

TOUT-EN-UN BREVET



**OBJECTIF
MENTION
TRÈS BIEN**

**MATHÉMATIQUES
FRANÇAIS
HISTOIRE-GÉOGRAPHIE
EMC
PHYSIQUE-CHIMIE
SVT
TECHNOLOGIE
ORAL**

**+ de cours
+ de méthode
+ de sujets corrigés**

Sous la direction de
Sylvie Larbi et Céline Zerrouki



TOUT-EN-UN BREVET



Sous la direction de :

Sylvie LARBI

et

Céline ZERROUKI

MATHÉMATIQUES : Céline ZERROUKI

FRANÇAIS : Laetitia POLLONI

HG-EMC : Alexandra GUELMAN

PHYSIQUE-CHIMIE : Yohan BERGERE

SVT : Sylvie LARBI

TECHNOLOGIE : Amine NAIT-KACI

ORAL : Sylvie LARBI et Céline ZERROUKI



Collection « Objectif Mention Très Bien »

Retrouvez les titres de la collection
et des extraits des livres sur <http://www.editions-ellipses.fr>



Mise en pages : PCA

ISBN 9782340-117938

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage se compose de **sept parties** correspondant aux disciplines évaluées lors des épreuves terminales du brevet, en intégrant les nouvelles modalités applicables à partir de 2026. Il a été conçu comme un outil de révision efficace **pour viser la mention « Très Bien »**, tout en constituant un **support de référence utilisable tout au long de l'année**. Il propose notamment des clés essentielles pour rédiger une excellente copie **et pour se projeter concrètement dans les attentes de l'examen**. Ce livre permet aussi de se préparer avec rigueur aux exigences de la classe de seconde générale et technologique **tout en anticipant les grandes spécialités de première générale**.

Les synthèses de cours, conformes aux programmes officiels, s'inscrivent dans l'esprit des exigences de la classe de seconde. Les exercices, de difficulté progressive, couvrent l'ensemble des attendus et proposent parfois des prolongements. Ils permettent de maîtriser les méthodes nécessaires à la construction de raisonnements solides et rigoureux. Cette exigence se retrouve dans des corrigés entièrement rédigés, structurés à l'aide de connecteurs logiques (soulignés), afin de favoriser l'apprentissage d'une argumentation claire et cohérente. Enfin, les commentaires des corrigés précisent les attentes de chaque discipline, apportent des conseils méthodologiques et mettent en évidence des éléments différenciants pour viser l'excellence. **Le corrigé, placé volontairement à la suite de chaque exercice (à masquer dans un premier temps), facilite l'autocorrection et la compréhension immédiate des attendus.**

Dans chaque discipline, chaque thème se décompose ainsi :

- **Je révise et je me perfectionne** : une synthèse de leçon associée à une notion du programme, qu'il faut vraiment maîtriser avant de réaliser les exercices.
- **Je m'exerce et je fais la différence** : des exercices à traiter dans l'ordre.
 -  « **Je me teste en temps limité** » (exercice d'entraînement minuté).
 -  « **Je m'évalue** » (exercice d'entraînement comme au brevet, pour comprendre la répartition des points attribués pour chaque question).
 - **Des exercices « types »** (extraits de sujets de brevet et permettant de consolider ses compétences vers la seconde générale et technologique).*Après chaque exercice, un corrigé est rédigé dans son intégralité avec des commentaires pour aider l'élève à progresser et à gagner en efficacité. Les commentaires dans « Le + » insistent sur des points de vigilance ou d'approfondissement pour rédiger une excellente copie !*
- **Focus** (pour aller plus loin sur une notion à partir de différentes ressources)

« La qualité n'est jamais un accident ; c'est toujours le résultat d'un effort intelligent. »

John Ruskin (penseur britannique du XIX^e siècle)

Méthodologie générale

À compter de la session 2026, le brevet est délivré aux candidats ayant obtenu une **note finale égale ou supérieure à 10/20**.

Les épreuves terminales comptent désormais pour 60 % de la note finale, tandis que le contrôle continu en représente 40 % (comme au baccalauréat).

La note de contrôle continu est calculée à partir des moyennes annuelles de toutes les disciplines (avec le même coefficient) obtenues en classe de 3^e.

Les épreuves terminales sont chacune notée sur 20 :

- **Français (3 h), coefficient 2** : à partir d'un extrait de texte littéraire et éventuellement d'une image, évaluation des compétences linguistiques (grammaire – dont réécriture, lexicale, etc.) et des compétences de compréhension et d'interprétation ; dictée ; rédaction.
- **Mathématiques (2 h), coefficient 2** : l'épreuve se déroule en deux parties distinctes. Les points attribués à chaque exercice sont indiqués dans le sujet. La calculatrice n'est autorisée que pour la partie 2.
 - **Partie 1 (nouveau !)** : automatismes, 6 points, 20 min.
 - **Partie 2** : raisonnement et résolution de problèmes indépendants les uns des autres, 14 points (dont 2 consacrés à la rédaction), 1 h 40 min.
- **Histoire – Géographie, coefficient 1,5 et enseignement moral et civique (EMC), coefficient 0,5 (2 h au total)** : analyse et compréhension de documents ; utilisation des repères historiques et géographiques ; mobilisation des compétences de l'enseignement moral et civique.
- **Sciences (1 h ; 2 disciplines chaque année parmi les 3), coefficient 2** : physique-chimie, Sciences de la Vie et de la Terre (SVT), technologie.
- **Épreuve orale, coefficient 2** : sur un projet choisi par l'élève, mené en histoire des arts ou dans le cadre d'un EPI (enseignement pratique interdisciplinaire) ou de l'un des parcours éducatifs : évaluation de la qualité de l'expression orale (en individuel ou en groupe de 2 à 3 élèves) sur 5 minutes d'exposé (par élève), suivi de 10 minutes d'entretien avec un jury.

L'élève obtient son brevet lorsque : $c \times 0,4 + f \times 0,6 \geq 10$ où c est sa moyenne annuelle du contrôle continu, et f celle des épreuves finales.

La mention « Très bien » s'obtient avec une note finale au moins égale à 16/20, « Très bien avec les félicitations du jury » à partir de 18/20.

■ Utiliser de façon efficace cet ouvrage

- **Avant tout** : mémoriser les notions dans *Je révise et Je me perfectionne*.
- **En cachant le corrigé** qui suit (tout en le gardant accessible si besoin), effectuer les exercices dans l'ordre dans lequel ils sont proposés.

■ Comprendre les codifications dans cet ouvrage

				NDLR : Note De La Rédaction (précision ajoutée par l'auteur)
Temps limité	Autoévaluation	Focus	Sans calculatrice	

- La méthodologie de rédaction d'une excellente copie **repose sur l'usage de connecteurs logiques** (mots, expressions), essentiels **pour structurer** clairement le raisonnement, quelle que soit la discipline.
- **Ils sont soulignés dans tous les corrigés des exercices : repère-les !**

■ Comprendre comment obtenir une excellente copie (forme et fond)

- **Soigner la présentation et la graphie** : sauts de ligne, changement de page, aération de la copie, qualité des schémas...
- **Identifier les verbes des consignes pour éviter le hors sujet** :

Analyser	Décrire puis expliquer.
Caractériser	Indiquer les principales caractéristiques (ou éléments distinctifs).
Classer	Ordonner les informations selon un thème, une chronologie, une différence d'importance...
Citer	Recopier un passage de texte en le mettant entre guillemets. Pour modifier ou raccourcir la citation : utiliser des crochets.
Décrire	Dire ce que l'on observe, en allant du global au particulier.
Définir	Donner le sens précis, la fonction d'un objet.
Expliquer	Faire comprendre avec une interprétation, une argumentation, à partir des connaissances.
Illustrer	Donner un ou des exemples.
Justifier	Apporter une preuve, à l'aide d'un document et/ou des connaissances.
Comparer	Trouver les différences, les points communs, dire quel nombre est inférieur/supérieur ou égal à l'autre.
(Dé)montrer	Apporter une preuve à l'aide d'un raisonnement.

- **Rédiger** : écrire des **phrases élaborées** ; aucune ne commence par une conjonction de coordination. **Reprendre les termes de la question** et utiliser le vocabulaire notionnel.
- **Éviter absolument les formulations orales** et/ou familières : « cela » au lieu de « ça », « donc » ou « par conséquent » au lieu de « du coup » ...
- **Varier les connecteurs logiques**.
- Utiliser un brouillon pour **chercher les idées (sans rédiger) et décomposer les étapes du raisonnement**.
- **Ne pas oublier de réserver un temps de relecture** (15 min environ).

