

PCSI

Matthieu Fèvre
Roland Gorlier

Questions de maths



- Mémentos de cours
- Questions et exercices
- Solutions détaillées



Références sciences



PCSI

Questions de maths

- Mémentos de cours
- Questions et exercices
- Solutions détaillées

Matthieu Fèvre
Roland Gorlier



Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

*Retrouvez tous les livres de la collection
et des extraits sur www.editions-ellipses.fr*



ISBN 9782340-116696

Dépôt légal : septembre 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné en priorité aux étudiants en classe préparatoire PCSI. Divisé en quinze chapitres, il est conçu pour être utilisé par des étudiants de tout niveau. Dans chaque chapitre, on trouvera les parties suivantes.

◊ **Un mémento du cours**

Celui-ci contient un récapitulatif exhaustif des définitions et résultats du cours. Ces éléments sont présentés assortis de perspectives sur leur utilisation. Ces perspectives sont introduites par les symboles ♥ ou ♣.

Le symbole ♥ signale des précisions sur des situations où l'on aimera appliquer le théorème ou la propriété énoncés.

Le symbole ♣ signale une remarque concernant des écueils à éviter ou des points de vigilance.

◊ **Une sélection de questions à résoudre**

Les premières questions portent sur des applications usuelles et élémentaires du cours. Les suivantes reprennent des problèmes classiques ou sont extraites d'énoncés d'oraux de concours et peuvent être plus originales. Elles demandent plus de réflexion.

Tous les énoncés sont courts de façon à ce qu'un étudiant puisse s'y pencher dès qu'il dispose de quelques minutes.

◊ **Des éclairages**

Pour chaque question, sont proposés des liens avec le cours et des tactiques de résolution classiques, des points d'attention à la lumière desquels la résolution des questions sera facilitée.

◊ **Des réponses**

Une réponse détaillée est donnée à chaque question. Le lecteur trouvera au début de chaque réponse des renvois aux principaux résultats de cours qu'il est utile d'avoir en mémoire pour comprendre cette réponse.

L'ouvrage ne se substitue pas à un cours en classe où seraient présentées les preuves des résultats. Chaque étudiant pourra s'assurer de connaître son cours avant de se lancer dans la résolution des questions.

Pour préserver le plaisir de la recherche et la joie éventuelle de trouver sa propre solution, il est conseillé de prendre un temps suffisant pour l'étude de chaque question avant de lire les éclairages puis les solutions.

Le regroupement des notions du programme en quinze chapitres permet d'avoir une synthèse sur les quinze domaines principaux. Les exercices d'approfondissement sont à aborder de préférence lorsque le domaine est maîtrisé, soit en première année, soit lors de révisions estivales pour préparer la deuxième année.

Nous avons pris beaucoup de plaisir à mettre au point cet ouvrage et espérons susciter de l'intérêt dans l'étude des questions proposées.

Nous remercions nos amis et collègues pour leur soutien et leurs relectures avisées, en particulier Laura GAY, Anne GORLIER, Frédéric MATHÉUS et Alexandre MONTAGNIER. Nous remercions aussi Marie FROPO, normalienne et ancienne élève de PC* au lycée Aux Lazaristes pour sa relecture enthousiaste et efficace.

Table des matières

I	Ensembles et raisonnements	17
I.1	Cours	17
I.1.1	Rudiments de logique	17
I.1.2	Quantificateurs	18
I.1.3	Raisonnements par récurrence	19
I.1.4	Autres raisonnements	20
I.1.5	Ensembles	21
I.1.6	Applications	22
I.1.7	Ensembles de nombres usuels	24
I.1.8	Dénombrément	28
I.2	Questions	31
I.3	Éclairages	34
I.4	Réponses	35
	[R I. 1] (Récurrence simple)	35
	[R I. 2] (Récurrence double)	36
	[R I. 3] (Récurrence forte)	36
	[R I. 4] (Paire - Impaire)	37
	[R I. 5] (Une équation fonctionnelle)	38
	[R I. 6] (Récurrence forte)	38
	[R I. 7] (Images directes et réciproques)	39
	[R I. 8] (Injections, bijections)	40
	[R I. 9] (Injections, surjections, bijections)	41
	[R I. 10] (Indicatrices et opérations ensemblistes)	42
	[R I. 11] (Formule de différence symétrique)	43
	[R I. 12] (Petit théorème de Fermat)	43
	[R I. 13] (Formule de Vandermonde)	44
	[R I. 14] (Dénombrément de parties)	44
	[R I. 15] (Deux formules classiques)	45
	[R I. 16] (Suites croissantes)	46

II	Compléments de calculs	47
II.1	Cours	47
II.1.1	Sommes et produits finis	47
II.1.2	Inégalités dans $\mathbb{R}$	52
II.1.3	Trigonométrie	55
II.2	Questions	58
II.3	Éclairages	60
II.4	Réponses	62
	[R II. 1] (Changements d'indice - Télescopages)	62
	[R II. 2] (Inégalités)	63
	[R II. 3] (Valeurs absolues)	64
	[R II. 4] (Partie entière)	65
	[R II. 5] (Formule de Vandermonde : le retour et application)	66
	[R II. 6] (Sommes diverses)	66
	[R II. 7] (Coefficients binomiaux)	67
	[R II. 8] (Itération de Pascal et applications)	69
	[R II. 9] (Sommes doubles)	70
	[R II. 10] (Trigonométrie)	72
	[R II. 11] (Des équations trigonométriques)	73
	[R II. 12] (Un produit télescopique)	73
	[R II. 13] (Pour préparer des changements de variables)	74
III	Nombres complexes	75
III.1	Cours	75
III.1.1	L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes	75
III.1.2	L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1	77
III.1.3	Forme trigonométrique	78
III.1.4	Équations algébriques	79
III.1.5	Racines n -ièmes	81
III.1.6	Exponentielle complexe	82
III.1.7	Applications à la géométrie - Transformations	82
III.2	Questions	84
III.3	Éclairages	87
III.4	Réponses	89
	[R III. 1] (Réel ou imaginaire pur)	89
	[R III. 2] (Formes algébriques et trigonométriques)	89
	[R III. 3] (Linéarisation - Développement)	90
	[R III. 4] (Racines carrées et équations polynomiales)	92
	[R III. 5] (Arc moitié)	93
	[R III. 6] (Autour des racines n -ième de l'unité)	94
	[R III. 7] (Racines n -ièmes)	95

[R III. 8] (Des sommes classiques)	97
[R III. 9] (Calculs de sommes)	99
[R III. 10] (Formule aux huit carrés)	100
[R III. 11] (Triangles équilatéraux)	100
[R III. 12] (Droites perpendiculaires)	101
[R III. 13] (Un quadrilatère)	102
[R III. 14] (Similitude directe)	102
IV Suites numériques	103
IV.1 Cours	103
IV.1.1 Généralités	103
IV.1.2 Limite et nature	104
IV.1.3 Limite de suites réelles et inégalités	105
IV.1.4 Opérations et limites	106
IV.1.5 Suites adjacentes	107
IV.1.6 Suites extraites	108
IV.1.7 Suites arithmético-géométriques	109
IV.1.8 Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants	110
IV.1.9 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$	111
IV.2 Questions	113
IV.3 Éclairages	116
IV.4 Réponses	117
[R IV. 1] (Exemple de suite sans limite)	117
[R IV. 2] (Natures de suites et limites)	118
[R IV. 3] (Limite d'une suite)	120
[R IV. 4] (Suites adjacentes)	121
[R IV. 5] (Suites extraites)	122
[R IV. 6] (Suites récurrentes simultanées)	122
[R IV. 7] (Suite arithmético-géométrique)	123
[R IV. 8] (Suite arithmético-géométrique)	124
[R IV. 9] (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)	125
[R IV. 10] (Suites récurrentes)	125
[R IV. 11] (Suite récurrente)	127
[R IV. 12] (Quasi extractions)	128
[R IV. 13] (Théorème de Cesàro)	128
[R IV. 14] (Équivalent d'une suite récurrente)	130
[R IV. 15] (Étude d'une suite récurrente par suites extraites) . .	131
[R IV. 16] (Suite récurrente complexe)	133
[R IV. 17] (Suites sous-additives)	133

