



T^{le}

LA **PHYSIQUE** DES **OLYMPIADES** **INTERNATIONALES**

- 400 exercices d'entraînement avec corrigés détaillés
- un cours complet pour s'initier à la physique du supérieur
- des compléments et conseils sur www.physica.fr

Matthieu QUÉVAL

2^e édition



ellipses

T^{le}

LA PHYSIQUE DES OLYMPIADES INTERNATIONALES

2^e édition

Matthieu QUÉVAL

Professeur en MP au lycée Claude Gellée (Épinal)



Du même auteur, chez le même éditeur

Physique-Chimie Terminale - Cours approfondi et préparation au Concours général et aux Olympiades de Physique et de Chimie, 336 pages, 2019.

ISBN 9782340-116665

Dépôt légal : juillet 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cette deuxième édition, revue et enrichie, intègre de nouveaux exercices, des schémas améliorés et une mise en page optimisée pour faciliter la lecture.

Vous êtes au lycée et la physique vous passionne ? Vous tenez alors entre vos mains l'ouvrage qu'il vous faut ! Quel que soit le mois de l'année, quels que soient les chapitres que votre professeur de spécialité a abordés, vous pouvez ouvrir ce livre et commencer sa lecture : les outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension des lois physiques qui gouvernent notre Univers y sont présentés de façon progressive et s'insèrent naturellement au fil des chapitres.

La physique n'est pas gravée dans le marbre depuis la nuit des temps : les humains la construisent, tout comme les mathématiques, en *inventant* des concepts comme les forces, l'énergie, le temps, etc. C'est pourquoi ce livre met également l'accent sur l'histoire des sciences, afin d'**introduire les notions nouvelles en présentant l'évolution des idées.**

Même si apprendre par simple curiosité de comprendre le monde est la plus noble des façons d'étudier, n'oubliez pas qu'il **existe des compétitions telles que le concours général ou les olympiades internationales** permettant d'enrichir son curriculum vitae : obtenir une distinction à l'une ou l'autre de ces épreuves est un bonus non négligeable lorsqu'on postule en classe préparatoire aux grandes écoles d'ingénierie. Vous trouverez davantage d'informations sur le site www.physica.fr.

Le programme des olympiades internationales est vaste, il **couvre largement le programme de BAC+1** des diverses filières françaises où la physique est mise à l'honneur (MPSI, PCSI, PTSI, L1 physique, BUT MPh, etc.), aussi ce livre peut être utilisé par ces étudiants qui voudraient **réviser ou reprendre les bases de la discipline** : des simples entraînements du cours aux questions les plus ardues de certains exercices posés aux concours, c'est en tout **plus de quatre cents sujets** qui vous attendent dans cet ouvrage, avec **des corrigés détaillés** en fin de chaque chapitre pour vous permettre de comprendre, d'apprendre ou de réviser.

J'espère que cette nouvelle édition accompagnera encore mieux toutes les passionnées et tous les passionnés de physique !

Bon nombre de ces exercices sont *inspirés* de sujets de concours divers et variés, leur provenance est indiquée entre parenthèses, souvent sous forme d'acronymes :

- CG signifie concours général et IPhO olympiades internationales de physique.
- G2E, CCINP, e3a, Mines, Centrale, X et ENS sont des concours d'entrée à BAC+2 aux grandes écoles d'ingénieur française.

Mais avant de nous lancer dans la science, j'aimerais finir mon avant-propos par des remerciements très sincères à toutes les personnes suivantes :

- Mes anciens élèves de Trajectoire Kepler du lycée Jean Sturm (Strasbourg), de la PCSI du lycée Jacques Amyot (Auxerre) et de la MP Claude Gellée (Épinal).
- Mes anciens collègues messieurs Franck Lohner, Mathieu Schaal, Julien Volgringer et madame Hélène Vonesch, agrégés de physique au lycée Jean Sturm, ainsi que monsieur Francis Reibel, agrégé de physique en PCSI au collège Saint-Étienne (Strasbourg).
- Mes collègues du lycée Jacques Amyot : madame Emma Gendre, professeure agrégée de Chimie en PC* au lycée Janson-de-Sailly (Paris) et monsieur Charles-Antoine Poirot, professeur agrégé de mathématiques en PCSI au lycée Gay-Lussac (Limoges).
- Monsieur Hervé Chuberre, professeur agrégé de Physique à l'ENSSAT (Lannion), pour les échanges enrichissants que nous avons pu avoir concernant la définition de l'intensité du courant électrique.
- Monsieur François Louvet, professeur agrégé de SII à l'ENSIL-ENSCI (Limoges), pour les échanges enrichissants que nous avons pu avoir concernant l'initiation à la métrologie.
- Mon ami d'enfance Arnaud Fremy, ingénieur dans le domaine du nucléaire, pour m'apporter constamment son regard « hors éducation nationale ».
- Ma compagne Candice, ma sœur Lucille, ses filles Pauline et Margaux, ainsi que ma mère Danièle, pour leur soutien.
- Monsieur Philippe Lespagnol, mon ancien professeur de mathématiques de terminale au lycée Saint-Luc à Cambrai, pour m'avoir fourni les bases scientifiques nécessaires à la réussite de mes études et m'avoir transmis sa passion de l'enseignement des sciences.

Le 31 janvier 2026.

Sommaire

Avant-propos	3
Chapitre 1. Métrologie.....	7
Chapitre 2. Dérivation.....	25
Chapitre 3. Réfraction et réflexion	37
Chapitre 4. Lentilles minces	55
Chapitre 5. Logarithmes et exponentielles.....	81
Chapitre 6. Équations différentielles	91
Chapitre 7. Physique nucléaire	103
Chapitre 8. Circuits électriques.....	117
Chapitre 9. Condensateurs.....	139
Chapitre 10. Bobines	153
Chapitre 11. Statique.....	165
Chapitre 12. Intégration	187
Chapitre 13. Mouvements unidimensionnels	203
Chapitre 14. Mouvements tridimensionnels	229
Chapitre 15. Énergétique	251
Chapitre 16. Oscillations libres	269
Chapitre 17. Signaux.....	293
Chapitre 18. Ondes progressives	307
Chapitre 19. Ondes stationnaires.....	327
Chapitre 20. Oscillations forcées	339
Chapitre 21. Mécanique du solide	375
Chapitre 22. Mécanique céleste	393
Chapitre 23. L'interaction électromagnétique	411
Chapitre 24. Thermodynamique	427
Chapitre 25. Premier principe de la thermodynamique.....	447
Chapitre 26. Second principe de la thermodynamique.....	467
Chapitre 27. Transitions de phase.....	487
Chapitre 28. Machines thermiques	505
Chapitre 29. Mécanique des fluides	529
Chapitre 30. Magnétisme	547
Chapitre 31. Induction	575
Chapitre 32. Relativité.....	595
Chapitre 33. Mécanique quantique.....	617
Index des outils mathématiques.....	643
Bibliographie	645