Table des matières

Mathématiques

Je respecte une méthode exigeante.....	14
Thème 1. Nombres et calculs	15
1. Calcul numérique.....	16
2. Puissances d'exposants entiers relatifs.....	24
3. Réduire, développer, factoriser une expression.....	32
4. Résolution d'équations à une inconnue	41
5. Divisibilité des entiers naturels, nombres premiers	50
Thème 2. Traitement de données et fonctions	57
1. Statistiques	58
2. Probabilités	67
3. Proportionnalité et applications	77
4. Grandeurs et mesures	87
5. Notion de fonction numérique (à une variable).....	94
6. Fonction affine.....	103
Thème 3. Géométrie plane.....	113
1. Notations, triangles et quadrilatères	114
2. Théorème de Pythagore, réciproque et contraposée.....	118
3. Trigonométrie dans un triangle rectangle	122
4. Triangles semblables	128
5. Théorème de Thalès, réciproque et contraposée	132
6. Transformations du plan	138
Thème 4. Géométrie dans l'espace	143
1. Solides usuels.....	144
2. Repérage dans l'espace	148

3. Volumes des solides usuels.....	152
4. Sections planes de solides usuels.....	158
Thème 5. Pensée informatique	165
1. Algorithmique et programmation	166
Je travaille mes automatismes	178
1. Nombres et calculs	178
2. Espace et géométrie.....	180
3. Organisation et gestion de données, et probabilités	182
4. Proportionnalité, fonctions	183
5. Algorithme et programmation	184
J'utilise un tableur	189
1. Déterminer des indicateurs statistiques sur des données «brutes»	189
2. Étirer une formule sur des données ordonnées et organisées	190
3. Représenter graphiquement une série de données	190
4. Établir un tableau de valeurs d'une fonction.....	191
5. Représenter graphiquement une fonction (à partir d'un tableau de valeurs).....	191
J'utilise ma calculatrice	192
 Français	
Je respecte une méthode exigeante.....	194
Thème 1. Le récit : souvenirs de lectures	197
1. Histoire littéraire du genre narratif	198
2. Caractéristiques du genre autobiographique	199
3. Figures de style, procédés littéraires et conseils rédactionnels.....	199
Thème 2. Le théâtre : rebelles et tyrans	229
1. Histoire littéraire du genre théâtral.....	230
2. Caractéristiques du genre théâtral	230
3. Figures de style, procédés et registres littéraires	231

Thème 3. La poésie : s'ouvrir au monde et à l'amour.....	257
1. La poésie : ouvrir une fenêtre sur le monde.....	258
2. Les <i>Œuvres</i> de Louise Labé : s'ouvrir à l'amour	268
Thème 4. La littérature d'idées et la presse : réfléchir et s'informer	287
1. La littérature d'idées : la satire de la vitesse.....	288
2. La presse : entre satire et engagement	296

Histoire Géographie EMC

Je respecte une méthode exigeante.....	318
Histoire, Thème 1. L'Europe, un théâtre majeur des guerres totales (1914-1945).....	321
1. Civils et militaires durant 1914-1918	322
2. Démocraties et totalitarismes durant l'entre-deux-guerres.....	328
3. De 1939 à 1945, une guerre d'anéantissement	333
Histoire, Thème 2. Le monde depuis 1945	339
1. Un monde bipolaire au temps de la guerre froide.....	340
2. Indépendances et nouveaux États	349
Histoire, Thème 3. Français et Françaises dans une République repensée	353
1. Les évolutions républicaines depuis 1944	354
2. Femmes et hommes des années 1950 à 1980	360
Géographie, Thème 1. Dynamiques territoriales de la France contemporaine	369
1. Les aires urbaines, géographie d'une France mondialisée	370
2. Les espaces productifs et leurs évolutions	376
Géographie, Thème 2. Aménager le territoire national.....	385
1. Aménager le territoire pour répondre aux inégalités croissantes entre territoires français.....	386
2. Les territoires ultramarins : une problématique spécifique	390

Géographie, Thème 3. La France et l'Union européenne	397
1. L'UE, un nouveau territoire de référence et d'appartenance	398
2. La France et l'Union européenne dans le monde	405

EMC. Faire vivre la démocratie	411
1. Les règles du jeu démocratique	413
2. Les acteurs de la démocratie : l'opinion et l'engagement collectif.....	415
3. Préserver la démocratie : un enjeu de la Défense globale et une responsabilité citoyenne	415

Sciences de la Vie et de la Terre

Je respecte une méthode exigeante.....	424
--	-----

Thème 1. Le vivant et son évolution	425
1. Problématique liée à la survie des espèces	426
2. Problématique liée à la pérennité des espèces au cours du temps	427

Thème 2. Le corps humain et la santé	437
1. Problématique liée au fonctionnement du système digestif et comportement responsable	438
2. Problématique liée au fonctionnement des appareils reproducteurs et comportement responsable.....	438
3. Problématique liée au fonctionnement du système nerveux et comportement responsable	438
4. Problématique liée au fonctionnement du système immunitaire et comportement responsable	439

Thème 3. La Planète Terre, l'environnement et l'action humaine ..	447
1. Problématique liée à la géodynamique globale de la Planète Terre	448
2. Problématique liée à la prévention des risques liés à la dynamique de la Planète Terre	448
3. Problématique liée à la gestion des ressources exploitables	448

Sciences physiques

Je respecte une méthode exigeante.....	460
Thème 1. Organisation et transformations de la matière	461
1. Les particules constitutives de la matière.....	462
2. L'identification d'une espèce chimique	463
3. Les transformations de la matière	464
Thème 2. Mouvement et interactions.....	473
1. La caractérisation d'un mouvement.....	474
2. L'interaction mécanique et la force	474
3. La gravitation.....	475
4. Le poids et la masse.....	476
Thème 3. L'énergie, ses transferts et ses conversions.....	485
1. Les sources d'énergie.....	486
2. Les formes d'énergie	486
3. Le transfert et la conversion d'énergie	488

Technologie

Je respecte une méthode exigeante.....	500
Thème 1. Design, innovation, créativité.....	501
1. La classification des objets.....	502
2. Le besoin et les fonctions utilisées en technologie.....	502
3. L'analyse fonctionnelle.....	503
4. Le Design.....	505
Thème 2. Les objets techniques, les services et les changements induits dans la société	511
1. L'évolution des objets techniques	512
2. Les classifications des systèmes techniques	513

Thème 3. La modélisation et la simulation	
des objets et systèmes techniques.....	521
1. La chaîne d'énergie.....	522
2. La chaîne d'information	523
Thème 4. L'informatique et la programmation	527
1. La programmation.....	528
2. L'informatique	529

L'oral

Les modalités de l'épreuve orale.....	536
1. Choisir un sujet.....	537
2. Rechercher des informations sur le sujet.....	538
3. Problématiser le sujet choisi	538
4. Élaborer un plan logique	540
5. Concevoir un support visuel pour illustrer l'oral.....	541
6. Préparer la prestation orale	541
7. Le jour J : réussir sa prestation face au jury	542

Mathématiques



Je respecte une méthode exigeante

L'épreuve de mathématiques du brevet est notée sur 20 points et dure 2 heures. Elle se présente ainsi :

- **Une première partie**, sur 6 points, dure **20 minutes**. Elle teste des automatismes du cycle 4, **sans calculatrice**.
- **Une seconde partie**, sur 14 points, dure **1 heure 40 minutes**. Il s'agit d'exercices indépendants les uns des autres. Ils peuvent inclure des situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines. Dans cette partie, **la calculatrice est autorisée**, et **2 points sont réservés à la clarté et à la précision des raisonnements** ainsi que, plus largement, à la qualité de la rédaction. **Sauf indication contraire** (le sujet le précisera), **toutes les réponses doivent être justifiées**.

Pour réussir la seconde partie de cette épreuve :

Vocabulaire Exemples :	Il doit être précis et pertinent.
	<i>Le parallélisme, la perpendicularité, ne s'adressent qu'à des droites (même si elles ne sont pas représentées sur une figure : deux points distincts suffisent à définir une droite) ; on calcule une longueur (nombre), on mesure un segment (objet géométrique) ; développer une expression (numérique ou littérale) n'est pas la calculer ; une probabilité n'est pas une chance : c'est une mesure ; etc.</i>
Symbolique, notations Exemples :	Elles doivent être employées avec rigueur : ce ne sont pas des abréviations (dans une phrase).
	<i>$A \in (d)$ remplace toute la phrase : « le point A appartient à la droite (d) » ; = ne s'emploie qu'entre deux expressions (numérique ou littérale) de même valeur ; etc.</i>
Étapes de calcul	Elles justifient (démontrent) le résultat attendu (qui doit toujours être donné sous forme réduite). Les égalités équivalentes s'écrivent les unes sous les autres.
Théorèmes, propriétés	Certains se (ré)citent, d'autres non (dans ce cas, ils s'appliquent à la situation donnée, on ne cite que leur « nom »).
Raisonnements	Ils doivent être articulés de façon logique, avec des connecteurs tels que : « ainsi », « donc », « par conséquent », « implique », « puisque », « équivaut à », « ce qui revient à dire », « et », « de plus », « ou », « mais », « en revanche », « on a (dé)montré que », « de même », « de la même façon », etc.

Dans la copie, il est conseillé de souligner/encadrer les résultats/réponses.

Nombres et calculs

Dans ce thème, en gardant en tête le sens des quatre opérations, sens nécessaire à la résolution de problèmes, il s'agit de manipuler des techniques opératoires avec différentes écritures des nombres, d'écrire des expressions sous différentes formes et d'utiliser la plus adéquate selon le contexte.

Un petit point d'histoire

C'est au Paléolithique que l'on trouve les premières traces de nombres pour garder en mémoire des quantités. Viendra plus tard la notion de calcul : dénombrer un à un des éléments d'un ensemble est vite fastidieux !

Au IX^e siècle, le mathématicien Al-Khwarizmi écrit un traité majeur : « Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala » (Abrégé du calcul par l'algèbre), dans lequel il formalise la résolution d'équations du 1^{er} et du 2nd degré. Le mot algèbre naîtra ainsi du mot arabe « al-jabr ».

Au XVI^e siècle apparaît la symbolisation : François Viète (1540-1603) introduit des lettres pour désigner des quantités connues ou inconnues.

Les procédés de calcul sont en constante évolution parallèlement à la découverte (création !) de nouveaux ensembles de nombres pour résoudre des problèmes dans tous les domaines (sciences, économie, finance...).