V	Fonctions de la variable réelle	135
V.1	Cours	135
V.1.1	Généralités	135
V.1.2	Limites	138
V.1.3	Continuité en un point	144
V.1.4	Continuité sur un intervalle de $\mathbb{R}$	145
V.1.5	Dérivabilité	146
V.1.6	Fonctions convexes, concaves	152
V.1.7	Fonctions à valeurs complexes	154
V.1.8	Fonctions exponentielle, logarithme népérien et puissances	155
V.1.9	Fonctions circulaires : sinus, cosinus et tangente . .	157
V.1.10	Fonctions circulaires réciproques	157
V.1.11	Fonctions hyperboliques sh et ch	159
V.1.12	Tableau des dérivées usuelles	160
V.2	Questions	161
V.3	Éclairages	166
V.4	Réponses	169
	[R V. 1] (Calculs de limites)	169
	[R V. 2] (Recherche de fonctions)	171
	[R V. 3] (Continuité de la limite d'une suite de fonctions) . . .	172
	[R V. 4] (Prolongements par continuité)	172
	[R V. 5] (Une équation fonctionnelle)	173
	[R V. 6] (Utilisation du nombre dérivé)	174
	[R V. 7] (Calculs de dérivées)	175
	[R V. 8] (Prolongement et régularité)	176
	[R V. 9] (Bijection réciproque)	178
	[R V. 10] (Exemples de fonctions sans limites)	179
	[R V. 11] (Fonctions bornées)	180
	[R V. 12] (Existence d'une solution)	180
	[R V. 13] (Existence d'une solution)	181
	[R V. 14] (Des idées fixes ?)	181
	[R V. 15] (Continuité et surjectivité)	182
	[R V. 16] (Dérivation et parité ou périodicité)	182
	[R V. 17] (Règle de L'Hospital)	183
	[R V. 18] (Application du théorème de Rolle)	184
	[R V. 19] (Application du théorème de Rolle : le retour)	184
	[R V. 20] (Valeur de la dérivée et limite à l'infini)	184
	[R V. 21] (Calculs de dérivées n -ièmes)	185
	[R V. 22] (Fonctions usuelles)	187

[R V. 23] (Inégalité de Jensen)	187
[R V. 24] (Inégalité des trois pentes)	189
[R V. 25] (Monotonie et convexité)	190
[R V. 26] (Encadrement classique issu de la convexité)	191
[R V. 27] (Une équation fonctionnelle)	191
[R V. 28] (Une équation fonctionnelle)	192
[R V. 29] (Une équation fonctionnelle)	192
[R V. 30] (Étude d'une suite récurrente)	193
VI Analyse asymptotique	195
VI.1 Cours	195
VI.1.1 Relations de comparaison pour les fonctions	195
VI.1.2 Relations de comparaison pour les suites	198
VI.1.3 Généralités sur les développements limités	201
VI.1.4 Obtention de développements limités	203
VI.2 Questions	206
VI.3 Éclairages	210
VI.4 Réponses	212
[R VI. 1] (Détermination d'équivalents de fonctions)	212
[R VI. 2] (Composition d'équivalents par exp ou ln)	213
[R VI. 3] (Détermination d'équivalents de suites)	214
[R VI. 4] (Utilisation du théorème de Cesàro)	216
[R VI. 5] (Détermination d'équivalents par encadrement)	216
[R VI. 6] (Calculs de développements limités)	217
[R VI. 7] (Application de la formule de Taylor-Young)	221
[R VI. 8] (Développement limité d'une fonction réciproque)	221
[R VI. 9] (Calculs de limites de fonctions)	222
[R VI. 10] (Études de branches infinies)	224
[R VI. 11] (Prolongement par continuité, régularité)	225
[R VI. 12] (Équivalent d'une suite définie par une somme)	225
[R VI. 13] (Somme des factorielles des n premiers entiers)	226
[R VI. 14] (Équivalent du terme général d'une suite implicite)	227
[R VI. 15] (Équivalent d'une suite récurrente)	228
[R VI. 16] (Équivalent d'une suite récurrente)	229
[R VI. 17] (Équivalent d'une suite récurrente)	229
[R VI. 18] (Suite implicite et développement asymptotique)	230
[R VI. 19] (Suite implicite et développement asymptotique)	232
[R VI. 20] (Suite implicite et développement asymptotique)	233

VII	Polynômes	235
VII.1	Cours	235
VII.1.1	Ensemble des polynômes à une indéterminée	235
VII.1.2	Dérivation des polynômes et formule de Taylor . . .	236
VII.1.3	Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$	237
VII.1.4	Racines d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$	238
VII.1.5	Décomposition en facteurs irréductibles	239
VII.1.6	Fractions rationnelles	241
VII.2	Questions	242
VII.3	Éclairages	245
VII.4	Réponses	246
[R VII. 1]	(Division euclidienne - Nombre de racines)	246
[R VII. 2]	(Racines)	247
[R VII. 3]	(Équations liant un polynôme et ses dérivées)	248
[R VII. 4]	(Factorisation dans $\mathbb{C}$ et calcul de $\zeta(2)$)	249
[R VII. 5]	(Expressions à l'aide de polynômes dérivés)	252
[R VII. 6]	(Inégalité liant un polynôme et ses dérivés)	252
[R VII. 7]	(Décompositions en éléments simples)	253
[R VII. 8]	(Relations entre coefficients et racines)	254
[R VII. 9]	(Une factorisation dans $\mathbb{C}$)	255
[R VII. 10]	(Caractérisation des polynômes scindés)	256
[R VII. 11]	(Une équation polynomiale)	256
[R VII. 12]	(Une autre équation polynomiale)	257
[R VII. 13]	(Équation différentielle et polynômes)	258
[R VII. 14]	(Module sur le cercle unité)	259
VIII	Algèbre linéaire	261
VIII.1	Cours	261
VIII.1.1	Espaces vectoriels	261
VIII.1.2	Sous-espaces vectoriels	264
VIII.1.3	Bases	265
VIII.1.4	Somme de deux sous-espaces vectoriels	268
VIII.1.5	Espaces vectoriels de dimension finie	269
VIII.1.6	Applications linéaires	273
VIII.1.7	Applications linéaires de E dans F en dimension finie	279
VIII.1.8	Formes linéaires en dimension finie - hyperplans . .	280
VIII.1.9	Équations linéaires - Système d'équations linéaires .	281
VIII.2	Questions	283
VIII.3	Éclairages	287
VIII.4	Réponses	290
[R VIII. 1]	(Espace vectoriel or not, that is the question)	290

[R VIII. 2]	(Une somme qui n'est pas directe)	292
[R VIII. 3]	(Images et noyaux d'endomorphismes)	292
[R VIII. 4]	(Image et image réciproque)	295
[R VIII. 5]	(Projecteurs et symétries)	295
[R VIII. 6]	(Familles libres)	296
[R VIII. 7]	(Autour du rang)	297
[R VIII. 8]	(Propriété du rang)	297
[R VIII. 9]	(Un automorphisme)	298
[R VIII. 10]	(Centre de $GL(E)$)	298
[R VIII. 11]	(Espace de suites récurrentes)	299
[R VIII. 12]	(Puissances d'endomorphisme)	301
[R VIII. 13]	(Polynômes de Gregory)	303
[R VIII. 14]	(Quotient de division euclidienne)	304
[R VIII. 15]	(Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$)	305
[R VIII. 16]	(Stabilité de sous-espace vectoriels)	306
[R VIII. 17]	(Hyperplan et forme linéaire)	307
[R VIII. 18]	(Un espace vectoriel de dimension paire)	307
[R VIII. 19]	(Un espace vectoriel de suites)	308
[R VIII. 20]	(Utilisation de la formule de Grassmann)	310
[R VIII. 21]	(Supplémentaire commun)	310
[R VIII. 22]	(Endomorphismes de même noyau)	311
[R VIII. 23]	(Familles libres d'un espace de matrices)	311