Métrologie

Appelons un chat un chat : dans cet ouvrage, les diverses branches de la physique seront nommées de façon classique : la thermodynamique, la mécanique, l'optique, etc. La structuration des connaissances n'est pas qu'une manie de scientifique obsédé par l'ordre, elle est une façon d'organiser la pensée de l'étudiant pour l'aider à ne pas se perdre dans cette forêt de théorèmes et de définitions qu'est la bibliothèque du savoir de l'humanité. Commençons donc dès le premier chapitre : la métrologie regroupe les termes « mètre » et « logie » désignant respectivement la mesure et l'étude. La métrologie, c'est la science de la mesure : qu'est-ce que la précision d'une mesure ? Qu'appelle-t-on incertitude ? Qu'est-ce qu'une unité de mesure ? Tant de termes que nous utilisons à tort et à travers dans la vie quotidienne et qui ont pourtant des définitions bien rigoureuses. Loin d'être un traité complet de métrologie, ce chapitre n'en est qu'une minuscule introduction, une simple prise de conscience de l'importance de la mesure pour le jeune lecteur, notamment si celui-ci s'est entraîné avec des exercices chimériques, exhibant par exemple des graphes aux points expérimentaux parfaitement alignés... En physique, nous élaborons des modèles mathématiques censés décrire le « vrai » monde, alors n'oublions pas qu'ils doivent être vérifiés par l'expérience, d'où l'intérêt de savoir comment mesurer et interpréter ces mesures.

1. Imperfections d'une mesure

Tracez un carré de cinq centimètres de côté sur une feuille puis demandez à un enfant de mesurer la longueur d'un côté, celui-ci vous dira, sûr de lui : « cinq centimètres ! ». Ajoutez alors : « cinq centimètres et combien de millimètres ? », il vous répondra : « bah moins d'un millimètre, je ne sais pas trop, entre zéro et un millimètre » ; ne cherchez surtout pas à lui faire dire : « environ 0,2 mm » ou « environ 0,3 mm » car c'est ce qu'il vient de vous répondre qui est juste : avec notre règle graduée en millimètres, la seule chose dont on est sûr est que la longueur du carré est comprise entre 5,0 et 5,1 centimètres !

Prenons l'exemple d'une séance travaux pratiques où l'on souhaite déterminer la vitesse v_s du son dans l'air en mesurant la durée Δt de parcours d'une salve d'ultra-

sons sur une distance fixée $D = 2000$ mm. Une fois Δt mesurée, il suffit d'effectuer le calcul $v_s = \frac{D}{\Delta t}$ pour obtenir une valeur expérimentale, qu'on comparera à la valeur de référence à 20°C : $v_{\text{ref}} = 343 \text{ m.s}^{-1}$. Une **valeur de référence**, c'est une valeur qui a été mesurée **par une méthode validée par la communauté scientifique**, dont la pertinence est bien supérieure à celle des protocoles qu'on utilise en travaux pratiques. Une valeur de référence, ça peut également être la **valeur indiquée par le constructeur** (de la focale d'une lentille par exemple) : on suppose que celui-ci l'a déterminée par une bien meilleure méthode que celle utilisée en TP, *a priori* !

1.1. Erreurs aléatoires

Le professeur demande aux élèves, binôme après binôme, la valeur de Δt qu'ils ont mesurée et les note au tableau (en millisecondes ms) : 5,87 ; 5,80 ; 5,83 ; 5,85 ; 5,79 ; etc. Rien d'étonnant à voir ces différences de résultats : le groupe ayant obtenu 5,83 ms qui correspond effectivement à $\frac{2,000 \text{ m}}{343 \text{ m.s}^{-1}}$ n'a eu qu'un coup de chance ! C'est ce qu'on appelle l'**erreur aléatoire** d'une mesure, et celle-ci **n'est pas contrôlable**. Plus les erreurs aléatoires sont petites, plus cette mesure est dite **fidèle**.

1.2. Erreurs systématiques

Le professeur demande alors aux élèves de refaire plusieurs fois la mesure de Δt . Voici les résultats (en millisecondes) d'un binôme : 5,87 ; 5,89 ; 5,89 ; 5,93 ; 5,87. L'éparpillement des résultats n'est pas plus grand qu'au paragraphe précédent, c'est-à-dire que les erreurs aléatoires sont comparables à celles des autres binômes, mais le souci est que leur liste de résultats n'est pas autour de la valeur 5,83 ms. C'est ce qu'on appelle une **erreur systématique** : les élèves ont très certainement mal placé l'émetteur à ultrasons et **se trompent donc de la même quantité à chaque mesure**. Fort est à parier qu'on trouvera leur émetteur à ultrasons environ deux centimètres trop loin puisqu'avec leur valeur moyenne 5,89 ms pour la durée de parcours et la valeur de référence on trouve $D' \approx 2020$ mm. On retiendra que plus l'erreur systématique d'une série de mesures est petite, plus cette mesure est **juste**. **On peut les réduire** en améliorant les réglages.

1.3 Intervalle de confiance

Vous l'aurez bien compris, on peut y mettre autant de bonne volonté que l'on veut (même en éliminant les erreurs systématiques), on ne trouvera jamais avec une certitude parfaite que $\Delta t = 5,83$ ms. Cependant, d'après le premier paragraphe, on est presque certain que $5,80 \text{ ms} < \Delta t < 5,88 \text{ ms}$: c'est ce qu'on appelle l'intervalle de confiance, noté $J = [5,79 \text{ ms} ; 5,87 \text{ ms}]$, résultat qu'on pourrait aussi écrire sous la forme $\Delta t = (5,83 \pm 0,04) \text{ ms}$. **Toute grandeur x mesurée est donnée à « plus ou moins » une certaine valeur $U(x)$, qu'on appelle incertitude, et qui doit être exprimée dans les mêmes unités que la valeur mesurée :**

$$x = (x_{\text{estimée}} \pm U(x)) \text{ unités}$$

En regardant une pipette jaugée, un élève s'étonne d'y voir écrit le volume sous la forme $V = 25 \text{ mL} \pm 0,3 \%$. « Mais $0,3 \%$ de quoi monsieur ? » demande-t-il : $0,3 \%$ de 25 mL évidemment ! Parfois, plutôt que donner l'incertitude, on préfère donner l'incertitude *relative* qui est définie par $\frac{U(x)}{x_{\text{estimée}}}$ et qu'on exprime souvent en %. **Plus l'incertitude relative est petite, plus la mesure est « précise » dirait-on dans le langage courant.** Remarquons que si l'incertitude relative est petite, ça peut être soit parce que l'incertitude est petite, soit parce que la valeur mesurée est grande, d'où **l'intérêt de faire de grandes mesures** lorsqu'on en a la possibilité (grandes par rapport à l'incertitude bien sûr).