Je révise et je me perfectionne

I. Calcul numérique

1.1 Les priorités opératoires dans une expression

Une **expression** est une **suite d'opérations** (à effectuer selon des priorités).

- **Le calcul des expressions entre crochets/parenthèses** (en commençant par « les plus intérieures ») **est prioritaire** sur tout autre.
- **Les puissances peuvent être écrites en écriture décimale** pour effectuer une somme ou une différence dans laquelle elles apparaissent.
- **Les multiplications, les puissances, et les divisions sont prioritaires** sur les additions et les soustractions.
- **S'il n'y a que des additions et des soustractions** : on effectue les opérations dans l'ordre où elles sont écrites (sens de lecture), ou on considère que soustraire un nombre équivaut à ajouter son opposé et, dans ce cas, on peut regrouper les termes positifs entre eux, les termes négatifs entre eux.
- **S'il n'y a que des multiplications et des divisions** : on effectue les opérations dans l'ordre où elles sont écrites (sens de lecture), ou on considère que diviser par un nombre équivaut à multiplier par son inverse et, dans ce cas, on peut regrouper des facteurs.
- **Concernant une écriture fractionnaire** : au numérateur d'une part, et au dénominateur d'autre part, des parenthèses sont toujours sous-entendues (il faut les écrire si on utilise le signe $\div$ associé à la place de l'écriture fractionnaire, cela allège parfois l'écriture de l'expression !).

Exemples (et présentation attendue) :

$$A = -5 - [2 - (7 - 15 \div 3 \times 4)] - 1$$

$$A = -5 - 1 - [2 - (7 - 5 \times 4)]$$

$$A = -6 - [2 - (7 - 20)]$$

$$A = -6 - [2 - (-13)]$$

$$A = -6 - [2 + 13]$$

$$A = -6 - 15$$

$$A = -21$$

$$B = \frac{-20 + 2}{-2 - 7}$$

$$B = (-20 + 2) \div (-2 - 7)$$

Parenthèses indispensables avec $\div$

$$B = -18 \div (-9)$$

$$B = 2$$

**Remarque**

Pour présenter lisiblement des étapes de calcul nombreuses (lorsqu'elles ne tiennent pas sur une seule ligne), on écrit des égalités équivalentes les unes sous les autres. Si nécessaire, on nomme par une lettre l'expression initiale (qui doit d'abord être réécrite telle que donnée).

1.2 Calculer avec des nombres rationnels (en écriture fractionnaire)**⊗ Définitions :**

- Une **fraction** est une **écriture fractionnaire de deux nombres entiers relatifs**, le dénominateur étant non nul.
- Un **nombre** qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction est dit **rationnel**.

Propriété

tout **nombre rationnel** est égal à une **unique fraction irréductible** (fraction que l'on ne peut plus simplifier).

Exemple

$\frac{1,2}{-36}$ est un nombre rationnel en écriture fractionnaire mais n'est pas une fraction.

$\frac{1,2}{-36} = -\frac{1,2 \times 10}{36 \times 10} = -\frac{12}{360} = -\frac{\cancel{12} \times 1}{\cancel{12} \times 30} = -\frac{1}{30}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{1,2}{-36}$.

Remarque

Cette propriété justifie qu'on ne considérera que les opérations avec des fractions ; la fraction irréductible de dénominateur positif est privilégiée.

Propriétés

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs avec $b \neq 0$; $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\bullet \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d + c \times b}{d \times b}$$

(Réduction au même dénominateur $d \times b = b \times d$)

$$\bullet \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exemples

$$-\frac{9}{5} - \frac{3}{2} = \frac{-9 \times 2}{5 \times 2} + \frac{-3 \times 5}{2 \times 5} = \frac{-18}{10} + \frac{-15}{10} = \frac{-33}{10} \text{ (fraction irréductible).}$$

$$-\frac{9}{5} \times \frac{3}{-2} = \frac{9}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{10} \text{ (fraction irréductible).}$$

$$-7 \times \frac{2}{-14} = \frac{7}{1} \times \frac{2}{14} = \frac{\cancel{7} \times \cancel{2} \times 1}{1 \times \cancel{7} \times \cancel{2}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ (nombre entier en écriture décimale)}$$

$$-\frac{9}{5} \div \frac{3}{2} = -\frac{9}{5} \times \frac{2}{3} = -\frac{\cancel{3} \times 3 \times 2}{5 \times \cancel{3}} = \frac{-6}{5} \text{ (fraction irréductible)}$$

Remarques

Pour additionner des fractions, si besoin, on les réduit au même dénominateur.

Pour multiplier des fractions, on ne les réduit pas au même dénominateur (c'est inutile!) : on simplifie au maximum, si possible, avant d'effectuer les produits des numérateurs et les produits des dénominateurs.

Un résultat (si attendu en écriture fractionnaire) est donné par une fraction irréductible de dénominateur positif, éventuellement une écriture décimale (sans zéros inutiles) si c'est un nombre entier.

1.3 Le carré, le cube d'un nombre

⊙ Définitions :

- Le **carré d'un nombre** est le produit de ce nombre par lui-même.
- Le **cube d'un nombre** est le produit de 3 facteurs chacun égal à ce nombre.

Exemples : $5^2 = 5 \times 5 = 25$

$$(-5)^2 = -5 \times (-5) = 25$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$(-5)^3 = -5 \times (-5) \times (-5) = -125$$

Remarque

Dans le calcul d'une expression numérique, les produits sont prioritaires.

On utilisera alors l'écriture décimale (sans zéros inutiles) d'un carré ou d'un cube puisqu'il sont prioritaires sur les sommes et les différences.

Exemple : $Z = 1 - 7^2 - (-5)^3 \times 2$

$$Z = 1 - 49 - (-125) \times 2$$

$$Z = 1 - 49 + 250$$

$$Z = 202$$



Je m'exerce et je fais la différence



Exercice 1.1.1 Je me teste en temps limité (20 minutes)

- Compléter avec le vocabulaire le plus approprié (*décimale, fractionnaire, fraction irréductible, rationnel, décimal, décimal non entier, entier*) :
 - 53,2 est une écriture, c'est un nombre
 - $\frac{1,3}{10}$ est une écriture, c'est un nombre
 - 4 est une écriture, c'est un nombre
 - $\frac{-15}{7}$ est une écriture, c'est une; c'est un nombremais ce n'est pas un nombre
- Écrire A sous la forme d'un nombre décimal relatif.
$$A = -13 - 4 \times (12,5 - 15 \div 3) - (-7)$$
- Écrire chaque expression sous la forme d'une fraction irréductible, ou d'un entier relatif (en écriture décimale) si c'est possible.

$$B = \frac{7}{4} - \frac{13}{4} \times \frac{16}{26}; C = \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{3} \div \frac{-10}{9} \right)$$

CORRIGÉ

1.

- 53,2 est une écriture décimale, c'est un nombre décimal non entier.
- $\frac{1,3}{10}$ est une écriture fractionnaire, c'est un nombre décimal non entier puisque : $\frac{1,3}{10} = 0,13$.
- 4 est une écriture décimale, c'est un nombre entier (négatif).
- $\frac{-15}{7}$ est une écriture fractionnaire, c'est une fraction irréductible; c'est un nombre rationnel mais ce n'est pas un nombre décimal. (En effet, $-15 \div 7$ a un reste non nul, donc le quotient de -15 par 7 n'a pas d'écriture décimale).

1) Un nombre peut avoir plusieurs écritures : décimale pour les nombres décimaux, fractionnaire...

Une écriture décimale n'a pas « nécessairement une virgule » (elle est sous-entendue pour les entiers).

$$2. \quad A = -13 - 4 \times (12,5 - 15 \div 3) - (-7)$$

$$A = -13 - 4 \times (12,5 - 5) + 7$$

$$A = -13 - 4 \times 7,5 + 7$$

$$A = -13 - 30 + 7$$

$$A = -43 + 7$$

$$A = -36$$

$$3. \quad B = \frac{7}{4} - \frac{13}{4} \times \frac{16}{26} \quad C = \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{3} \div \frac{-10}{9} \right)$$

$$B = \frac{7}{4} - \frac{\cancel{13} \times \cancel{4} \times 4}{\cancel{4} \times \cancel{13} \times 2} \quad C = \frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{3} \times \frac{9}{10} \right)$$

$$B = \frac{7}{4} - \frac{4}{2} \quad C = \frac{5}{2} - \left(-\frac{\cancel{5} \times \cancel{3} \times 3}{\cancel{3} \times \cancel{5} \times 2} \right)$$

$$B = \frac{7}{4} - \frac{8}{4} \quad C = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$$

$$B = \frac{-1}{4} \quad C = \frac{8}{2}$$

$$C = 4$$

2) A est attendu en écriture décimale, donc écris des égalités équivalentes avec des écritures décimales dès la deuxième étape.

Le +

Un nombre qui n'a pas d'écriture décimale n'est pas un nombre décimal.

3) Le résultat de la suite de calculs de chacune de ces expressions est attendu en écriture fractionnaire ou en écriture décimale (si nombre entier).

Le +

Lorsqu'une fraction a une écriture décimale évidente, on la donne directement !

Par exemple : $\frac{8}{2} = 4$.