IX	Matrices	313
IX.1	Cours	313
IX.1.1	L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$	313
IX.1.2	Matrices et systèmes linéaires	317
IX.1.3	Matrices carrées	320
IX.1.4	Matrices carrées inversibles	322
IX.1.5	Matrice d'une application linéaire	323
IX.1.6	Changement de bases	325
IX.1.7	Noyau, image et rang d'une matrice	327
IX.1.8	Application aux systèmes linéaires	328
IX.1.9	Déterminants - généralités	329
IX.1.10	Calculs des déterminants	330
IX.1.11	Inversibilité d'une matrice, détermination de l'inverse	332
IX.2	Questions	333
IX.3	Éclairages	338
IX.4	Réponses	341
[R IX. 1]	(Méthodes pour déterminer l'inverse d'une matrice)	341
[R IX. 2]	(Des propriétés de la trace)	344

[R IX. 3]	(Projection)	345
[R IX. 4]	(Puissances de matrices et division euclidienne)	345
[R IX. 5]	(Suite récurrente)	347
[R IX. 6]	(Puissance de matrices)	347
[R IX. 7]	(Déterminant de Vandermonde)	349
[R IX. 8]	(Calculs de déterminants)	350
[R IX. 9]	(Étude d'un endomorphisme)	354
[R IX. 10]	(Rang de matrices)	355
[R IX. 11]	(Noyau de matrices)	356
[R IX. 12]	(Polynômes définis par récurrence)	357
[R IX. 13]	(Résolution d'une équation matricielle)	358
[R IX. 14]	(Calcul de déterminant)	359
[R IX. 15]	(Un automorphisme)	359
[R IX. 16]	($\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$)	360
[R IX. 17]	(Résolution d'une équation matricielle)	361
[R IX. 18]	(Résolution d'une équation matricielle)	361
[R IX. 19]	(Inverse d'une matrice de $M_n(\mathbb{C})$)	362
[R IX. 20]	(Inverse de matrice et polynôme)	363
[R IX. 21]	(Petite matrice circulante)	364
[R IX. 22]	(Des matrices rectangulaires)	364
[R IX. 23]	(Un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{K})$ et $(M_n(\mathbb{K}))^*$)	365
[R IX. 24]	(Formes linéaires de $M_n(\mathbb{K})$ en fonction de la trace)	366
X	Intégration	367
X.1	Cours	367
X.1.1	Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment	367
X.1.2	Intégrale d'une fonction continue sur un segment	368
X.1.3	Intégrale et primitive	371
X.1.4	Calculs d'intégrales	373
X.1.5	Formules de Taylor	375
X.2	Questions	375
X.3	Éclairages	380
X.4	Réponses	382
[R X. 1]	(Calculs de primitives de fonctions rationnelles)	382
[R X. 2]	(Calculs de primitives)	383
[R X. 3]	(Primitives de fonctions en sin et cos)	386
[R X. 4]	(Suites d'intégrales)	387
[R X. 5]	(Calculs de sommes de Riemann)	389
[R X. 6]	(Intégrale fonction des bornes 1)	390
[R X. 7]	(Intégrale fonction des bornes 2)	392
[R X. 8]	(Intégrale fonction des bornes 3)	393

[R X. 9] (Obtention d'encadrements)	395
[R X. 10] (Équivalent d'une fonction définie par une intégrale) .	397
[R X. 11] (Intégrales de Wallis)	397
[R X. 12] (Limites et intégrale)	398
[R X. 13] (Lemme de Lebesgue)	399
[R X. 14] (Calcul de $\zeta(2)$)	400
[R X. 15] (Un produit d'intégrale)	401
[R X. 16] (Intégrale d'une fonction périodique)	402
[R X. 17] (Équivalent d'une fonction définie par une intégrale) .	403
[R X. 18] (Nombre de zéros)	404
[R X. 19] (Lemme de Gronwall)	404
[R X. 20] (Majoration intégrale)	405
[R X. 21] (Inégalité intégrale)	406
XI Équations différentielles	407
XI.1 Cours	407
XI.1.1 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre	407
XI.1.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	409
XI.2 Questions	411
XI.3 Éclairages	412
XI.4 Réponses	413
[R XI. 1] (Équations différentielles linéaires d'ordre 1)	413
[R XI. 2] (Équations différentielles linéaires d'ordre 2)	416
[R XI. 3] (Un problème de Cauchy)	419
[R XI. 4] (Une inéquation différentielle)	420
XII Probabilités sur un univers fini	421
XII.1 Cours	421
XII.1.1 Dénombrement	421
XII.1.2 Espaces probabilisés	423
XII.1.3 Probabilité	424
XII.1.4 Probabilités conditionnelles	426
XII.1.5 Indépendance	427
XII.1.6 Variables aléatoires discrètes finies	429
XII.1.7 Couples de variables aléatoires	430
XII.1.8 Espérance d'une variable aléatoire discrète finie . .	432
XII.1.9 Variance d'une variable aléatoire réelle discrète finie	433
XII.1.10 Indépendance de variables aléatoires	435
XII.1.11 Variables aléatoires discrètes finies usuelles	437

XII.1.12	Inégalités probabilistes	440
XII.2	Questions	440
XII.3	Éclairages	449
XII.4	Réponses	452
[R XII. 1]	(Les dominos)	452
[R XII. 2]	(On ajoute des boules dans une urne)	453
[R XII. 3]	(Tirages conditionnés dans deux urnes)	455
[R XII. 4]	(La ruine d'un joueur)	456
[R XII. 5]	(Des unions d'intersections)	457
[R XII. 6]	(Couplage binomiale-binomiale)	458
[R XII. 7]	(Théorème de transfert)	460
[R XII. 8]	(Des fonctions de variables aléatoires)	460
[R XII. 9]	(Théorème de stabilité pour les lois binomiales)	462
[R XII. 10]	(Vidage d'une urne bicolore)	463
[R XII. 11]	(Indépendance de produits de variables)	465
[R XII. 12]	(Une autre formule pour l'espérance)	467
[R XII. 13]	(Stairway to heaven)	467
[R XII. 14]	(Les urnes de Laplace)	469
[R XII. 15]	(Problème de Monty Hall)	470
[R XII. 16]	(Exemple de dénombrement de retours à l'origine)	471
[R XII. 17]	(Un virus et des matrices)	472
[R XII. 18]	(La loi hypergéométrique)	474
[R XII. 19]	(Une relation de récurrence linéaire d'ordre 1)	475
[R XII. 20]	(Une urne bicolore)	477
[R XII. 21]	(La première urne qui sera pleine...)	478
[R XII. 22]	(Un intervalle de confiance 1)	480
[R XII. 23]	(Un intervalle de confiance 2)	480
[R XII. 24]	(Majoration d'une probabilité)	481
[R XII. 25]	(Probabilité d'avoir deux parties disjointes)	481
[R XII. 26]	(Indicatrice de l'heure)	482
[R XII. 27]	(Intersection de deux parties et loi de probabilité)	483
XIII	Espaces préhilbertiens réels	485
XIII.1	Cours	485
XIII.1.1	Produit scalaire	485
XIII.1.2	Orthogonalité	488
XIII.2	Questions	493
XIII.3	Éclairages	497
XIII.4	Réponses	499
[R XIII. 1]	(Produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$)	499
[R XIII. 2]	(Produit scalaire sur un espace de matrices)	499