Entraînement 1. Pipette ou fiole jaugée ?

Un élève prélève cinq millilitres d'une solution avec une pipette sur laquelle est indiqué $V = 5 \text{ mL} \pm 0,4 \%$ et un autre prélève 200 mL d'eau avec une fiole jaugée dont on considérera $U(V) = \pm 0,5 \text{ mL}$. Lequel des deux a fait le prélèvement dont l'incertitude relative est la plus petite ?

Remarque : il ne faut pas confondre *erreur* (qui est l'écart entre une valeur mesurée et une valeur de référence) et *incertitude* qui est une sorte de « mesure » de la *méconnaissance* de cette valeur.

2. Améliorer une mesure

2.1. Moyenner pour réduire l'incertitude

Pour mieux estimer une valeur, on peut *par exemple* répéter plusieurs fois nos mesures (on obtient diverses valeurs x_i) et en faire **la moyenne** (qu'on note $\bar{x}$) :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Dans l'exemple du §1.1, on a : $\overline{\Delta t} = \frac{(5,87+5,80+5,83+5,85+5,79)}{5} = 5,828 \text{ ms}$.

Pour mesurer la *dispersion* des valeurs, qu'on comprend être liée à l'*incertitude*, vous savez déterminer **la variance V d'une série de $n \geq 2$ mesures** :

$$V = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Donnant ici : $V(\Delta t) = \frac{(5,87-5,83)^2 + (5,80-5,83)^2 + \dots}{4} = 0,001125 \text{ ms}^2$.

Remarque : en première spécialité mathématiques, on donne pour formule de la variance $V' = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$ car cela semble naturel (et non pas « $n - 1$ » au dénominateur), mais cette variance-là est biaisée. En effet, contrairement aux n valeurs x_i qui sont indépendantes, les n valeurs $(x_i - \bar{x})$ ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont reliées par la moyenne $(\frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x})$: on pourrait par exemple déterminer la dernière valeur $(x_n - \bar{x})$ à partir des $n - 1$ premières valeurs et de la moyenne... il n'y a donc que $n - 1$ valeurs indépendantes dans la formule de la variance et il est donc plus pertinent de diviser par $n - 1$.

Ne pouvant pas comparer des ms^2 avec des ms , les physiciens déterminent plutôt **l'écart-type**¹ $s = \sqrt{V} = \sqrt{1,125 \times 10^{-3}} \approx 0,03354 \text{ ms} = 33,54 \mu\text{s}$. Mais attention **cet écart-type correspond à l'incertitude sur une unique mesure** faite et non pas à l'incertitude sur la valeur estimée (la moyenne). Si chaque groupe de TP faisait plusieurs séries de n mesures, ils obtiendraient une série de moyennes, dont on pourrait déterminer l'écart-type de la même façon que précédemment. Dans ce cours, **nous admettons que l'écart-type sur la valeur moyenne d'une série de n mesures est $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$** . Avec l'exemple précédent : $s_{\bar{x}} = \frac{33,54}{\sqrt{5}} \approx 15 \mu\text{s}$.

Nous pouvons alors (enfin) écrire $\Delta t = (5,828 \pm 0,015) \text{ ms}$. Pourquoi n'avoir laissé que deux chiffres à l'incertitude ? Parce que c'est la règle usuelle dans de nombreux laboratoires de pointe comme le CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique) en France, le NPL (National Physical Laboratory) en Grande Bretagne ou encore le PTB (Physikalisch-Technische Bundesanstalt) en Allemagne. Ils s'en tiennent aux points suivants, avec **les règles habituelles d'arrondissement**² :

- Si le **premier chiffre non nul de l'incertitude est compris entre 1 et 4**, on lui **conserve deux chiffres**.
- Si le **premier chiffre non nul de l'incertitude est compris entre 5 et 9**, on ne lui **conserve qu'un seul chiffre**.

Entraînement 2. Écrire un résultat expérimental

Arrondir correctement les grandeurs et incertitudes suivantes :

Un match de foot a une durée moyenne de $(92,12 \pm 3,256) \text{ min}$.

Une voiture qui a une masse de $(1088 \pm 74) \text{ kg}$.

Un son qui a une longueur d'onde de $(77,27 \pm 1,25) \text{ cm}$.

Remarque : dans l'enseignement français, on a décidé pour des raisons de simplicité **d'arrondir à un seul chiffre toutes les incertitudes**, que ce chiffre soit ou non plus grand que cinq. Morale : pour vos interrogos, le BAC ou les concours, à moins d'une indication contraire de l'énoncé, ne vous tracassez pas avec la précédente règle et laissez un seul chiffre à votre incertitude !

¹ L'écart-type « expérimental » dont nous parlons ici se note bien s , et pas σ qui est réservé aux lois de probabilités. En première et terminale, on ne distingue pas ces deux notions et on utilise toujours σ .

² Si le chiffre suivant est 5 ou plus, on arrondit au supérieur, s'il est inférieur ou égal à 4 on arrondit à l'inférieur. Par exemple $7,5 \approx 8$ et $7,4 \approx 7$.

Ici, nous avons considéré l'incertitude égale à l'écart-type sur la moyenne, il s'agit de l'incertitude-type $u(x) = \frac{s}{\sqrt{N}}$. Dans un cours de maths sur les lois de probabilités, nous pourrions montrer que nous venons de faire une estimation « à un **niveau de confiance de 68 %** », c'est-à-dire que si quelqu'un renouvelle l'expérience, il y a 68 % de chance qu'il trouve un résultat dans cet intervalle. Avec une incertitude égale à **deux fois l'écart-type**, soit $\Delta t = (5,828 \pm 0,015)$ ms, on aurait un **niveau de confiance de 95 %** : il y a donc tout de même 5 % de chance que, si quelqu'un renouvelle la mesure, il trouve une valeur qui n'est pas dans l'intervalle $J = [5,813 \text{ ms} ; 5,843 \text{ ms}]$! Avec **trois fois l'écart-type**, nous aurions un **niveau de confiance de 99,7 %**, etc. Lors de la découverte du Boson de Higgs, les scientifiques ont annoncé leur résultat à $\pm 5 s_{\bar{x}}$, c'est-à-dire avec un niveau de confiance de 99,99997 % ! Lorsqu'on choisit de prendre $m \times s_{\bar{x}}$ pour incertitude (avec m un entier), on parle d'**incertitude élargie**.