Exercice 1.1.2 Je m'évalue (3 points)

1. Écrire $M = (-2)^3 - 3(3^2 - 11,5)$ en écriture décimale. (1 point)

2. On donne : $N = \frac{5}{6} - \frac{3 - 3 \times 2}{42 \div 7 + 12}$.

Montrer que $N = 1$. (1 point)

3. On donne : $P = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$.

Montrer que $P = 2$. (1 point)

**CORRIGÉ**

$$1. \quad M = (-2)^3 - 3(3^2 - 11,5)$$

$$M = -8 - 3(9 - 11,5)$$

$$M = -8 - 3 \times (-2,5)$$

$$M = -8 + 7,5$$

$$M = -0,5$$

$$2. \quad N = \frac{5}{6} - \frac{3 - 3 \times 2}{42 \div 7 + 12}$$

$$N = \frac{5}{6} - \frac{3 - 6}{6 + 12}$$

$$N = \frac{5}{6} - \frac{-3}{18}$$

$$N = \frac{15}{18} + \frac{3}{18}$$

$$N = \frac{18}{18}$$

$$N = 1$$

$$3. \quad P = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$P = \frac{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}}$$

$$P = \frac{4}{3} \div \frac{2}{3}$$

$$P = \frac{4}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2}$$

$$P = 2$$

1); 2) et 3) **1 point** par résultat justifié (par des étapes de calcul : égalités équivalentes).

1) lorsqu'il n'y a pas de signe opératoire entre un nombre et une parenthèse, c'est la multiplication qui est sous-entendue.

2) Dès la 3^e étape, remarque qu'en conservant 18 comme dénominateur (commun aux deux termes), le résultat attendu est alors immédiat ! Pour des fractions ayant une écriture décimale évidente (égale à un nombre entier par exemple), inutile de montrer les simplifications.

3) **Le +**

Sois le plus rapide possible dans les étapes de calculs, seules celles proposées sont nécessaires.

Par exemple, sois efficace en remplaçant directement 1 par $\frac{3}{3}$.

Exercice 1.1.3

Résoudre chacun de ces quatre problèmes (qui sont indépendants).

Problème 1 : Sébastien s'est inscrit à un triathlon. Il doit parcourir $\frac{5}{26}$ de la distance totale en courant, puis $\frac{10}{13}$ de cette distance à vélo. Quelle proportion de la distance totale du triathlon devra-t-il faire à la nage ?

Problème 2 : J'avais initialement 410 € sur mon compte bancaire. J'en ai dépensé les trois cinquièmes. La banque a prélevé ensuite 12,80 € de cotisation. J'ai enfin décidé de virer la moitié de la somme restante sur mon livret d'épargne.

En écrivant une seule expression, déterminer, en €, la somme d'argent qu'il me reste sur mon compte bancaire après ces opérations ?

Problème 3 : On donne le programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre
- Ajouter son tiers
- Retrancher 3
- Multiplier par -9

Quel nombre obtient-on avec ce programme en choisissant -5 ?

Problème 4 : Soient $A = 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{8}{3}$ et $B = \frac{-4}{20} \div \frac{-6}{-8}$. Montrer que $A = B$.

CORRIGÉ

Problème 1 :

Soit p la proportion de la distance totale parcourue à la nage par Sébastien durant son triathlon.

$$p = 1 - \left(\frac{5}{26} + \frac{10}{13} \right)$$

$$p = 1 - \left(\frac{5}{26} + \frac{20}{26} \right)$$

$$p = \frac{26}{26} - \frac{25}{26}$$

$$p = \frac{1}{26}$$

Problème 1 : définis (« Soit ») une lettre comme étant le nombre cherché : ici c'est une proportion (sans unité !) donc une fraction (irréductible) est attendue.

Le +

Le fait d'avoir introduit la proportion p cherchée dispense d'une phrase réponse.

Problème 2 :

Puisque la moitié de la somme restante est enlevée de mon compte bancaire, il me reste donc l'autre moitié. Soit S la somme d'argent, en €, qu'il me reste sur mon compte bancaire après ces opérations.

$$S = \left(410 - 410 \times \frac{3}{5} - 12,8 \right) \div 2$$

$$S = \left(410 - \frac{410}{5} \times 3 - 12,8 \right) \div 2$$

$$S = (410 - 82 \times 3 - 12,8) \div 2$$

$$S = (410 - 246 - 12,8) \div 2$$

$$S = 151,2 \div 2$$

$$S = 75,6$$

Problème 2 : explique d'abord qu'il s'agit de calculer la moitié restante, égale à ce qui est viré sur le livret d'épargne !

Sois attentif à l'énoncé : on attend une seule expression numérique répondant à la question posée ; définis-la par une lettre pour écrire des égalités équivalentes comme au problème 1, en précisant bien l'unité (€) ici !

**Problème 3 :**

Voici les étapes du programme appliqué au nombre -5 :

$$\begin{aligned}
 & \bullet -5 \\
 & \bullet -5 + \frac{-5}{3} = \frac{-15}{3} + \frac{-5}{3} = \frac{-20}{3} \\
 & \bullet \frac{-20}{3} - 3 = \frac{-20}{3} - \frac{9}{3} = \frac{-29}{3} \\
 & \bullet \frac{-29}{3} \times (-9) = \frac{-29}{\cancel{3}} \times \cancel{3} \times (-3) = 87
 \end{aligned}$$

On obtient donc 87.

Problème 4 :

$$\begin{aligned}
 A &= 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{8}{3} & B &= \frac{-4}{20} \div \frac{-6}{-8} \\
 A &= \frac{5}{5} - \frac{1}{5} - \frac{16}{15} & B &= -\frac{4}{20} \times \frac{8}{6} \\
 A &= \frac{4}{5} - \frac{16}{15} & B &= -\frac{2 \times 2}{4 \times 5} \times \frac{4 \times \cancel{2}}{3 \times \cancel{2}} \\
 A &= \frac{12}{15} - \frac{16}{15} & B &= -\frac{4}{15} \\
 A &= -\frac{4}{15} & \text{Donc : } A &= B.
 \end{aligned}$$

Problème 3 : tu peux aussi écrire une seule expression égale au résultat attendu et définie par une lettre (R par exemple).

$$R = (-5 + \frac{-5}{3} - 3) \times (-9)$$

Le +

Conclus (sauf si tu as utilisé et défini R).

Problème 4 : pour montrer que deux expressions sont égales, on peut les réduire chacune séparément.

Pour B, commence par repérer le nombre de facteurs négatifs qui déterminent le signe d'un produit.

Le +

N'oublie surtout pas de conclure que :
A = B.

FOCUS : j'approfondis !

- Histoire des nombres



- Multiplication égyptienne



- Histoire d'un tailleur





Je révise et je me perfectionne

2. Puissances d'exposants entiers relatifs

2.1 Cas particulier des puissances de 10

⊙ **Définitions** : soit n un entier positif non nul.

• Pour $n \geq 2$, on a : $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{\substack{n \text{ facteurs} \\ (\text{chacun égal à } 10)}} = 1 \underbrace{0\dots0}_{n \text{ zéros}}$

• $10^1 = 10$

• Par construction : $10^0 = 1$

• Pour $n \geq 1$, par convention, 10^{-n} désigne l'**inverse** de 10^n

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{\substack{n \text{ facteurs au dénominateur} \\ (\text{chacun égal à } 10)}}} = \underbrace{0,0\dots01}_{\substack{n \text{ zéros} \\ (\text{en tout})}}$$

⊙ **Vocabulaire** : 10^n se lit : « **10 exposant n** »

10^n est une **puissance de 10, d'exposant n**

n est l'**exposant** (nombre de facteurs égaux chacun à 10) de 10^n

De même, 10^{-n} est une **puissance de 10, d'exposant $-n$**

Exemples

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

Un million s'écrit 10^6 ; un milliard s'écrit 10^9

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

Un dixième s'écrit 0,1 ou $\frac{1}{10}$ ou 10^{-1} ; un millionième s'écrit 0,000 001 = 10^{-6}



Remarques

Certains nombres peuvent être écrits sous plusieurs formes.

Ainsi, le nombre décimal « un dixième » peut s'écrire :

- 0,1 qui est une écriture décimale (sans zéros inutiles).
- $\frac{1}{10}$ qui est une écriture fractionnaire (c'est aussi une fraction décimale).
- 10^{-1} qui est une puissance (une puissance de 10 d'exposant -1).

Dans le Système International d'unités de mesures (noté simplement SI), des préfixes sont associés aux puissances de 10 (attention aux majuscules/minuscules pour le symbole!) :

Préfixe	Symbole	Valeur
kilo	k	10^3
méga	M	10^6
giga	G	10^9

Préfixe	Symbole	Valeur
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

2.2 Écriture (ou notation) scientifique d'un nombre décimal

⊙ **Définition** : tout **nombre décimal** peut s'écrire sous la forme unique du **produit d'une écriture décimale** telle que dans sa partie entière, seul le chiffre des unités est non nul, **par une puissance de 10**.

C'est son **écriture/notation scientifique**.

Exemples

$352,08 = 3,5208 \times 10^2$ (en effet : $3,5208 \times 100 = 352,08$)

$3,5208 \times 10^2$ est l'écriture (ou la notation) scientifique de 352,08

$0,000\,169 = 1,69 \times 10^{-4}$ (en effet : $1,69 \times 0,000\,1 = 0,000\,169$)

2.3 Généralisation : puissance d'un nombre quelconque

⊙ **Définitions** : soient a un nombre quelconque et n un entier positif.

- Pour $n \geq 1$, on a : $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs (chacun égal à } a)}$
- Par construction : pour $a \neq 0$, $a^0 = 1$
- Pour $n \geq 1$ et $a \neq 0$, par convention, a^{-n} désigne l'**inverse de a^n**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs au dénominateur (chacun égal à } a)}}$$

Exemples

$$(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}; 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

⊙ **Vocabulaire** : a^n se lit : « a exposant n » ; a^n est une **puissance de a** .