[R XIII. 3] (Produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$)	500
[R XIII. 4] (Norme associée à un produit scalaire)	501
[R XIII. 5] (Caractérisations d'un projecteur orthogonal)	501
[R XIII. 6] (Le losange)	503
[R XIII. 7] (Des matrices symétriques)	503
[R XIII. 8] (Caractérisation d'une isométrie)	503
[R XIII. 9] (Trace et produit scalaire)	504
[R XIII. 10] (Inégalité de Bessel)	504
[R XIII. 11] (Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$)	505
[R XIII. 12] (Projection orthogonale sur un hyperplan)	506
[R XIII. 13] (Orthogonalité et opérations)	506
[R XIII. 14] (Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^4$)	507
[R XIII. 15] (Maximum sur la boule unité)	508
[R XIII. 16] (Des endomorphismes adjoints)	509
[R XIII. 17] (Un calcul de distance)	510
[R XIII. 18] (Polynômes de Legendre 1)	511
[R XIII. 19] (Polynômes de Legendre 2)	512
[R XIII. 20] (Endomorphisme antisymétrique)	512
[R XIII. 21] (Matrice de Gram)	514
[R XIII. 22] (Utilisation du déterminant de Gram)	515

XIV Séries numériques 517

XIV.1 Cours	517
XIV.1.1 Généralités	517
XIV.1.2 Séries de référence	520
XIV.1.3 Séries à termes positifs	521
XIV.1.4 Comparaisons séries-intégrales	522
XIV.1.5 Étude des séries complexes ou de signe quelconque	523
XIV.1.6 Séries alternées	524
XIV.2 Questions	524
XIV.3 Éclairages	528
XIV.4 Réponses	530
[R XIV. 1] (Natures de séries)	530
[R XIV. 2] (Cas où l'équivalent n'est pas de signe constant)	533
[R XIV. 3] (Calculs de sommes)	534
[R XIV. 4] (Série harmonique)	537
[R XIV. 5] (Série harmonique alternée)	537
[R XIV. 6] (Nature et somme d'une série alternée)	538
[R XIV. 7] (Calculs de sommes)	539
[R XIV. 8] (Formule du binôme négatif)	540
[R XIV. 9] (Ersatz de la formule de Stirling)	542

[R XIV. 10] (Transformation d'Abel)	543
[R XIV. 11] (Somme irrationnelle d'une série de rationnels) . . .	545
[R XIV. 12] (Domination des sommes partielles)	546
[R XIV. 13] (Nature et somme d'une série)	547
[R XIV. 14] (Un critère de convergence)	548
[R XIV. 15] (Nouveau critère de convergence)	549
[R XIV. 16] (Exemple de suite récurrente)	550
[R XIV. 17] (Série associée à une suite implicite)	551
[R XIV. 18] (Théorème d'Abel)	551
XV Fonctions de deux variables	553
XV.1 Cours	553
XV.1.1 Topologie de $\mathbb{R}^2$	553
XV.1.2 Graphe et lignes de niveau	554
XV.1.3 Dérivées partielles	554
XV.1.4 Règle de la chaîne	558
XV.1.5 Extremum	558
XV.2 Questions	559
XV.3 Éclairages	561
XV.4 Réponses	561
[R XV. 1] (Points critiques - Plans tangents)	561
[R XV. 2] (Dérivée directionnelle)	562
[R XV. 3] (Recherche de points critiques)	563
[R XV. 4] (Nature de points critiques)	563
[R XV. 5] (Image d'une fonction)	564
[R XV. 6] (Fonctions homogènes)	565
[R XV. 7] (Recherche d'extrema)	566
Index	567

Chapitre I

Ensembles et raisonnements

I.1 - Cours

I.1.1 - Rudiments de logique

[Définition I.1] Proposition mathématique

On appelle **proposition** ou **assertion** mathématique un énoncé susceptible de prendre la valeur *vrai* ou la valeur *faux*.

♥ *Une proposition mathématique est toujours soit vraie soit fausse (logique dite du « tiers exclu »).*

[Définition I.2] Négation - Conjonction - Disjonction

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

(–) On appelle **négation de P** la proposition « Non P » qui est fausse si et seulement si P est vraie. On la note aussi $\neg P$.

(–) La **disjonction de P et Q** , notée « P ou Q » ou « $P \vee Q$ » est une proposition vraie si et seulement si l'une au moins des propositions P et Q est vraie.

(–) La **conjonction de P et Q** notée « P et Q » ou « $P \wedge Q$ » est une proposition vraie si et seulement si les propositions P et Q sont vraies.

[Définition I.3] Implication - Contraposition d'une implication

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

(–) P **implique** Q (ou si P alors Q) est la proposition mathématique notée $P \implies Q$ définie par (non P) ou Q .

Si $P \implies Q$ est vraie, on dit alors que P est une **condition suffisante** pour avoir Q ou que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P .

(–) La proposition (non(Q) $\implies$ non(P)) est la **contraposée** de ($P \implies Q$).

[Définition I.4] Équivalence

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

(-) P **équivalent à** Q (ou P si et seulement si Q) est la proposition notée $P \iff Q$ définie par $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$.

Si $P \iff Q$ est vraie, on dit alors que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q .

(-) On a : $(P \implies Q) \iff (\text{non}(Q) \implies \text{non}(P))$.

⚠ On ne doit pas employer les symboles $\implies$ et $\iff$ comme des abréviations. Par exemple $\implies$ ne remplace pas le mot « donc ».

On écrit $P \implies Q$ pour signifier que « si P est vraie alors Q est vraie ». Il est maladroit d'écrire $P \implies Q$ lorsque l'on sait que P est vraie. Dans ce cas mieux vaut écrire en toutes lettres « on sait que P est vraie, on en déduit donc que Q est vraie ».

[Propriété I.5] Règles de calcul

Soit P , Q et R trois propositions mathématiques.

(-) Associativité : $(P \text{ et } Q) \text{ et } R$ est la proposition $P \text{ et } (Q \text{ et } R)$.

$(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$ est la proposition $P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$.

(-) Distributivité : $P \text{ ou } (Q \text{ et } R)$ est la proposition $(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$.

$P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$ est la proposition $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$.

(-) Négation : $\text{non}(\text{non } P)$ est la proposition P .

La proposition $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ est la proposition $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$.

La proposition $\text{non}(P \text{ et } Q)$ est la proposition $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$.

La proposition $\text{non}(P \implies Q)$ est la proposition $(P \text{ et } \text{non}(Q))$.

Autrement dit $(P \implies Q)$ est fausse si P est vraie et pourtant Q est fausse.

I.1.2 - Quantificateurs

Soit x une indéterminée appartenant à un ensemble E connu. On note $P(x)$ une proposition mathématique qui dépend de x .

[Définition I.6] Le quantificateur existentiel : $\exists$

(-) S'il existe **au moins** un élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie, on écrit : $\exists x \in E, P(x)$ et on lit : « il existe x dans E tel que $P(x)$ ».

(-) S'il existe **un unique** élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie, on écrit : $\exists! x \in E, P(x)$ et on lit : « il existe un unique x dans E tel que $P(x)$ ».

[Définition I.7] Le quantificateur universel : $\forall$

Si, pour tous les éléments de E , la proposition $P(x)$ est vraie, on écrit : $\forall x \in E, P(x)$ et on lit : « **quel que soit** (ou **pour tout** ou **pour chaque**) x appartenant à E , $P(x)$ ».

✎ *Le quantificateur est toujours placé **avant** la proposition qu'il quantifie.*

D'autre part l'ordre des quantificateur est fondamental :

$\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y)$: ici x ne dépend pas de y .

$\forall y \in E, \exists x \in E, P(x, y)$: ici x peut a priori dépendre de y .