Dernier point de vocabulaire : lorsqu'on travaille à partir d'une série de mesures comme précédemment, on parle d'**évaluation de type A** de l'incertitude. Parfois, nous nous contenterons d'**une seule mesure et d'utiliser une loi de probabilité** mathématique supposée représentative du phénomène étudié, c'est ce qu'on appelle faire **une évaluation de type B** de l'incertitude. Dans ce dernier cas, l'exercice nous dira comment procéder : incertitude indiquée par l'instrument de mesure, qu'il faudra diviser par $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{12}$ selon les précisions de l'énoncé. Ces racines ont une explication provenant de lois de probabilités continues qui vous sont pour le moment inconnues, c'est pourquoi j'ai préféré ne pas les introduire.

2.2. Tracer une courbe

On peut parfois mesurer une grandeur à partir de deux autres x et y . Dans ce cas, une méthode pour améliorer la mesure est d'en effectuer plusieurs, pour diverses valeurs de x et de y , puis de tracer y en fonction de x par exemple. Supposons qu'on veuille mesurer une résistance électrique R . Pour cela on relève la valeur de la tension U à ses bornes pour diverses valeurs de l'intensité I :

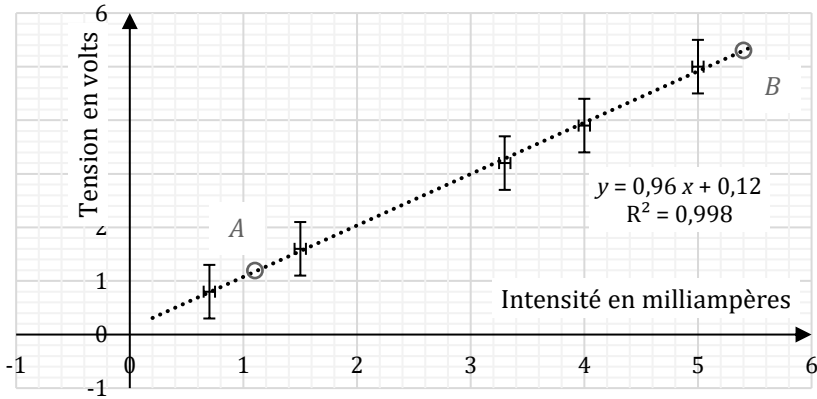
Tension U ($\pm 0,5$ V)	0,8	1,7	3,2	3,6	5,0
Intensité I ($\pm 0,05$ mA)	0,7	1,5	3,3	4,0	5,0

En traçant U en fonction de I (voir page suivante), on observe que les points sont à peu près alignés selon une droite passant par l'origine. Remarquons que :

- Les points expérimentaux sont des croix d'incertitude de hauteur $\pm 0,5$ V et de largeur $\pm 0,05$ mA.
- La droite doit passer par toutes les croix. **Si nous avons obtenu une croix ne passant pas par la droite, nous aurions dû refaire cette mesure.**

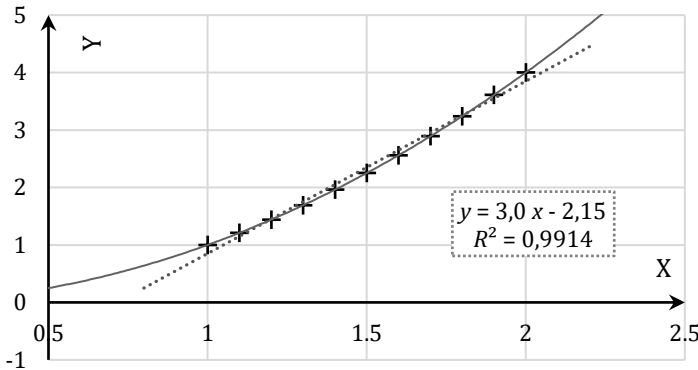
Le coefficient directeur, qui est R (puisque $U = RI$), est calculé à partir de deux points A et B choisis sur la droite (et non pas forcément des points du tableau) :

$$R = \frac{U_B - U_A}{I_B - I_A} = \frac{5,3 - 1,2}{(5,4 - 1,1) \times 10^{-3}} \approx 953 \, \Omega \approx 0,95 \, \text{k}\Omega$$



Déterminer R par cette méthode s'appelle faire une **régression (linéaire lorsqu'il s'agit d'une droite)**. Lorsqu'elle est faite sur ordinateur, celui-ci donne la précision sur la valeur des coefficients calculés³. Il calcule également un **coefficient de corrélation** qui doit être supérieur à 99 % pour que l'on puisse considérer la régression réussie. Mais attention : avoir un bon coefficient de corrélation (proche de 1) est une condition nécessaire mais pas suffisante pour valider la régression.

En effet, **l'intérêt de faire un graphique, par rapport à un simple calcul de moyenne, est de voir si la courbe obtenue est de la bonne forme**. Par exemple ici, si les points n'avaient pas été alignés (approximativement) le long d'une droite passant par l'origine, mais suivant une courbe, c'est que $U \neq RI$: la loi aurait été invalidée. Dans l'exemple ci-dessous la régression linéaire (en pointillés) ne serait pas validée malgré un bon coefficient de corrélation : certes les points sont proches de la droite, mais ils forment clairement une courbe et non pas une droite !



³ En utilisant généralement une méthode appelée « méthode des moindres carrés » dans laquelle les incertitudes sur la variable en abscisse sont supposées négligeables.

Parfois, l'ordonnée à l'origine peut permettre de déceler une erreur systématique sur la grandeur tracée en ordonnée. Par exemple ici, si toutes les valeurs de U étaient diminuées d'une certaine valeur fixée, ou si toutes les valeurs de l'intensité étaient augmentées d'une certaine valeur fixée, ou les deux simultanément, nous aurions obtenu une droite d'ordonnée à l'origine négative.