Remarques

Un exposant négatif ne détermine pas le signe d'une puissance !

$(-5)^{-22} > 0$ puisque $(-5)^{-22} = \frac{1}{(-5)^{22}}$ et $(-5)^{22} > 0$ (22 facteurs négatifs).

Attention : $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$ mais $-5^2 = -5 \times 5 = -25$

En revanche : $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125 = -5^3$

Propriétés

soient a et b deux nombres non nuls ; soient p et q deux entiers relatifs (positifs ou négatifs).

- $a^p \times a^q = a^{p+q}$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{p \times q}$$

- $a^p \times b^p = (a \times b)^p$

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

Exemples

$$5^2 \times 5^7 = 5^9$$

$$\frac{5^2}{5^7} = 5^{-5}$$

$$(5^2)^7 = 5^{14}$$

$$5^2 \times 5^{-7} = 5^{-5}$$

$$\frac{5^2}{5^{-7}} = 5^9$$

$$((-5)^{-2})^{-7} = (-5)^{14} = 5^{14}$$

$$5^2 \times 7^2 = 35^2$$

$$\frac{35^{-2}}{5^{-2}} = 7^{-2}$$



Je m'exerce et je fais la différence



Exercice 1.2.1 Je me teste en temps limité (20 minutes)

1. Compléter avec le vocabulaire (*puissance, exposant, décimale, fractionnaire, scientifique*) et/ou le nombre approprié :

- 10^7 est une de 10, l'exposant est
- 3^{-4} est une puissance de d'..... -4
- $\frac{1}{3^2}$ est une écriture égale à $3^{\dots}$
- 100 000 est une écriture égale à $10^{\dots}$
- La notation de 52 000 est $5,2 \times 10^4$
- L'écriture scientifique de 0,000 000 123 est $\times 10^{\dots}$

2. Écrire chaque nombre en écriture scientifique.

212 000 000; 5; 0,000 301 800; $2 \times 10^{13} \times 8 \times 10^{-3}$

3. Écrire chaque expression en écriture décimale.

$K = 2^2 \times 10^2$; $L = (-2)^3 \times 10^4$; $M = 5^0 \times 2^{-2}$

4. Écrire chaque expression sous la forme d'une puissance.

$$10^3 \times 10^9$$

$$\frac{10^5}{10^2}$$

$$\frac{1}{10^8}$$

$$5^4 \times 2^4$$

$$\frac{20^7}{2^7}$$

$$5^{-3} \times 5^{-11}$$

$$\frac{(-3)^5}{(-3)^4}$$

$$\frac{2^{-16}}{2^{-6}}$$

$$\frac{1}{(-5)^{-5}}$$

$$(10^{-1})^7$$

$$(-18)^{-2} \div (-2)^{-2}$$

CORRIGÉ

1.

- 10^7 est une puissance de 10, l'exposant est 7
- 3^{-4} est une puissance de 3 d'exposant -4
- $\frac{1}{3^2}$ est une écriture fractionnaire égale à 3^{-2}
- 100 000 est une écriture décimale égale à 10^5
- La notation scientifique de 52 000 est $5,2 \times 10^4$
- L'écriture scientifique de 0,000 000 123 est $1,23 \times 10^{-7}$

$$2. \quad 212\,000\,000 = 2,12 \times 10^8$$

$$5 = 5 \times 10^0$$

$$0,000\,301\,800 = 3,018 \times 10^{-4}$$

$$2 \times 10^{13} \times 8 \times 10^{-3} = 1,6 \times 10^{11}$$

$$3. \quad K = 2^2 \times 10^2$$

$$K = 4 \times 100 \text{ soit } K = 400$$

$$L = (-2)^3 \times 10^4$$

$$L = -8 \times 10\,000 \text{ soit } L = -80\,000$$

$$M = 5^0 \times 2^{-2}$$

$$M = 1 \times \frac{1}{2^2}$$

$$M = \frac{1}{4} \text{ soit } M = 0,25$$

$$4. \quad 10^3 \times 10^9 = 10^{12}; \frac{10^5}{10^2} = 10^3;$$

$$\frac{1}{10^8} = 10^{-8}; 5^4 \times 2^4 = (5 \times 2)^4 = 10^4;$$

$$\frac{20^7}{2^7} = \left(\frac{20}{2}\right)^7 = 10^7; 5^{-3} \times 5^{-11} = 5^{-14};$$

$$\frac{(-3)^5}{(-3)^4} = (-3)^1; \frac{2^{-16}}{2^{-6}} = 2^{-16 - (-6)} = 2^{-10};$$

$$\frac{1}{(-5)^{-5}} = (-5)^5; (10^{-1})^7 = 10^{-7};$$

$$(-18)^{-2} \div (-2)^{-2} = \left(\frac{-18}{-2}\right)^{-2} = 9^{-2}$$

1)

Rappel : une écriture décimale n'a pas « nécessairement une virgule » (nombres entiers).

Le +

Ne confonds pas « puissance » et « exposant » : on ne devrait pas dire (c'est un abus de langage) « 10 puissance 3 » mais « 10 exposant 3 ».

$$2) 1 = 10^0; \text{ pour le dernier nombre, pense bien que } 8 \times 2 = 16 \text{ et que } 16 = 1,6 \times 10^1.$$

3) Pour K, une autre étape est possible :

$$K = (2 \times 10)^2$$

$$\text{Pour L, } (-2)^3 = -2^3$$

$$\text{puisque :}$$

$$(-2)^3 = -2 \times (-2) \times (-2)$$

$$= -8$$

$$\text{et } -2^3 = -2 \times 2 \times 2 = -8$$

$$4) (-9)^{-2} = 9^{-2}$$

puisque :

$$(-9)^{-2} = \frac{1}{-9 \times (-9)} = \frac{1}{81}$$

$$\text{et } 9^{-2} = \frac{1}{9 \times 9} = \frac{1}{81}$$

Le +

Retiens qu'un nombre pair (impair) de facteurs négatifs entraîne un produit positif (négatif).

**Exercice 1.2.2 Je m'évalue (4 points)**

- Déterminer et justifier le signe de : $(-2)^{11}$; 2^{-15} ; $(-8)^2$; -8^2 . (2 points)
- On donne : $M = \frac{16 \times 10^7 \times 9 \times 10^{-11}}{12 \times 10^5}$. Déterminer l'écriture scientifique et l'écriture décimale (sans zéros inutiles) de M . (1 point)
- On donne : $N = \frac{2 \times 10^3 + 5 \times 10^{-1}}{10^2}$. Déterminer l'écriture scientifique et l'écriture décimale (sans zéros inutiles) de N . (1 point)

CORRIGÉ

- $(-2)^{11} < 0$ puisque il y a 11 (nombre impair) facteurs négatifs dans le produit $(-2)^{11}$.

$$2^{-15} = \frac{1}{2^{15}} > 0 \text{ puisque } 2^{-15} \text{ est le quotient de deux nombres positifs } (2^{15} > 0).$$

$(-8)^2 > 0$ puisque il y a 2 (nombre pair) facteurs négatifs dans le produit $(-8)^2$.

$-8^2 < 0$ puisque il n'y a qu'un seul (nombre impair) facteur négatif dans le produit -8^2 .

E.S. : Écriture scientifique

E.D. : Écriture décimale

1) 0,5 point par nombre

2) 0,5 point : E.S. (et étapes)

0,5 point : E.D.

3) 0,5 point : E.S. (et étapes)

0,5 point : E.D.

$$1) (-8)^2 = -8 \times (-8) = 64$$

$$\text{mais } -8^2 = -8 \times 8 = -64$$

$$2. \quad M = \frac{16 \times 10^7 \times 9 \times 10^{-11}}{12 \times 10^5}$$

$$M = \frac{\cancel{4} \times 4 \times \cancel{3} \times 3 \times 10^7 \times 10^{-11}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times 10^5}$$

$$M = \frac{4 \times 3 \times 10^{-4}}{10^5}$$

$$M = 12 \times 10^{-9}$$

$$M = 1,2 \times 10^{-8} \text{ (E.S.)}$$

$$M = 0,000\,000\,012 \text{ (E.D.)}$$

N'oublie pas que le signe de l'exposant n'a pas d'incidence sur le signe de la puissance !

2) **Le +**

Simplifie l'écriture fractionnaire avant d'effectuer les multiplications/divisions.

$$3. \quad N = \frac{2 \times 10^3 + 5 \times 10^{-1}}{10^2}$$

$$N = \frac{2000 + 0,5}{100}$$

$$N = \frac{2000,5}{100}$$

$$N = 20,005 \text{ (E.D.)}$$

$$N = 2,000\,5 \times 10^1 \text{ (E.S.)}$$

3) Le numérateur de N est une somme : écris chaque terme du numérateur, et le dénominateur, en écriture décimale pour effectuer ensuite les opérations.

Exercice 1.2.3 DNB – Liban (juin 2009)

On donne l'expression numérique : $A = 2 \times 10^2 + 10^1 + 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$.

1. Donner l'écriture décimale de A .
2. Donner l'écriture scientifique de A .
3. Écrire A sous la forme d'un produit d'un entier par une puissance de 10.
4. Écrire A sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction irréductible inférieure à 1.