I.1.3 - Raisonnements par récurrence

Il s'agit d'établir qu'une proposition $P(n)$ qui dépend de l'entier naturel n est vraie pour tous les entiers n tels que $n \geq n_0$.

[Propriété I.8] Récurrence simple

- (–) Initialisation : on montre que la propriété $P(n_0)$ est vraie.
- (–) Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier n fixé quelconque, $n \geq n_0$. On démontre alors que $P(n+1)$ est vraie.
- (–) Conclusion : la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

♥ Voir les exercices : [Q I.1 p. 31], [Q I.12 p. 33]

[Propriété I.9] Récurrence double

- (–) Initialisation : on montre que les propriétés $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies.
- (–) Hérédité : on suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un entier n fixé quelconque, $n \geq n_0$. On démontre alors que $P(n+2)$ est vraie.
- (–) Conclusion : la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

♥ Voir l'exercice : [Q I.2 p. 31]

[Propriété I.10] Récurrence forte

Pour l'hérédité, on suppose que la propriété est vraie pour tous les entiers compris entre n_0 et n et on la démontre pour $n+1$.

- (–) Initialisation : on montre que la propriété $P(n_0)$ est vraie.
- (–) Hérédité : on suppose que $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)$ sont vraies pour un entier $n \geq n_0$ fixé quelconque. On démontre alors que $P(n+1)$ est vraie.
- (–) Conclusion : la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

♥ Voir les exercices : [Q I.3 p. 31], [Q I.5 p. 31], [Q I.6 p. 31]

✎ On peut aussi envisager des récurrences descendantes ou des récurrences finies.

Si lors de l'hérédité on n'a pas utilisé l'hypothèse de récurrence, c'est qu'il n'y a pas lieu de réaliser une récurrence.

I.1.4 - Autres raisonnements

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

[Propriété I.11] Déduction - Double implication

(-) Raisonnement par déduction :

si P est vraie et si $P \implies Q$ alors Q est vraie.

(-) Raisonnement par double implication : pour montrer que $P \iff Q$ on peut commencer par montrer que $P \implies Q$ puis montrer que $Q \implies P$.

[Propriété I.12] Le raisonnement par disjonction de cas

On étudie tous les cas de figure.

Si $Q \implies P$ est vraie et si $\text{non}(Q) \implies P$ est vraie alors P est vraie.

♥ Voir l'exercice : [Q I.5 p. 31]

[Propriété I.13] Le raisonnement par l'absurde

Pour établir que $P \implies Q$ est vraie, on suppose que P est vraie et que Q est fausse, puis on montre que cela conduit à une contradiction.

♥ On utilise par exemple ce type de raisonnement pour montrer qu'un certain objet n'existe pas. On suppose qu'il en existe un et l'on aboutit à une contradiction.

[Propriété I.14] Le raisonnement par analyse-synthèse

Ce raisonnement est souvent utilisé quand on demande de prouver l'existence (ou la non existence) de solutions à un problème donné (et d'identifier la ou les solutions éventuelles). Ce raisonnement se déroule en 3 étapes :

- L'analyse : on suppose que le problème admet des solutions et on procède par **conditions nécessaires** permettant d'accumuler suffisamment de renseignements pour dégager un ou plusieurs « candidats solutions ».
- La synthèse : on vérifie si les « candidats solutions » sont **effectivement** solutions du problème.
- Conclusion : on donne la ou les solutions du problème s'il y en a.

♥ Voir les exercices : [Q I.4 p. 31], [Q I.5 p. 31]

I.1.5 - Ensembles

[Définition I.15] Appartenance - Inclusion - Parties

Soit F et E des ensembles.

(–) $x \in E$ signifie : x est un élément de E c'est-à-dire x appartient à E .

Si x n'est pas un élément de E , on écrit $x \notin E$.

(–) On admet l'existence d'un ensemble qui ne contient aucun élément. Il est appelé **ensemble vide** et est noté $\emptyset$.

(–) On dit que F est inclus dans E si tout élément de F est aussi dans E et l'on note $F \subset E$. Donc $F \subset E$ équivaut à $\forall x \in F, x \in E$.

L'ensemble F est alors **une partie** de E , **un sous-ensemble** de E .

(–) **L'ensemble des parties** de E est notée $\mathcal{P}(E)$. C'est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E . Un sous-ensemble est donc un élément de $\mathcal{P}(E)$. Autrement dit : $F \subset E \iff F \in \mathcal{P}(E)$.

(–) Soit A et B deux parties de l'ensemble E .

La **réunion** de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$.

Il est défini par : $A \cup B = \left\{ x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B \right\}$.

L'**intersection** de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$.

Il est défini par : $A \cap B = \left\{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B \right\}$

(–) Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble noté $\overline{A}$ ou $E \setminus A$ ou

A^c . Il est défini par : $\overline{A} = \left\{ x \in E \mid x \notin A \right\}$.

(–) La **différence** de A et B est l'ensemble noté $A \setminus B$.

Il est défini par : $A \setminus B = \left\{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B \right\} = A \cap \overline{B}$.

[Propriété I.16] Opérations sur les ensembles

Soit A , B et C des parties de l'ensemble E .

(–) $E \setminus (E \setminus A) = A$.

(–) Commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.

(–) Associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(–) Distributivité :

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(–) Lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

♥ Pour prouver l'égalité des ensembles A et B , on procède souvent par double inclusion. On prouve $A \subset B$ puis $B \subset A$. [Q I.11 p. 32]

[Définition I.17] Produit cartésien

Soit E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E par F est noté $E \times F$ et est défini par : $E \times F = \left\{ (a, b) \mid a \in E \text{ et } b \in F \right\}$.

Les éléments de $E \times F$ sont des couples dans lesquels l'ordre intervient : $(a, b) \neq (b, a)$ si et seulement si $a \neq b$.

(-) Si $E = F$ on note $E \times E = E^2$.

(-) Généralisation : soit $E, E_1, E_2, \dots, E_n$, des ensembles :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \iff x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n.$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \iff x_1 \in E, x_2 \in E, \dots, x_n \in E.$$

[Définition I.18] Partition d'un ensemble

Soit I une partie de $\mathbb{N}$. On appelle **partition** d'un ensemble E toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E vérifiant :

i) $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$.

ii) $\forall (i, j) \in I^2$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.

iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

I.1.6 - Applications

Conformément au programme, nous ne distinguerons pas les notions de fonction et d'application.

Soit E et F des ensembles.

[Définition I.19] Application - Fonction

Une **application (ou fonction)** de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F qui s'appelle **l'image par f de x** .

On notera : $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto f(x)$.

L'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .

L'ensemble $\left\{ (x, f(x)) \mid x \in E \right\}$ s'appelle le **graphe** de la fonction f .

En particulier, $\text{id}_E : E \longrightarrow E, x \longmapsto x$ est la **fonction identité** de E .

Si $y \in F$, on appelle **antécédent de y** , tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Il peut exister 0, 1 ou plusieurs antécédents d'un élément $y \in F$.

[Définition I.20] Famille d'éléments de E

Soit I un ensemble fini. On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** toute application de I dans E . On note $(x_i)_{i \in I}$ cette famille.

[Définition I.21] Fonction indicatrice

Soit A une partie de E . On appelle **fonction indicatrice de A** la fonction de E dans $\{0, 1\}$ notée $\mathbb{1}_A$ définie par $\mathbb{1}_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

♥ Voir les exercices : [Q I.10 p. 32], [Q I.11 p. 32]

[Définition I.22] Restriction - Prolongement

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, soit A une partie de E et E' un ensemble tel que $E \subset E'$.
 (–) On appelle **restriction** de f à A la fonction notée $f|_A$ définie par :

$$f|_A : A \longrightarrow F, x \longmapsto f(x).$$

(–) On appelle **prolongement** de f à E' toute fonction $g : E' \mapsto F$

$$\text{telle que : } \forall x \in E, g(x) = f(x).$$

[Propriété I.23] Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si elles ont le même ensemble de départ (noté E), le même ensemble d'arrivée et vérifient : $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

[Définition I.24] Image directe et image réciproque d'une partie

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, soit A une partie de E et soit B une partie de F .