3. Tenir compte des incertitudes

3.1. Calculer en tenant compte des incertitudes

Bien souvent, on calcule une grandeur à partir d'autres grandeurs mesurées, qui ont donc chacune leurs incertitudes. Lorsqu'on fait une **addition ou une soustraction**, la règle à retenir est simple et semble naturelle : **l'incertitude sur le résultat est la somme des incertitudes** sur les valeurs utilisées, mathématiquement on a :

$$\text{Si } Y = a + b \text{ ou } Y = a - b, \text{ alors } U(Y) = U(a) + U(b)$$

Mais qu'en est-il des divisions et multiplications ? Prenons l'exemple très simple du calcul d'une vitesse moyenne : pour cela on mesure la distance $d = (96,0 \pm 0,5) \text{ m}$ parcourue par un randonneur en $t = (72,0 \pm 0,5) \text{ s}$ que nous chronométrons. La vitesse se calcule facilement par la formule : $v = \frac{d}{t} = \frac{96}{72} \approx 1,333 \dots \text{ m.s}^{-1}$, mais qu'en est-il de son incertitude ? Dans ce livre, pour simplifier, nous utiliserons **la moyenne quadratique des incertitudes relatives** :

$$\frac{U(v)}{v} = \sqrt{\left(\frac{U(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{U(t)}{t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,5}{96}\right)^2 + \left(\frac{0,5}{72}\right)^2} \approx 8,68 \dots \times 10^{-3}$$

On retrouve alors $U(v) = \frac{U(v)}{v} \times v \approx 1,333 \dots \times 8,68 \dots \times 10^{-3} \approx 0,012 \text{ m.s}^{-1}$ d'où le résultat final : $v = (1,333 \pm 0,012) \text{ m/s}$.

Utiliser la moyenne quadratique est un choix pédagogique : certains exercices de BAC ou de concours peuvent vous demander d'utiliser une formule similaire avec des coefficients, mais vous n'avez pas encore les outils mathématiques pour comprendre la présence de ces coefficients. Nous retiendrons donc que **si l'énoncé de l'exercice que vous traitez ne précise rien sur la propagation des incertitudes**, on se permettra d'utiliser la moyenne quadratique, à savoir : **lorsqu'une grandeur y dépend de n variables qu'on note $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$, on estimera l'incertitude relative sur y par :**

$$\frac{U(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{U(x_i)}{x_i}\right)^2}$$

Remarque : pour estimer l'incertitude par simulation numérique, voir l'exercice 5.

Entraînement 3. Propagation des incertitudes

On mesure la tension $u = (5,3 \pm 0,5)$ V aux bornes d'un résistor lorsque celui-ci est traversé par un courant d'intensité $i = (750 \pm 45)$ mA. Déterminer la valeur de sa résistance R ainsi que son incertitude, sachant que $u = Ri$

3.2. Utiliser les chiffres significatifs (CS)

Supposons qu'on mesure la hauteur d'un muret au millimètre près, on trouve alors une valeur très précise $h = 1132$ mm = 113,2 cm. Mais généralement, lorsqu'on fait des travaux sur un muret, on n'a pas besoin d'être plus précis qu'au centimètre près : $h = 113$ cm sera une information suffisamment précise pour savoir combien de pots de peinture acheter par exemple. En sciences on dit que le nombre 113,2 est formé de 4 chiffres significatifs tandis que le nombre 113 n'en est formé que de trois. **Plus une valeur a de chiffres significatifs, plus elle est précise.** Attention à la règle suivante souvent mal comprise par les élèves :

- Les **zéros après les chiffres non nuls sont significatifs**, écrivons par exemple $c = 3,00 \cdot 10^8$ m.s⁻¹ la vitesse de la lumière dans le vide avec trois chiffres significatifs : ils sont significatifs parce qu'ils indiquent qu'on sait qu'il y a un zéro à cette place et pas un autre chiffre.
- Les **zéros avant les chiffres non nuls ne sont pas significatifs**, par exemple, sur une canette de soda il est écrit 0,33 L : cette valeur ne possède que deux chiffres significatifs puisque $0,33$ L = 33 cL or, lorsqu'on fait une conversion, la précision d'une mesure n'est pas changée.

Le nombre de chiffres significatifs d'une valeur est le nombre de chiffres constituant « a » dans son écriture scientifique $a \times 10^n$.

Entraînement 4. Compter les chiffres significatifs

Combien y a-t-il de chiffres significatifs dans les grandeurs suivantes : le rayon moyen de la Terre est d'environ $6,4 \cdot 10^3$ km ; une feuille de papier A4 a une hauteur de 29,7 cm ; une feuille de papier A4 a une largeur de 21,0 cm ; la masse du Soleil est d'environ $2 \cdot 10^{30}$ kg ; une bouteille de limonade a un volume de 0,25 L ; une corde de guitare a un diamètre de 0,020 cm.

3.3. Calculer en respectant les chiffres significatifs

« Lorsqu'on obtient un résultat à la calculatrice, combien de C.S. doit-on laisser sur la copie ? », voilà une question bien fréquente de la part des étudiants !

Lorsqu'on effectue **uniquement des multiplications ou des divisions**, on laisse au **résultat le même nombre de C.S. que la valeur la moins précise** qu'on a utilisée (celle qui contient le moins de CS), par exemple $3,00 \cdot 10^8 \times 3,2 \cdot 10^7 = 9,6 \cdot 10^{15}$ et non pas $9,60 \cdot 10^{15}$. Mais attention : **les entiers ont une infinité de C.S.** Par exemple on vous dit que la masse d'une palette de 500 parpaings est de 1 740 kg, alors la masse moyenne d'un parpaing est $\frac{1740}{500} = 3,480$ kg et non pas 3,48 kg : il y a en effet 500,000000 ... parpaings puisque c'est un nombre entier !

Si on effectue une **addition ou une soustraction**, on écrit les deux valeurs avec la même puissance de 10 en gardant leurs nombres respectifs de C.S., on effectue l'addition ou la soustraction « normalement », puis on arrondit le résultat pour qu'il ait le même nombre de décimales que la valeur qui en avait le moins.

Exemple : Sur le Heidenkopf, un sommet vosgien d'une altitude $H = 0,79$ km, se trouve une tour d'observation de hauteur $h = 19$ m. Quelle est l'altitude z du sommet de la tour ? $z = H + h = 7,9 \cdot 10^2 + 0,19 \cdot 10^2 \approx 8,1 \cdot 10^2$ m et non pas 809 m car on ne sait pas si le Heidenkopf a une hauteur de 790 m exactement !

Remarque importante : **les règles vues dans ce paragraphe ne sont à appliquer que lorsqu'aucune incertitude n'est donnée par un énoncé. Dans le cas contraire, on se réfère aux calculs des incertitudes.**

Entraînement 5. Calculs et chiffres significatifs

Déterminer avec le bon nombre de chiffres significatifs le périmètre P et l'aire A d'une table de largeur $l = 110$ cm et longueur $L = 2,5$ m.