CORRIGÉ

$$1. \quad A = 2 \times 10^2 + 10^1 + 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

$$A = 200 + 10 + 0,1 + 0,02$$

$$A = 210,12$$

$$2. \quad A = 210,12$$

$$A = 2,1012 \times 10^2$$

$$3. \quad A = 210,12$$

$$A = 21012 \times 10^{-2}$$

$$4. \quad A = 210,12$$

$$A = 210 + \frac{12}{100}$$

$$A = 210 + \frac{3}{25}$$

Une fois l'écriture décimale (sans zéros inutiles même si ce n'est pas précisé) donnée, reprends-la pour en déduire d'autres écritures de A .

4) **Le +**

Attention, dans la somme, on attend une fraction irréductible !

$$\frac{12}{100} = \frac{\cancel{4} \times 3}{\cancel{4} \times 25} = \frac{3}{25}$$

Exercice 1.2.4

La masse d'un électron est estimée à $9110 \times 10^{-34} \text{ kg}$.

Celle d'un proton est estimée à $1673 \times 10^{-30} \text{ kg}$.

1. Écrire chacune de ces deux masses (en kg) en écriture scientifique.
2. Comparer ces deux masses et donner un ordre de grandeur (sous la forme d'une puissance de 10) de leur rapport (quotient des deux masses).
Peut-on dire que la masse d'un électron est négligeable par rapport à celle d'un proton ?
3. Un atome de carbone 12 possède 12 nucléons (protons et neutrons).
La masse d'un nucléon est estimée à $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.
Déterminer une estimation de la masse, en g , d'un atome de carbone 12.



CORRIGÉ

1. $9\,110 \times 10^{-34} \text{ kg} = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
 $1\,673 \times 10^{-30} \text{ kg} = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
2. $10^{-31} < 10^{-27}$

Donc :

$$9,11 \times 10^{-31} < 1,673 \times 10^{-27}$$

La masse, en kg, d'un électron est (très) inférieure à celle d'un proton.

$$\frac{1,673 \times 10^{-27}}{9,110 \times 10^{-31}} \approx \frac{1 \times 10^{-27}}{10 \times 10^{-31}} = \frac{10^{-27}}{10^{-30}} = 10^3$$

Ainsi, la masse d'un proton est environ 10^3 , soit 1 000 fois, supérieure à celle d'un électron. Aussi, on peut dire que cette dernière est négligeable par rapport à celle du proton.

3. $1,67 \times 10^{-27} \times 12 = 20,04 \times 10^{-27} \approx 2 \times 10^{-26}$

On peut donc estimer la masse d'un atome de carbone 12 à $2 \times 10^{-26} \text{ kg} = 2 \times 10^{-23} \text{ g}$.

1) et 2) Les écritures scientifiques permettent une comparaison rapide entre elles en fonction des exposants des puissances de 10.

2) Tu dois évaluer un ordre de grandeur d'un nombre mentalement, donc, prends des approximations simples des valeurs mises en jeu pour que leur rapport soit « parlant ».

Rappel : $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$

donc : $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$

Le +

Le symbole $\approx$ (ou $\simeq$) indique une valeur approchée.

FOCUS : j'approfondis !

- Puissances de 10 et préfixes scientifiques



- La légende de Sissa



- Vertigineux ordres de grandeur





Je révise et je me perfectionne

NDLR : les lettres employées représentent des nombres

3. Réduire, développer, factoriser une expression

3.1 Réduire (et ordonner) une expression littérale

Dans une expression littérale, les lettres désignent des nombres (dont la valeur est variable a priori).

Ainsi, les propriétés et priorités appliquées aux expressions numériques s'appliquent de la même façon aux expressions littérales.

Des lettres différentes représentent supposément des valeurs différentes.

Exemples

$$A = 3x + 2y - 5x - 7 - (y - 11)$$

$$A = 3x + 2y - 5x - 7 - y + 11$$

$$A = 3x - 5x + 2y - y - 7 + 11$$

$$A = -2x + y + 4$$

A est réduite et ordonnée (ordre alphabétique des lettres) ; $y = 1 \times y$.

$$B = -13x^2 + 8x - 2 + 5x^2 - 7x$$

$$B = -13x^2 + 5x^2 + 8x - 7x - 2$$

$$B = -8x^2 + x - 2$$

B est réduite et ordonnée (par ordre décroissant des exposants des puissances de la variable x).

Remarque

x et x^2 sont considérés comme deux variables (valeurs) différentes de façon générale (puisque, sauf pour $x = 0$ et $x = 1$, on a : $x^2 \neq x$).

Les parenthèses autour d'une expression lui imposent la priorité.

- Si elles sont précédées d'un signe +, elles sont inutiles (on les enlève!).
- Si elles sont précédées d'un signe -, il faut prendre l'opposé de l'expression « à l'intérieur » en les enlevant, c'est-à-dire les opposés de chaque terme.

Exemples : $-(y - 11) = -y - (-11) = -y + 11$
 $+(y - 11) = +y + (-11) = y - 11$

Remarque

Si possible, on réduit une expression entre parenthèses précédée d'un signe + ou d'un signe - avant de supprimer ces parenthèses.



3.2 Propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition

Soient a, b, c, d et k cinq nombres.

- **Simple distributivité** : $k(a + b) = ka + kb$ ou $ka + kb = k(a + b)$
- **Double distributivité** : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemples

$$A = 3(2x + 7)$$

$$A = 3 \times 2x + 3 \times 7$$

$$A = 6x + 21$$

$$\text{Ou : } A' = 6x + 21$$

$$A' = 3 \times 2x + 3 \times 7$$

$$A' = 3(2x + 7)$$

$$B = (x - 5) \times 9$$

$$B = 9 \times x + 9 \times (-5)$$

$$B = 9x - 45$$

$$\text{Ou : } B' = 9x - 45$$

$$B' = 9 \times x - 9 \times 5$$

$$B' = 9(x - 5)$$

$$C = (5x - 6)(7 - x)$$

$$C = 35x - 5x^2 - 42 + 6x$$

$$C = -5x^2 + 41x - 42$$

Par principe, on réduit (et on ordonne si nécessaire) une expression littérale.
Selon le contexte, une égalité peut « s'utiliser dans les deux sens » : en particulier la simple distributivité.

3.3 Des identités (égalités) remarquables

Propriétés

soient a et b deux nombres quelconques.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ ou $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Remarques

$$(a - b)(a + b) = (a + b)(a - b).$$

Ces identités permettront d'écrire directement (sans étapes) un développement réduit ou une factorisation.

Exemples

$$D = (x + 7)^2$$

$$D = x^2 + 14x + 49$$

$$\text{Ou :}$$

$$D' = x^2 + 14x + 49$$

$$D' = (x + 7)^2$$

$$E = (2x - 5)^2$$

$$E = 4x^2 - 20x + 25$$

$$\text{Ou :}$$

$$E' = 4x^2 - 20x + 25$$

$$E' = (2x - 5)^2$$

$$F = (3x - 2)(3x + 2)$$

$$F = 9x^2 - 4$$

$$\text{Ou :}$$

$$F' = 9x^2 - 4$$

$$F' = (3x - 2)(3x + 2)$$

3.4 Développer (et réduire par principe) une expression littérale

⊗ **Définition** : développer un produit signifie l'écrire sous la forme d'une somme (qui lui est égale).

Pour cela, selon les cas rencontrés, on utilisera la simple ou la double distributivité, ou encore une identité remarquable.

Exemples : les expressions données A, B, C, D, E et F ont été développées (puis réduites et ordonnées) dans les paragraphes précédents.

Remarques

On ne peut développer qu'un produit !

On rappelle qu'une différence est une somme (soustraire, c'est ajouter l'opposé).

3.5 Factoriser une expression littérale

⊗ **Définition** : factoriser une somme signifie l'écrire sous la forme d'un produit (qui lui est égal). C'est le « contraire de développer » !

Pour cela, selon les cas rencontrés, on utilisera la simple distributivité, ou encore on reconnaîtra le développement réduit d'une identité remarquable.

Remarque

On ne peut factoriser qu'une somme !

Exemples : les expressions données A', B', D', E' et F' ont été factorisées (puis réduites si besoin) dans les paragraphes précédents.

3.6 Attention aux consignes d'un(e) exercice(question)

S'agit-il de développer (et réduire : c'est toujours sous-entendu si non écrit) une expression littérale, ou bien **s'agit-il de la factoriser** (autant que possible en valeur absolue : c'est toujours sous-entendu si non écrit) ?

Dans un cas ou dans l'autre, les propriétés (égalités) à utiliser sont les mêmes (distributivité de la multiplication sur l'addition ou une identité remarquable) mais elles ne s'utilisent « pas dans le même sens » ...



Je m'exerce et je fais la différence



Exercice 1.3.1 Je me teste en temps limité (25 minutes)

1. Réduire chacune des expressions données.

$$A = 7x - 3x^2 + 9 - 7x^2 + 11 - x - 4; B = -5 \times 2x + 3x \times 7x - 9x + x^2$$

$$\text{Pour } a \neq 0; b \neq 0, C = \frac{ab^2}{a^2b}; \text{ Pour } r \neq 0, D = \frac{\pi r^2}{2\pi r}$$

2. Développer (et réduire) les expressions suivantes.

$$E = 7(2x - 3); F = (-3x + 2) \times 4; G = -x(1 - 5x); H = x^2(6 - x)$$

3. Développer (et réduire) les expressions suivantes.

$$I = (x - 7)(4x + 1); J = (-5x + 2)(9 - 4x); K = (-3 - 2x)(-8x - 11)$$

4. Développer (et réduire) directement (sans étape) les expressions suivantes.

$$\text{a) } L = (x + 7)^2; M = (x - 7)^2; N = (x - 7)(x + 7)$$

$$\text{b) } P = (2x + 9)^2; Q = (4x - 5)^2; R = (6x + 11)(6x - 11)$$

5. Factoriser « autant que possible » les expressions suivantes.

$$S = 7x + 35; T = 3x + x^2; U = 2 - 2y; V = 9x + 3x^2;$$

$$W = -3ab^3 - 15ab + 9a^3b^2; W' = (x - 2)(x + 1) - (x - 2)(3 - 4x)$$

6. Factoriser directement (sans étape) les expressions suivantes.

$$X = x^2 + 8x + 16; Y = 4x^2 - 20x + 25; Z = x^2 - 81; Z' = 49 - 36x^2$$

CORRIGÉ

Repère bien les verbes des consignes : réduire, développer, factoriser.