(–) **L'image directe de A par f** est le sous-ensemble de F noté $f(A)$ défini par : $f(A) = \left\{ f(x) \mid x \in A \right\} = \left\{ y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x) \right\}$.

C'est l'ensemble des images des éléments de A par la fonction f .

(–) **L'image réciproque de B par f** est le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ défini par : $f^{-1}(B) = \left\{ x \in E \mid f(x) \in B \right\}$.

C'est l'ensemble des antécédents des éléments de B .

♥ Voir l'exercice : [Q I.7 p. 32]

[Définition I.25] Composition

Soit E, F et G des ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

La fonction « f suivie de g » est une fonction de E dans G qui s'appelle la **composée** de f par g .

Notée $g \circ f$, elle est définie par : $g \circ f : E \longrightarrow G, x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

[Définition I.26] Injection, surjection, bijection, réciproque

Soit E et F des ensembles et soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

(–) La fonction f est une **injection** (ou est **injective**) si et seulement si : $\forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x') \implies x = x')$.

(–) La fonction f est une **surjection** (ou est **surjective**) si et seulement si : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

(–) La fonction f est une **bijection** (ou est **bijjective**) si et seulement si elle est injective et surjective, c'est-à-dire : $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

(–) Lorsque la fonction f est bijective, on définit sa **fonction réciproque** notée f^{-1} . Elle appartient à $\mathcal{F}(F, E)$ et vérifie :

$$\forall y \in F, \forall x \in E, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

♥ La fonction f est injective si et seulement si tout élément de F a au plus un antécédent dans E . Autrement dit, des éléments distincts de E ont des images distinctes : $\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$.

♥ La fonction f est surjective si et seulement si tout élément de F a au moins un antécédent dans E .

♥ La fonction f est bijective si et seulement si tout élément de F admet exactement un antécédent dans E .

♥ Voir les exercices : [Q I.7 p. 32], [Q I.8 p. 32], [Q I.9 p. 32]

[Propriété I.27] Composition d'injections ou de surjections

(–) La composée de deux injections est une injection.

(–) La composée de deux surjections est une surjection.

[Propriété I.28] Étude des bijections

Soit E, F et G des ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

(–) Si les fonctions f et g sont bijectives, alors la fonction $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(–) La fonction f est bijective si et seulement s'il existe une fonction $h \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $h \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ h = \text{id}_F$. Alors $h = f^{-1}$.

I.1.7 - Ensembles de nombres usuels

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

[Définition I.29] Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

La relation $\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$. Autrement dit :

- i) elle est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$,
- ii) elle est antisymétrique : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y$,
- iii) elle est transitive : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$,
- iv) l'ordre est total : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. On définit alors les ensembles :

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & ; & \quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & ; & \quad]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

[Définition I.30] L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

- (-) $\mathbb{N}$ est muni de la relation d'ordre $\leq$ induite par celle de $\mathbb{R}$.
- (-) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- (-) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

[Définition I.31] L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

- (-) L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ est muni de la relation d'ordre $\leq$ induite par celle de $\mathbb{R}$.
- (-) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
- (-) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \leq b$. On définit alors les ensembles :

$$[[a, b]] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{et} \quad [[a, +\infty[[= \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x\}.$$

[Définition I.32] Divisibilité, diviseur, multiple

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

On dit que b **divise** a si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$.

On dit alors que b est un **diviseur** de a et a est un **multiple** de b .

♥ Voir l'exercice : [Q I.12 p. 33]

[Propriété I.33] Division euclidienne

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

On dit que q est le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne.

On en déduit que b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

[Définition I.34] Congruence

(-) Dans $\mathbb{Z}$: soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On dit que a **est congru à b modulo n** et l'on note $a \equiv b \ [n]$ si et seulement si n divise $b - a$.

(-) Dans $\mathbb{R}$: soit θ_1, θ_2 et a trois nombres réels. On dit que θ_1 **est congru à θ_2 modulo a** et l'on note $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [a]$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_2 - \theta_1 = ka$.

[Propriété I.35] Calculs avec les congruences

(-) La relation de congruence vérifie :

- i) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \theta \equiv \theta \ [a]$,
- ii) $\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \forall a \in \mathbb{R}, (\theta_1 \equiv \theta_2 \ [a]) \implies (\theta_2 \equiv \theta_1 \ [a])$,
- iii) elle est transitive : $\forall (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3, \forall a \in \mathbb{R} :$
 $(\theta_1 \equiv \theta_2 \ [a])$ et $(\theta_2 \equiv \theta_3 \ [a]) \implies (\theta_1 \equiv \theta_3 \ [a])$.

On dit que c'est une relation d'équivalence.

(-) Règles de calcul dans $\mathbb{Z}$.

Soit $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$ et a des éléments de $\mathbb{Z}$ vérifiant : $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [a]$ et $\phi_1 \equiv \phi_2 \ [a]$.

Alors on a :

- i) $\theta_1 + \phi_1 \equiv \theta_2 + \phi_2 \ [a]$,
- ii) $\theta_1 \phi_1 \equiv \theta_2 \phi_2 \ [a]$,
- iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \theta_1^k \equiv \theta_2^k \ [a]$.

(-) Règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

Soit $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$ et a des réels vérifiant : $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [a]$ et $\phi_1 \equiv \phi_2 \ [a]$.

Alors on a :

- i) $\theta_1 + \phi_1 \equiv \theta_2 + \phi_2 \ [a]$,
- ii) $\forall r \in \mathbb{R}, r\theta_1 \equiv r\theta_2 \ [ra]$.

♥ Voir l'exercice : [Q I.12 p. 33]

[Définition I.36] PGCD, PPCM

(-) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, l'un au moins de ces nombres étant non nul. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est non vide et majoré donc possède un plus grand élément appelé **PGCD(a, b) : plus grand commun diviseur à a et b** . On le note aussi $a \wedge b$ et l'on a : $a \wedge 0 = a$.

On convient de plus que $\text{PGCD}(0, 0) = 0$.

(-) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que a et b sont non nuls. L'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b est non vide et minoré donc possède un plus petit élément appelé **PPCM(a, b) : plus petit commun multiple à a et b** . On le note aussi $a \vee b$ et l'on a : $a \vee 0 = 0$.

[Propriété I.37] Algorithme d'Euclide : recherche du PGCD

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $b \leq a$.

(–) Si b divise a alors $\text{PGCD}(a, b) = b$.

(–) Si b ne divise pas a .

Par division euclidienne il existe un unique couple $(q_1, r_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$a = bq_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < b$ et l'on a : $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r_1)$.

Par itération du procédé, on construit les couples $(q_1, r_1), (q_2, r_2), \dots$ tels que $0 < \dots < r_2 < r_1$. Ce procédé s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes et le $\text{PGCD}(a, b)$ est le dernier reste non nul.

[Définition I.38] Nombres premiers, premiers entre eux

Un entier naturel $p \geq 2$ est dit **premier** s'il a exactement deux diviseurs.

Deux entiers naturels n et p sont dit **premiers entre eux** si $\text{PGCD}(n, p) = 1$.

En conséquence deux nombres premiers distincts ont 1 pour PGCD et sont premiers entre eux.