3.4. Comparer le résultat obtenu à une valeur de référence

Souvent, nous aurons à comparer le résultat obtenu à une valeur de référence. Supposons que sur une boîte de comprimés de vitamine C soit indiqué : « masse de vitamine C par comprimé $m_{\text{réf}} = 500$ mg » ; c'est notre valeur de référence. À l'aide d'analyses chimiques en TP, nous allons essayer de déterminer cette masse.

Un groupe d'élèves trouve $m = 490$ mg. Leur expérience est-elle réussie ? Le prof va-t-il leur mettre les points à la question ? On n'en sait rien ! Pour savoir s'ils ont juste, il faut connaître l'incertitude sur leur résultat : admettons que les élèves aient calculé $U(m) = 18$ mg. Maintenant on peut dire que leur expérience est réussie puisque la valeur de référence est bien comprise dans l'intervalle de confiance : $m_{\text{réf}} \in [472 \text{ mg} ; 508 \text{ mg}]$. **Un résultat est dit *concluant* si la valeur de référence se trouve dans l'intervalle de confiance.**

Dans certains vieux sujets, on peut aussi demander d'avoir un écart relatif entre la valeur obtenue et celle de référence : $\varepsilon = \left| \frac{m - m_{\text{réf}}}{m_{\text{réf}}} \right|$ inférieur à une valeur donnée, mais cette notion est de moins en moins utilisée. À l'inverse, on utilise de plus en plus souvent dans les manuels scolaire **la notion de z-score, qui doit rester strictement inférieur à 2 pour que le résultat soit *concluant* :**

$$z = \frac{|m - m_{\text{réf}}|}{U(m)}$$

Remarquons que comparer à z à 2 revient à observer si m est incluse ou pas dans l'intervalle de confiance à $\pm s_{\bar{x}}$; c'est une référence très utilisée dans de nombreux domaines (médecine, biologie, économie, etc.), mais par exemple en physique des particules, il faut arriver à $z \geq 5$ pour confirmer l'existence d'une nouvelle particule.

4. Analyse dimensionnelle

Si on utilise une formule fautive, inutile de se tracasser l'esprit avec des pourcentages d'erreur, des calculs d'incertitudes, etc. : le résultat sera toujours faux ! Voici donc une méthode pour vérifier si une formule n'est « pas trop fautive » : l'analyse dimensionnelle. Lorsque vous avez appris à calculer une vitesse en classe de quatrième, on vous a dit : « attention aux unités ! ». Effectivement, si d est en mètres et t en secondes, $v = \frac{d}{t}$ sera en mètres par seconde : des mètres divisés par des secondes. Faire une analyse dimensionnelle c'est procéder à l'envers : supposons que j'essaie de me souvenir de cette formule de quatrième mais que je me trompe : $v = \frac{t}{d}$. Comme je ne suis plus très sûr de moi, je vais vérifier que les unités sont bien les mêmes : à gauche la vitesse est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, et à droite on a un temps (secondes) divisé par une distance (mètres) donc des « secondes par mètre », donc je me suis trompé ! **De part et d'autre d'un symbole égal, on doit avoir les mêmes unités !**

Ce que nous venons de faire est un raisonnement sur les unités, et non sur les dimensions. C'est quoi la différence entre unité et dimension ? **À une même dimension peut correspondre diverses unités (par exemple les mètres et les pouces sont des unités différentes mais qui mesurent toutes les deux des longueurs)**, même pour des quantités qui n'ont pas de dimension ! L'exemple classique est la mesure d'un angle : on peut utiliser des degrés, des radians, des minutes d'arc, etc. pourtant un angle n'a pas de dimension puisqu'il s'agit d'une longueur (d'arc de cercle) divisée par une longueur (le rayon).

La dimension d'une grandeur X se note $\dim(X)$ sauf pour les sept unités de base du système international (S.I.) :

Grandeur	Unité (S.I.)	Dimension notée
Longueur	Le mètre (m)	L
Masse	Le kilogramme (kg)	M
Temps	La seconde (s)	T
Intensité (du courant électrique)	L'ampère (A)	I
Quantité de matière	La mole (mol)	N ou n
Température	Le kelvin (K)	Θ (lire « thêta »)
Intensité lumineuse	La candela (cd)	J

Toute dimension $\dim(X)$ peut s'écrire comme une combinaison de ces sept dimensions de base. Notre exemple précédent est très simple : $\dim(v) = \frac{\text{L}}{\text{T}}$. Utilisons une autre formule plus complexe, l'intensité de la force gravitationnelle dont l'expression a été vue en classe de seconde : $F = \mathcal{G} \frac{M \times m}{r^2}$. Pour trouver la dimension de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$ on écrit $\dim(\mathcal{G}) = \dim(F) \times \frac{\text{L}^2}{\text{M}^2}$, et puisque la dimension d'une force est $\dim(F) = \text{M} \times \frac{\text{L}}{\text{T}^2}$ (chose que nous verrons au chapitre sur les mouvements), on a finalement : $\dim(\mathcal{G}) = \frac{\text{L}^3}{\text{M} \times \text{T}^2} = \text{L}^3 \text{M}^{-1} \text{T}^{-2}$.

Entraînement 6. Dimension de la constante de Coulomb

Quelle est la dimension de la constante k dans la loi de l'interaction coulombienne $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ entre deux charges électriques q_1 et q_2 séparées d'une distance r . La dimension d'une force est donnée dans l'exemple précédent sur l'interaction gravitationnelle et il faut savoir qu'une charge s'exprime en coulombs C, ce qui est égal à des ampères-seconde : $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$.

Exercices sur les grandeurs et mesures**Exercice 1. Vitesse du son par calcul d'une moyenne**

Deux élèves ont mis au point un protocole pour mesurer la vitesse du son dans l'air ; pour plus de précision, ils répètent plusieurs fois l'expérience :

Expérience numéro i	1	2	3	4	5	6
Vitesse v_i mesurée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	328	336	334	340	330	338

1. Quelle estimation $\bar{v}$ peuvent-ils faire de la vitesse du son dans l'air ?
2. Quelle est l'incertitude-type $\sigma(\bar{v})$ sur cette moyenne ?
3. En déduire l'incertitude relative sur leur valeur.
4. On trouve dans un livre que $c_{\text{son}} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sous les conditions habituelles de pression et température. L'expérience est-elle concluante ?
5. De quel(s) paramètre(s) physique(s) aurait-on dû tenir compte également ?