Il s'agit d'écrire les expressions données sous différentes formes.

1. $A = 7x - 3x^2 + 9 - 7x^2 + 11 - x - 4$

$$A = -10x^2 + 6x + 16$$

$$B = -5 \times 2x + 3x \times 7x - 9x + x^2$$

$$B = -10x + 21x^2 - 9x + x^2$$

$$B = 22x^2 - 19x$$

$$C = \frac{ab^2}{a^2b}; \quad C = \frac{\cancel{a} \times \cancel{b} \times b}{\cancel{a} \times a \times \cancel{b}}; \quad C = \frac{b}{a}$$

$$D = \frac{\pi r^2}{2\pi r}; \quad D = \frac{\cancel{\pi} \times \cancel{r} \times r}{2 \times \cancel{\pi} \times \cancel{r}}; \quad D = \frac{r}{2}$$

Note bien que, même si ce n'est pas précisé dans l'énoncé, après un développement, on réduit systématiquement l'expression (idem pour les facteurs d'une factorisation).

1) Priorité aux produits dans l'expression B.

Le +

Par principe, ordonne toujours les termes d'une expression réduite, et souligne/encadre le « résultat » dans ta copie.

$$\begin{aligned}
2. \quad E &= 7(2x - 3) & F &= (-3x + 2) \times 4 \\
E &= 14x - 21 & F &= -12x + 8 \\
G &= -x(1 - 5x) & H &= x^2(6 - x) \\
G &= 5x^2 - x & H &= -x^3 + 6x^2 \\
3. \quad I &= (x - 7)(4x + 1) & K &= (-3 - 2x)(-8x - 11) \\
I &= 4x^2 + x - 28x - 7 & K &= 24x + 33 + 16x^2 + 22x \\
I &= 4x^2 - 27x - 7 & K &= 16x^2 + 46x + 33 \\
J &= (-5x + 2)(9 - 4x) \\
J &= -45x + 20x^2 + 18 - 8x \\
J &= 20x^2 - 53x + 18
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad a) \quad L &= (x + 7)^2 & M &= (x - 7)^2 \\
L &= x^2 + 14x + 49 & M &= x^2 - 14x + 49 \\
N &= (x - 7)(x + 7) \\
N &= x^2 - 49 \\
b) \quad P &= (2x + 9)^2 & Q &= (4x - 5)^2 \\
P &= 4x^2 + 36x + 81 & Q &= 16x^2 - 40x + 25 \\
R &= (6x + 11)(6x - 11) \\
R &= 36x^2 - 121
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad S &= 7x + 35 & U &= 2 - 2y \\
S &= 7(x + 5) & U &= 2(1 - y) \\
T &= 3x + x^2 & V &= 9x + 3x^2 \\
T &= x(3 + x) & V &= 3x(3 + x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W &= -3ab^3 - 15ab + 9a^3b^2 \\
W &= 3ab(-b^2 - 5 + 3a^2b) \\
W' &= (x - 2)(x + 1) - (x - 2)(3 - 4x) \\
W' &= (x - 2)[(x + 1) - (3 - 4x)] \\
W' &= (x - 2)[x + 1 - 3 + 4x] \\
W' &= (x - 2)(5x - 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad X &= x^2 + 8x + 16 & Y &= 4x^2 - 20x + 25 \\
X &= (x + 4)^2 & Y &= (2x - 5)^2 \\
Z &= x^2 - 81 & Z' &= 49 - 36x^2 \\
Z &= (x - 9)(x + 9) & Z' &= (7 - 6x)(7 + 6x)
\end{aligned}$$

4) et 6) L'énoncé indique « directement » (sans étape) ce qui doit t'inciter à utiliser une identité remarquable. Tu dois évidemment connaître par cœur les 3 identités remarquables (« dans les deux sens » : pour développer ou factoriser), l'idée est d'être rapide et efficace !

Le +

Inutile de prendre une calculatrice pour les carrés parfaits (à connaître par cœur : les carrés des entiers de 0 jusqu'à 14), c'est un gain de temps !

5) Tu dois toujours factoriser « autant que possible en valeur absolue » ! Pour l'expression W , tu peux aussi écrire :

$$W = -3ab(b^2 + 5 - 3a^2b)$$

6) Tu dois immédiatement reconnaître les développements réduits d'identités remarquables.

Tu peux aussi écrire :

$$Z = (x + 9)(x - 9)$$

$$Z' = (7 + 6x)(7 - 6x)$$

**Exercice 1.3.2 Je m'évalue (6 points)**

1. À chaque affirmation, mettre une croix dans la colonne qui convient. (2 points)

Affirmation	Vrai	Faux
Une expression est une suite d'opérations à effectuer (ou non).		
Écrire une expression avec le moins de termes possible, c'est la factoriser.		
Réduire une expression, c'est mettre les termes dans l'ordre.		
Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.		

2. Pour chaque proposition, entourer la ou les réponses correctes. (4 points)

Proposition			
$3y + 7 + 4y + 5 =$	$12y^2 + 12$	$19y$	$7y + 12$
$16x^2 + 4x =$	$8(4x^2 + x)$	$x(16x + 4)$	$4x(4x + 1)$
$4y(5 - 2y) + 3y - y^2 =$	$23y - 9y^2$	$3y + 11y^2$	$23y - 7y^2$
$13 - (3 + 5x)^2$ est :	un produit.	une somme.	une différence.
$(8x - 5)^2$ est :	un produit.	une somme.	une différence.
$(6x + 1)(5x - 2)$ est une expression :	développée.	factorisée.	réduite.
$4z - (7 - 3z)$ est une expression :	de 2 termes.	de 3 termes.	développée.
$x^2 + 5x - 4$ est une expression :	réduite.	développée.	factorisée.

CORRIGÉ

Voir définitions de la rubrique « Je révise et je me perfectionne ».

1. 0,5 point par réponse correcte

Affirmation	Vrai	Faux
Une expression est une suite d'opérations à effectuer (ou non).	✗	
Écrire une expression avec le moins de termes possible, c'est la factoriser.		✗
Réduire une expression, c'est mettre les termes dans l'ordre.		✗
Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.	✗	

2. 0,5 point par réponse(s) correcte(s) à chaque proposition

Proposition			
$3y + 7 + 4y + 5 =$	$12y^2 + 12$	$19y$	$7y + 12$
$16x^2 + 4x =$	$8(4x^2 + x)$	$x(16x + 4)$	$4x(4x + 1)$
$4y(5 - 2y) + 3y - y^2 =$	$23y - 9y^2$	$3y + 11y^2$	$23y - 7y^2$
$13 - (3 + 5x)^2$ est :	un produit.	une somme.	une différence.
$(8x - 5)^2$ est :	un produit.	une somme.	une différence.
$(6x + 1)(5x - 2)$ est une expression :	développée.	factorisée.	réduite.
$4z - (7 - 3z)$ est une expression :	de 2 termes.	de 3 termes.	développée.
$x^2 + 5x - 4$ est une expression :	réduite.	développée.	factorisée.



Exercice 1.3.3

- Développer $(x - 1)^2$.
 - En utilisant le développement précédent, justifier par les étapes nécessaires que : $99^2 = 9801$.
- Développer $(x - 1)(x + 1)$.
 - En utilisant le développement précédent, justifier par les étapes nécessaires que : $99 \times 101 = 9999$.

CORRIGÉ

- $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
 - On reconnaît que : $99^2 = (100 - 1)^2$
Donc : $99^2 = (100 - 1)^2$
 $= 100^2 - 2 \times 100 + 1$
 $= 10\,000 - 200 + 1$
 $= 9801$
- $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$
 - On reconnaît que :
 $99 \times 101 = (100 - 1)(100 + 1)$
Donc : $99 \times 101 = (100 - 1)(100 + 1)$
 $= 100^2 - 1$
 $= 10\,000 - 1$
 $= 9999$

1) a) et 2) a) On reconnaît une identité remarquable !

1) b) Il s'agit de poser : $99^2 = (100 - 1)^2$ pour appliquer le développement de $(x - 1)^2$ déterminé au a).

2) b) même principe !

Le +

Les étapes doivent rigoureusement montrer que tu as fait le lien entre a) et b).

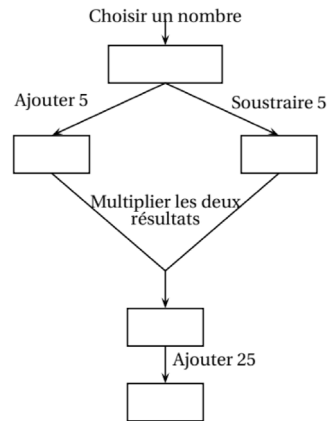
Il s'agit ici de mettre en évidence l'utilisation du calcul mental (qui ne dispense pas des étapes de calculs !).