♥ Voir l'exercice : [Q I.12 p. 33]

[Propriété I.39] Décomposition en produit de nombres premiers

(–) Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en produit de nombres premiers, unique à l'ordre près des facteurs.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$, des nombres premiers $p_1, \dots, p_N$ deux à deux distincts et des entiers non nuls $r_1, \dots, r_N$ tels que :

$$n = p_1^{r_1} \times \dots \times p_N^{r_N} = \prod_{i=1}^N p_i^{r_i}.$$

(–) Si $p \notin \{p_1, \dots, p_N\}$, on peut écrire : $n = p^0 \times \prod_{i=1}^N p_i^{r_i}$.

[Propriété I.40] Application au PGCD et au PPCM

Soit a et b des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$, des nombres premiers $p_1, \dots, p_N$ deux à deux distincts et des entiers $r_1, \dots, r_N$

et $s_1, \dots, s_N$ tels que : $a = \prod_{i=1}^N p_i^{r_i}$ et $b = \prod_{i=1}^N p_i^{s_i}$.

Alors on a : $\text{PGCD}(a, b) = \prod_{i=1}^N p_i^{\min(r_i, s_i)}$ et $\text{PPCM}(a, b) = \prod_{i=1}^N p_i^{\max(r_i, s_i)}$.

[Propriété I.41] Ensemble des nombres premiers

L'ensemble des nombres premiers est infini.

[Définition I.42] Nombres décimaux

L'ensemble $\left\{ a \times 10^{-n} \mid (a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ est appelé **ensemble des nombres décimaux**. Ce sont les nombres qui admettent une écriture décimale finie, c'est-à-dire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

[Définition I.43] Nombres rationnels

L'ensemble $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$ est appelé **ensemble des nombres rationnels**.

[Définition I.44] Nombres réels, nombres irrationnels

L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est appelé **ensemble des nombres irrationnels**. En particulier $\sqrt{2}$, π et e sont irrationnels.

I.1.8 - Dénombrement

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\llbracket 1, n \rrbracket = \{1, \dots, n\}$.

[Définition I.45] Cardinal d'un ensemble fini

(-) Un ensemble non vide E est dit **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de E dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Dans ce cas, l'entier naturel n est unique et est appelé le **cardinal de** E . On notera $\text{card}(E) = n$. On peut aussi noter $|E| = n$.

(-) On convient que $\text{card}(\emptyset) = 0$.

(-) Soit E et F deux ensembles finis. Les ensembles E et F sont **disjoints** si et seulement si $\text{card}(E \cap F) = 0$.

[Propriété I.46] Cardinal d'une partie d'un ensemble fini

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble fini E .

(-) On a $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.

(-) $A = E$ si et seulement si $\text{card}(A) = \text{card}(E)$.

[Propriété I.47] Cardinaux et applications

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E vers F .

(–) Si f est injective alors $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.

(–) Si f est surjective alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$.

(–) Si f est bijective alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

(–) Si $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ alors :

$$(f \text{ injective}) \iff (f \text{ surjective}) \iff (f \text{ bijective}).$$

(–) On a : $\text{card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}$.

♥ Une méthode efficace et rigoureuse pour trouver le cardinal d'un ensemble A , c'est de trouver une bijection de A vers un ensemble de cardinal connu.

[Propriété I.48] Opération sur les cardinaux

Soit E et F deux ensembles finis. Soit A une partie de E .

(–) $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

(–) $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$.

(–) Si E et F sont disjoints, on a $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$.

(–) $\text{card}(E \setminus A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.

Généralisation. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_p$ p ensembles finis.

(–) $\text{card}(E_1 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \dots \times \text{card}(E_p)$.

(–) Si de plus les ensembles $E_1, \dots, E_p$ sont deux à deux disjoints on a :

$$\text{card}(E_1 \cup \dots \cup E_p) = \text{card}(E_1) + \dots + \text{card}(E_p).$$

(–) En particulier si $(A_1, \dots, A_p)$ est une partition de l'ensemble fini E :

$$\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_p) = \text{card}(E).$$

♥ Voir l'exercice : [Q I.13 p. 33], [Q I.16 p. 33]

[Définition I.49] p -listes

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **p -liste ou p -uplet d'éléments de E** tout élément $(a_1, \dots, a_p)$ de E^p .

Dans cet élément, l'ordre compte et il peut y avoir des répétitions d'un ou plusieurs éléments.

[Propriété I.50] Dénombrement de p -listes

On note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$. On a : $0! = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E un ensemble fini de cardinal n .

(–) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p -listes d'éléments de E est n^p .

(–) Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Le nombre de p -listes d'éléments distincts de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

(–) Conséquence : le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ dans un ensemble de cardinal n est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

[Propriété I.51] Permutations

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n .

Une **permutation de E** est une bijection de E dans lui-même.

Le nombre de permutations de E est $n!$ qui est aussi le nombre de bijections de E vers E ou encore le nombre de n -listes d'éléments distincts de E .

[Définition I.52] Combinaisons

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n . Soit $p \in \mathbb{N}$.

Une **p -combinaison d'éléments de E** est une partie de E à p éléments.

♥ Voir les exercices : [Q I.14 p. 33], [Q I.16 p. 33]

[Propriété I.53] Nombre de combinaisons - Nombre de parties

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n . Soit $p \in \mathbb{N}$.

(–) Le nombre de p -combinaisons est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

(–) Le nombre de parties de E à p éléments est donc $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

(–) Le nombre de parties de E est donc $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$.

♥ Voir les exercices : [Q I.12 p. 33], [Q I.13 p. 33], [Q I.14 p. 33]
[Q I.15 p. 33], [Q I.16 p. 33]

I.2 - Questions

[Question I.1] Pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $a_k = k(k+1)(k+2)$ et $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{(n+3)!}{4(n-1)!}$.

(Éclairage page 34, Réponse page 35)

[Question I.2] On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation : $u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n]$.

(Éclairage page 34, Réponse page 36)

[Question I.3] On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2 + 1} (u_1 + 2u_2 + \cdots + (k+1)u_k + \cdots + nu_{n-1})$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$. (Éclairage page 34, Réponse page 36)

[Question I.4] On dit qu'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire (respectivement impaire) si : $\forall x \in I$, $(-x) \in I$ et $f(-x) = f(x)$ (respectivement : $\forall x \in I$, $(-x) \in I$ et $f(-x) = -f(x)$).

On note P (respectivement I) le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formé des fonctions paires (respectivement impaires).

Montrer que toute fonction f de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

(Éclairage page 34, Réponse page 37)

[Question I.5] Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissantes telles que : $f(2) = 2$ et pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $f(pq) = f(p)f(q)$.

(Éclairage page 34, Réponse page 38)

[Question I.6] Montrer le résultat de cours [P I.40 p.27] : « tout entier de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$ s'écrit comme le produit d'un ou plusieurs nombres premiers ».

(Éclairage page 34, Réponse page 38)

[Question I.7] Soit E, F deux ensembles, A et A' des parties de E , H une partie de F et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Montrer les propositions suivantes.

- (-) $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- (-) $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$ si et seulement si f est injective.
- (-) $f(f^{-1}(H)) \subset H$.
- (-) $\forall H \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(H)) = H$ si et seulement si f est surjective.
- (-) f est injective si et seulement si $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
- (-) f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$.

(Éclairage page 34, Réponse page 39)

[Question I.8] Soit $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + y, 5x + 3y)$ et soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|g(x) - g(y)| \geq |x - y|$.

- (-) Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

(-) Montrer que g est injective. (Éclairage page 34, Réponse page 40)

[Question I.9] Soit E, F et G trois ensembles et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}(G, E)$. Montrer les implications suivantes.

- (-) $g \circ f$ est injective $\implies f$ est injective.
- (-) $g \circ f$ est surjective $\implies g$ est surjective.
- (-) $g \circ f$ est surjective et g injective $\implies f$ est surjective.
- (-) $g \circ f$ est injective et f surjective $\implies g$ est injective.
- (-) $h \circ g \circ f$ et $f \circ h \circ g$ injectives et $g \circ f \circ h$ surjective $\implies f, g$ et h sont bijectives.

