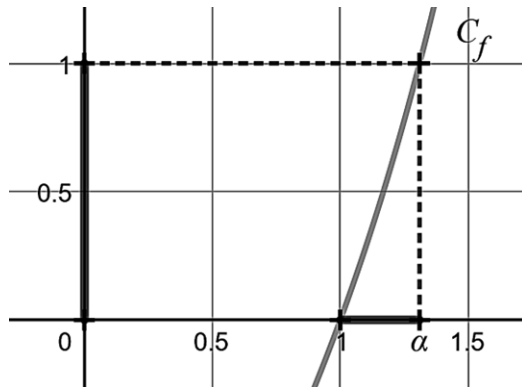
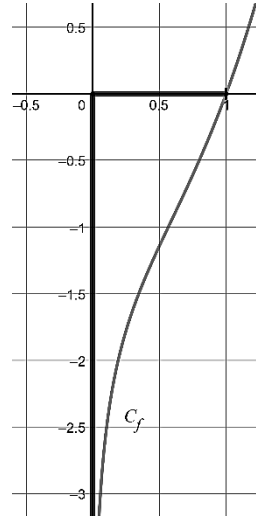
L'étude des variations de f a déjà montré que :

$$0 < f(x) \Leftrightarrow x > 1$$

De plus f étant continue et strictement croissante de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, il existe par le théorème de la bijection un unique antécédent α de 1 par f .

On a alors $f^{-1}([0; 1]) =]1; \alpha]$, où α est l'unique réel vérifiant $\ln \alpha = e^{-\alpha}$.

α n'a pas d'expression simple mais on en obtient facilement une valeur approchée : $\alpha \approx 1,309$ arrondi au millième. (Voir ci-dessous).



□