Exercice 2. Vitesse du son par méthode graphique

Un autre binôme d'élèves a mis au point un protocole différent : à l'aide du matériel approprié, ils mesurent les longueurs d'ondes λ_i correspondant à diverses ondes sonores de fréquences respectives f_i . On rappelle que la longueur d'onde λ et la fréquence f d'une onde sont reliées par la relation $c = \lambda \times f$ où c est la célérité de l'onde. Les valeurs ont été regroupées dans le tableau suivant :

$\lambda (\pm 2,0 \text{ cm})$	52	60	64	71	77	80	85
$f (\pm 1,0 \%) \text{ en Hz}$	645	560	525	470	440	420	395

1. Tracer sur papier millimétré le graphique de λ en fonction de $\frac{1}{f}$.
2. Par quel type de courbe peut-on modéliser ce graphe ?
3. En déduire la valeur de c la vitesse du son dans l'air.
4. Compléter le tableau situé en fin d'exercice (début de page suivante) et commenter l'incertitude relative sur λ .
5. Calculer la moyenne $\bar{c}$ des vitesses trouvées. Conclusion ?

$\lambda \pm 2,0 \text{ cm}$	52	60	64	71	77	80	85
Incertitude relative sur λ							
$f (\pm 1,0 \%) \text{ en Hz}$	645	560	525	470	440	420	395
Vitesse correspondante							
Incertitude relative sur c							

Exercice 3. Ressort d'un pèse-personne

Un pèse-personne n'est autre qu'un plateau sur lequel on se place, comprimant ainsi un ressort. Plus le ressort est comprimé, plus l'indication sur la balance est grande. La force F qu'applique le ressort sur le plateau est proportionnelle à la compression ΔL de celui-ci : $F = k \times \Delta L$ (ou k est appelée la raideur du ressort qui s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$), celle-ci compense exactement le poids de la personne se pesant.

1. Exprimer puis calculer la force exercée par le ressort lorsqu'une personne de masse $m = 82 \text{ kg}$ est à l'équilibre sur la balance. On rappelle que l'intensité de la pesanteur est $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.
2. Lorsque cette personne est sur la balance, on remarque que le plateau s'est abaissé de $\Delta L = 9 \text{ mm}$. En déduire la constante de raideur k .
3. Proposer un protocole pour mesurer cette constante de raideur avec deux chiffres significatifs. Attention on dispose d'une règle qui n'est précise qu'au mm près et sur la balance est indiqué : « max = 120 kg ».

Exercice 4. Améliorer une série de mesures

Plusieurs personnes, dont un très jeune enfant, essaient de déterminer le diamètre d'une boule de pétanque à l'aide d'une règle (car ils s'ennuient tous terriblement). Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant :

Personne n°	1	2	3	4	5	6
Diamètre mesuré (en cm)	7,6	7,6	6,8	7,4	7,5	7,5

1. Si seule la première mesure était faite, quelle valeur aurait été retenue ?
2. Au vu de l'ensemble des mesures, que faire de la troisième ?
3. Faire une estimation du diamètre de la boule en éliminant la (les) mesure(s) incohérente(s) et calculer son écart-type sur la moyenne, on laissera quatre C.S. aux deux résultats pour le moment.
4. En déduire son incertitude relative avec deux C.S.
5. Écrire ainsi la valeur estimée sous la forme $d = (... \pm ...) \text{ cm}$.

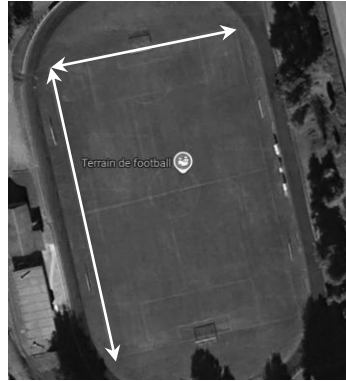
Exercice 5. Simuler pour estimer l'incertitude

Un maire souhaite rapidement mesurer la surface du terrain de football de sa commune (cf. ci-contre). Sur Google Maps il mesure :

- une largeur $l = (66 \pm 0,5) \text{ m}$;
- une longueur $L = (105 \pm 0,5) \text{ m}$.

Pour estimer l'incertitude sur le résultat, taper le code suivant dans une interface python, puis écrire la surface du terrain de foot et son incertitude en arrondissant correctement.

Comparer l'incertitude trouvée par la simulation avec la méthode de la moyenne quadratique des incertitudes relatives. Conclusion.



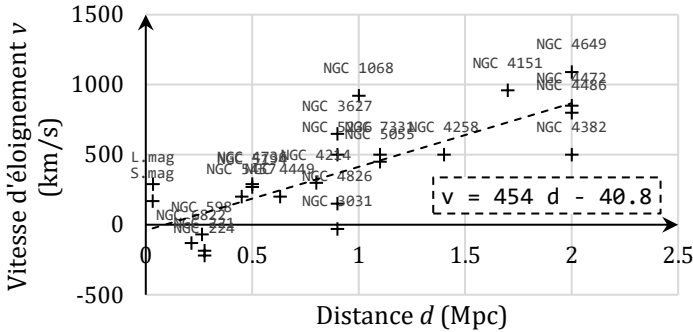
```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  # Paramètres de mesure
5  L_moy = 105   # longueur moyenne (m)
6  L_inc = 0.5   # incertitude-type (m)
7
8  l_moy = 66    # largeur moyenne (m)
9  l_inc = 0.5   # incertitude-type (m)
10
11 N = 1000      # nombre de simulations
12
13 # Tirages aléatoires selon des lois normales
14 L = np.random.normal(L_moy, L_inc, N)
15 l = np.random.normal(l_moy, l_inc, N)
16
17 # Calcul des aires
18 A = L * l
19
20 # Affichage de l'histogramme
21 plt.hist(A, bins=30, edgecolor='black')
22 plt.xlabel("Aire simulée (m²)")
23 plt.ylabel("Effectifs")
24 plt.title("Distribution des aires simulées (Monte-Carlo)")
25 plt.show()
26
27 # Résultats numériques
28 print(f"Aire moyenne : {np.mean(A):.2f} m²")
29 print(f"Incertitude-type : {np.std(A, ddof=1):.2f} m²")

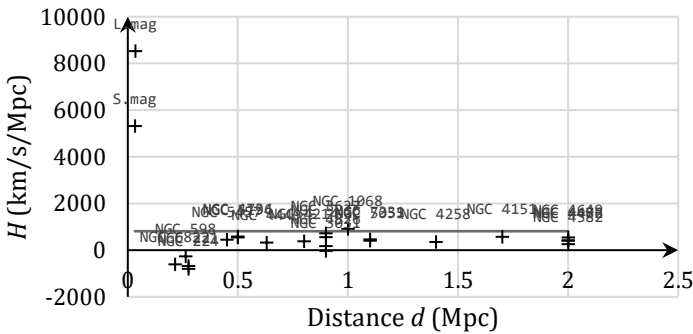
```

Exercice 6. Expansion de l'Univers (Centrale 2024 MPI)

Dans un article écrit en 1929, Edwin Hubble présente un ensemble de mesures qui tendent à montrer que l'Univers est en expansion. En effet, la plupart des 24 galaxies qu'il étudie s'éloignent de la Terre à une vitesse v qui semble proportionnelle à leur distance d , selon la désormais dénommée loi de Hubble-Lemaître $v = Hd$ où H est appelée constante de Hubble. On se propose de déterminer H par deux traitements statistiques. Le *premier* est une régression linéaire affichée sur le graphe suivant :



Le *second* est un calcul de la moyenne arithmétique des 24 valeurs $H_i = v_i/d_i$ de la « ième » galaxie : $\langle H \rangle \approx 812 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, ainsi que l'écart-type standard de la liste des valeurs H_i obtenues : $\sigma_H \approx 1989 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.