(Éclairage page 34, Réponse page 41)

[Question I.10] Soit A, B deux parties d'un ensemble E . Montrer que

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B ; \quad \mathbb{1}_{E \setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A ; \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}.$$

(Éclairage page 35, Réponse page 42)

[Question I.11] Soit E, F deux ensembles. On note

$$E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F).$$

Pour A, B et C trois parties de E , montrer que : $A \Delta C = B \Delta C \iff A = B$.

(Éclairage page 35, Réponse page 43)

[Question I.12] Montrer que si p est un nombre premier, alors pour tout entier k tel que $0 < k < p$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p .

En déduire que si p est premier et a non divisible par p alors :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

(Éclairage page 35, Réponse page 43)

[Question I.13] Soit m, n et p des entiers naturels tels que $p \leq n + m$. Par un double décompte, établir :

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$

(Éclairage page 35, Réponse page 44)

[Question I.14] Soit E ensemble fini de cardinal $\text{card}(E) = n$. Déterminer le nombre de couples (X, Y) de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$.

(Éclairage page 35, Réponse page 44)

[Question I.15] Soit n, p et k des entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$. Montrer par dénombrement les deux formules suivantes.

(–) Formule des représentants : $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}.$

(–) Formule du capitaine : si $p \in \mathbb{N}^*$: $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$

(Éclairage page 35, Réponse page 45)

[Question I.16] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(–) Déterminer le nombre de suites strictement croissantes de p entiers pris dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(–) Déterminer le nombre de suites croissantes de p entiers pris dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(Éclairage page 35, Réponse page 46)

I.3 - Éclairages

[Éclairage I.1] Le résultat qui dépend de l'indice entier n est donné. On peut donc envisager une récurrence. *(Réponse page 35)*

[Éclairage I.2] Le résultat qui dépend de l'indice entier n est donné et la relation qui détermine le terme suivant dépend des deux termes précédents. On peut donc envisager une récurrence double. *(Réponse page 36)*

[Éclairage I.3] Le résultat qui dépend de l'indice entier n est donné, mais la relation qui détermine le terme suivant dépend de tous les termes précédents. On peut donc envisager une récurrence forte. *(Réponse page 36)*

[Éclairage I.4] On pourra envisager un raisonnement par analyse-synthèse. *(Réponse page 37)*

[Éclairage I.5] On pourra envisager un raisonnement par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse, on pourra penser à réaliser une récurrence forte et travailler par disjonction de cas. *(Réponse page 38)*

[Éclairage I.6] On pourra penser à réaliser une récurrence forte et travailler par disjonction de cas. *(Réponse page 38)*

[Éclairage I.7] Pour montrer qu'un ensemble U est inclus dans un ensemble V , on peut montrer que : $\forall x \in U, x \in V$.
Pour montrer que $U = V$ on peut justifier successivement $U \subset V$ puis $V \subset U$. Soit $f : U \longrightarrow V$ une fonction. Pour justifier que f est injective, on montre en général que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$. Pour justifier que f est surjective, on montre en général que : $\forall y \in V, \exists x \in U, y = f(x)$. *(Réponse page 39)*

[Éclairage I.8] Pour justifier qu'une fonction $f : U \longrightarrow V$ est injective, on montre en général que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$, et pour justifier qu'elle est bijective, on peut prouver que : $\forall y \in V, \exists ! x \in U, y = f(x)$. *(Réponse page 40)*

[Éclairage I.9] Pour justifier qu'une fonction $f : U \longrightarrow V$ est injective, on montre en général que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$, et pour justifier qu'elle est surjective, on montre en général que : $\forall y \in V, \exists x \in U, y = f(x)$. *(Réponse page 41)*

[Éclairage I.10] Voir la définition des fonctions indicatrices [D I.21 p.23].
(Réponse page 42)

[Éclairage I.11] On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent.
(Réponse page 43)

[Éclairage I.12] On pourra utiliser la formule du capitaine [Q I.15 p. 33] et le lemme de Gauss : soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, si $\text{PGCD}(a, b) = 1$ et si a divise bc alors a divise c , puis la formule du binôme [P II.10 p.50]. (Réponse page 43)

[Éclairage I.13] Si A est un ensemble avec $\text{card}(A) = n$, B est un ensemble avec $\text{card}(B) = m$ et $A \cap B = \emptyset$, dénombrer de deux façons les parties à p éléments de $A \cup B$.
(Réponse page 44)

[Éclairage I.14] On pourra utiliser la formule du binôme [P II.10 p.50].
(Réponse page 44)

[Éclairage I.15] On pourra utiliser une population de n individus et déterminer de deux façons le nombre d'équipes de p personnes ayant k représentants.
(Réponse page 45)

[Éclairage I.16] Pour les suites croissantes, on pourra associer à une suite donnée un mot constitué avec deux types de caractères et dénombrer le nombre de mots possibles.
(Réponse page 46)

I.4 - Réponses

[Réponse I.1] (Récurrence simple)

(Relire la question : page 31, le cours : [P I.8 p.19])

Montrons par récurrence que la propriété $P(n) : \ll S_n = \frac{(n+3)!}{4(n-1)!} \gg$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(-) $S_1 = 1 \times 2 \times 3 = 6$ et $\frac{(1+3)!}{4(1-1)!} = \frac{4!}{4 \times 1} = 3! = 6$. Donc $P(1)$ est vraie.

(-) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $P(n)$ est vérifiée.

$$S_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2)(n+3).$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $S_{n+1} = \frac{(n+3)!}{4(n-1)!} + \frac{(n+3)!}{n!}$.

Par réduction au même dénominateur on obtient :

$$S_{n+1} = \frac{(n+3)!(n+4)}{4n!} = \frac{(n+1+3)!}{4(n+1-1)!}. \text{ Donc } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

(-) D'après le principe de récurrence simple [P I.8 p.19] on a :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{(n+3)!}{4(n-1)!}$.

[Réponse I.2]

(Récurrence double)

(Relire la question : page 31, le cours : [P I.9 p.19])

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation : $u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n$.

Montrons que la propriété $P(n) : \ll u_n = \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n] \gg$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide d'une récurrence double.

(-) $\frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^0 + (2 - \sqrt{3})^0] = 1 = u_0$ donc $P(0)$ est vérifiée.

$\frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^1 + (2 - \sqrt{3})^1] = 2 = u_1$ donc $P(1)$ est vérifiée.

(-) Soit n un entier non nul fixé quelconque. Supposons que $P(n)$ et $P(n-1)$ sont vraies. On a $u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$ d'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = 2 [(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n] - \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^{n-1} + (2 - \sqrt{3})^{n-1}] \text{ donc}$$

$$u_{n+1} = (2 + \sqrt{3})^{n-1} \left(4 + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) + (2 - \sqrt{3})^{n-1} \left(4 - 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) \text{ d'où}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3})^{n-1} (7 + 4\sqrt{3}) + \frac{1}{2} (2 - \sqrt{3})^{n-1} (7 - 4\sqrt{3}). \text{ On en déduit}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3})^{n-1} (2 + \sqrt{3})^2 + \frac{1}{2} (2 - \sqrt{3})^{n-1} (2 - \sqrt{3})^2. \text{ C'est-à-dire}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3})^{n+1} + \frac{1}{2} (2 - \sqrt{3})^{n+1}. \text{ Donc } P(n+1) \text{ est vérifiée.}$$

(-) D'après le principe de récurrence double [P I.9 p.19] on a :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n]$.

[Réponse I.3]

(Récurrence forte)

(Relire la question : page 31, le cours : [P I.10 p.19])

Notons $P(n)$ la propriété « $0 \leq u_n \leq 1$ ». Montrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide d'une récurrence forte.