Exercice 1.3.4 DNB – Polynésie (23 juin 2022)

On considère le programme de calcul ci-contre.

1. a) Si on choisit le nombre 7, vérifier qu'on obtient 49 à la fin du programme.
b) Si on choisit le nombre -4 , quel résultat obtient-on à la fin du programme ?
2. On note x le nombre choisi au départ.
a) Exprimer en fonction de x le résultat obtenu.
b) Développer et réduire $(x + 5)(x - 5)$.
c) Sarah dit : « Avec ce programme de calcul, quel que soit le nombre choisi au départ, le résultat obtenu est toujours le carré du nombre de départ ».
Qu'en pensez-vous ?



CORRIGÉ

1. a) En choisissant 7 comme nombre au départ du programme :

- 7
- $7 + 5 = 12$
- $7 - 5 = 2$
- $12 \times 2 = 24$
- $24 + 25 = 49$

On obtient donc bien 49.

- b) En choisissant -4 comme nombre au départ du programme :

- -4
- $-4 + 5 = 1$
- $-4 - 5 = -9$
- $1 \times (-9) = -9$
- $-9 + 25 = 16$

On obtient donc 16.

2. a) Soit x le nombre choisi au départ, et R_x le nombre obtenu en appliquant le programme à x .

$$R_x = (x + 5)(x - 5) + 25$$

$$b) (x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$$

- 1) a) Tu peux aussi définir R_7 comme étant le résultat obtenu en appliquant le programme au nombre 7 :

$$R_7 = (7 + 5)(7 - 5) + 25$$

$$R_7 = 12 \times 2 + 25$$

$$R_7 = 24 + 25$$

$$R_7 = 49$$

- 1) b) *Idem*

$$R_{-4} = (-4 + 5)(-4 - 5) + 25$$

$$R_{-4} = 1 \times (-9) + 25$$

$$R_{-4} = -9 + 25$$

$$R_{-4} = 16$$

- 2) a) *Rappelle ce qu'est x et définis le nombre R_x (ou autre lettre !) cherché (résultat du programme appliqué à un nombre noté x).*

c) D'après les questions a) et b), pour tout nombre x , on a :

$$R_x = (x + 5)(x - 5) + 25$$

$$R_x = x^2 - 25 + 25$$

$$R_x = x^2$$

Donc, avec ce programme, quel que soit le nombre x choisi au départ, le résultat obtenu est toujours son carré x^2 .

Ainsi, Sarah a raison.

2) c) On attend une seule expression associée au résultat du programme appliqué à x .

Le +

On pourrait aussi utiliser la notion de fonction et écrire R_x sous la forme $R(x)$ qui induit alors une relation (fonction notée R) entre x et $R(x)$ puisque pour tout nombre x , $R(x)$ est unique !

Exercice 1.3.5

Enzo affirme : « la différence de l'inverse d'un nombre entier non nul et de l'inverse de celui qui lui succède est égale à l'inverse du produit de ces deux entiers ».

Montrer qu'Enzo a raison.

CORRIGÉ

Soit x un nombre entier non nul.

La différence de l'inverse de x et de l'inverse de celui qui lui succède c'est-à-dire de $(x+1)$ est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} &= \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} \\ &= \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}}{x(x+1)} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

Et $\frac{1}{x(x+1)}$ est bien l'inverse du produit de x par $(x+1)$.

Donc, Enzo a raison.

Pour (dé)montrer qu'une égalité est vraie, on peut travailler sur ses deux membres séparément : montre ici que l'un est égal à l'autre (on peut montrer aussi que chacun est égal à la même expression).

Le +

Associe (en introduction) les expressions écrites en français à leur « traduction » mathématique.

Pour (dé)montrer qu'une égalité est fausse, exhiber un contre-exemple suffit, mais pas pour prouver qu'une égalité est vraie (elle l'est pour tout nombre !).

 FOCUS : j'approfondis !

- À quoi ça sert ?



- Pour aller plus loin





Je révise et je me perfectionne

NDLR : les lettres employées représentent des nombres

4. Résolution d'équations à une inconnue

4.1 Vocabulaire

⊙ Définitions :

- Une **équation à une inconnue** est une égalité littérale avec une variable.
- **Résoudre une équation** signifie déterminer, si elle(s) existe(nt), la ou les valeurs de la variable pour la(les)quelle(s) l'égalité est vérifiée.

Cette(ces) valeur(s) est(sont) la(les) **solution(s) de l'équation**.

Une équation du premier degré (respectivement du second degré) à une inconnue comporte au maximum une puissance de la variable à l'exposant 1 (respectivement à l'exposant 2).

Remarque

Une égalité possède deux membres (avant et après le symbole =).

Par principe, une solution est toujours donnée sous forme réduite (la plus simple).

Exemples

$3x - 7 = 2 - x$ est une équation du premier degré à une inconnue x .

On peut affecter une valeur à x dans l'égalité littérale.

Par exemple (au hasard), pour $x = 0$, on a :

- $3 \times 0 - 7 = -7$
- $2 - 0 = 2$

Or, $2 \neq -7$, donc 0 n'est pas solution de cette équation.

$16 - 4x^2 = 0$ est une équation du second degré à une inconnue x .

De la même façon que ci-contre, affectons (par exemple) -2 à x .

On a :

$$\begin{aligned} 16 - 4 \times (-2)^2 &= 16 - 4 \times 4 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc -2 est **une** solution de cette équation.

4.2 Résolution d'équation

Propriété

On peut **additionner, soustraire, multiplier, diviser**, un même nombre non nul à chaque membre d'une égalité (elle reste vraie).

En utilisant ces propriétés, on peut alors écrire des équations équivalentes (les unes sous les autres) à l'aide du symbole $\Leftrightarrow$ (qui signifie : équivaut à).

Exemples (résolution d'équations d'inconnue x) :

$$\begin{aligned} & 3x - 7 = 1 - x \\ \Leftrightarrow & \cancel{3x} + \cancel{7} + x = \cancel{1} + \cancel{7} + x \\ \Leftrightarrow & 4x = 8 \\ \Leftrightarrow & \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{8}{4} \\ \Leftrightarrow & x = 2 \end{aligned}$$

On a raisonné par équivalences, donc, ici, la (seule) solution est 2.

On peut aussi écrire : $S = \{2\}$

$$\begin{aligned} & 16 - 4x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \cancel{16} - 4x^2 - \cancel{16} = -0 - 16 \\ \Leftrightarrow & -4x^2 = -16 \\ \Leftrightarrow & \frac{\cancel{-4}x^2}{\cancel{-4}} = \frac{-16}{-4} \\ \Leftrightarrow & x^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

Les solutions sont 2 et -2.

On peut aussi écrire : $S = \{2 ; -2\}$

- S désigne l'ensemble des solutions (nombres) d'une équation. Un ensemble est exprimé avec des accolades, ses éléments (distincts) sont séparés par des points-virgules.
- Lorsqu'une équation n'a pas de solution, c'est-à-dire lorsqu'aucun nombre ne vérifie l'égalité, on dit que son ensemble des solutions S est vide.
On peut alors écrire : $S = \emptyset$
C'est le cas de l'équation : $x + 1 = x + 2$ qui équivaut à : $1 = 2$ qui est une égalité fausse.
- Une équation peut avoir une infinité de solutions. Dans ce cas, on l'écrit explicitement : *tous les nombres vérifient (ou : sont solutions de) l'équation*.
C'est le cas de l'équation : $2(x + 1) = 2x + 2$ qui équivaut à : $2x + 2 = 2x + 2$ qui est une égalité (toujours) vraie.



4.3 Équations particulières du second degré

Les **équations de la forme $x^2 = a$** , dans lesquelles x est le nombre inconnu et a est un nombre fixé, équivalent à :

- $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$ lorsque $a > 0$
- $x = 0$ lorsque $a = 0$

Lorsque $a < 0$: l'équation n'a pas de solution.

Une **équation – produit nul**, par exemple de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$, dans laquelle x est l'inconnue et a, b, c, d sont des nombres fixés, équivaut à :

$$ax + b = 0 \quad \text{ou} \quad cx + d = 0.$$

Propriété

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

Remarques

Une équation du second degré a, au plus, deux solutions.

Un carré est toujours positif ou nul, c'est pourquoi, lorsque $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution (dans les ensembles de nombres connus pour le moment du moins!).

Exemples

Puisque $5 > 0$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}. \\ \text{Donc : } S &= \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\} \end{aligned}$$

Puisque $-9 < 0$:

$x^2 = -9$ n'a pas de solution.
On peut écrire : $S = \emptyset$
($\emptyset$ désigne l'ensemble vide).

$$(7x + 3)(5x - 2) = 0$$

C'est une équation – produit nul.

Or, un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

Ainsi :

$$\begin{aligned} (7x + 3)(5x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 7x + 3 &= 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-3}{7} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{-3}{7}; \frac{2}{5} \right\}$$

$$16 - 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

(vu dans un exemple précédent).

On s'est ramené à une équation du type : $x^2 = a$ avec $a = 4 > 0$.

Ainsi $x^2 = 4$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{4} \text{ ou } x = -\sqrt{4}.$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$\text{Donc : } S = \{2; -2\}$$

$$(2x + 3)^2 = -2x - 3$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 + 1 \times (2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)[(2x + 3) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)[2x + 3 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)(2x + 4) = 0$$

On s'est ramené par factorisation à une équation – produit nul, que l'on résout comme ci-contre.

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{-3}{2}; -2 \right\}$$