On précise qu'un « mégaparsec » (Mpc) vaut 10^6 pc : $1 \text{ pc} \approx 3,26 \text{ al} \approx 3,1 \times 10^{16} \text{ m}$.

1. À partir du second traitement statistique, écrire sous forme normalisée la valeur de H qu'on peut en déduire (accompagnée de son incertitude-type).
2. Quelle est la valeur de H obtenue par régression linéaire ? Lequel des deux traitements vous semble le plus robuste à la grande dispersion des données ?

Les résultats de la mission Planck en 2018 mènent à une valeur actuellement admise de la constante de Hubble $H = (67 \pm 3) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.

3. Justifier que dans l'hypothèse d'un Univers en expansion *linéaire* (vitesse v d'expansion fixée depuis la naissance de l'Univers), l'inverse de la constante de Hubble peut être interprétée comme l'âge de l'Univers.
4. Déterminer l'âge de l'Univers calculé par E. Hubble avec le *deuxième* traitement statistique. Comparer à l'âge du système solaire : environ 4,5 milliards d'années.

Corrigés des exercices et entraînements

Entraînement 1. Pipette ou fiole jaugée ?

À la fiole jaugée, l'incertitude relative est $\frac{0,5}{200} = 2,5 \times 10^{-3} = 0,25 \%$, ce qui est donc inférieur au premier prélèvement.

Entraînement 2. Écrire un résultat expérimental

Pour le match de foot, le premier chiffre significatif de l'incertitude est trois, ce qui est inférieur à cinq donc nous allons l'arrondir avec deux chiffres : $\pm 3,3$ min, on écrit finalement $(92,1 \pm 3,3)$ min. Pour la voiture, on ne garde qu'un seul chiffre à l'incertitude car sept est supérieur à cinq, ce qui donne $\pm 7 \times 10^1$ kg. On arrondit donc la masse de la voiture à la dizaine de kg près, ce qui donne $(109 \pm 7) \times 10^1$ kg = $(1,09 \pm 0,07)$ tonnes. Enfin, concernant la longueur d'onde du son, en suivant les mêmes règles on arrondit l'incertitude à $\pm 1,3$ cm et finalement $\lambda = (77,3 \pm 1,3)$ cm.

Entraînement 3. Propagation des incertitudes

La loi d'Ohm donne $R = \frac{u}{i} = \frac{5,3}{0,750} = 7,0666 \dots \Omega$. Pour l'incertitude relative, on a $\frac{U(R)}{R} = \sqrt{\left(\frac{U(u)}{u}\right)^2 + \left(\frac{U(i)}{i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,5}{5,3}\right)^2 + \left(\frac{45}{750}\right)^2} = 0,1118 \dots$ d'où une incertitude $U(R) \approx 7,066 \times 0,11 \approx 0,8 \Omega$ et finalement $R = (7,1 \pm 0,8) \Omega$.

Entraînement 4. Compter les chiffres significatifs

Le rayon de la Terre est donné avec deux C.S., la hauteur de la feuille de papier avec trois, sa largeur également (le zéro à droite est significatif), la masse du Soleil avec un seul C.S., le volume de la bouteille de limonade avec deux (les zéros à gauche « ne comptent pas » : ils ne sont pas significatifs) et le diamètre de la corde avec deux C.S., en effet on aurait pu écrire $2,0 \times 10^{-2}$ cm.

Entraînement 5. Calculs et chiffres significatifs

$P = 2 \times (L + l) = 2 \times (2,5 + 1,10) = 2 \times 3,6 = 7,2$ m : connaître la largeur au centimètre près est inutile ici puisqu'on ajoute celle-ci à une longueur qu'on ne connaît qu'au décimètre près. $A = L \times l = 2,5 \times 1,10 = 2,75 \approx 2,8$ m² : il s'agit d'une multiplication donc on garde le nombre de CS de la donnée qui en avait le moins, ici la longueur.

Entraînement 6. Dimension de la constante de Coulomb

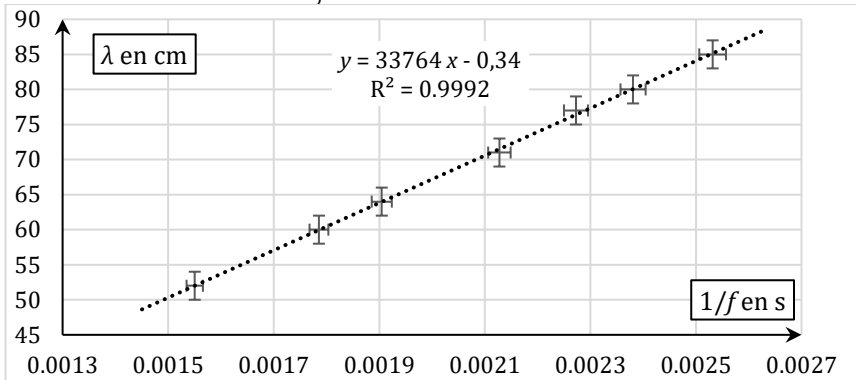
Dans l'exemple sur l'interaction gravitationnelle, on nous précise la dimension d'une force $\dim(F) = M \times \frac{L}{T^2}$. De plus l'énoncé indique qu'une charge s'exprime en ampères-seconde donc $\dim(q_1) = \dim(q_2) = I \times T$. On obtient alors en remplaçant dans la loi de Coulomb $M \times \frac{L}{T^2} = \dim(k) \frac{I^2 T^2}{L^2}$ et finalement $\dim(k) = \frac{ML^3}{I^2 T^4}$.

Exercice 1. Vitesse du son par calcul d'une moyenne

1. Une bonne estimation de la vitesse du son peut être faite en calculant la moyenne des résultats : $c = \frac{328+336+334+340+330+338}{6} \approx 334,333 \dots \text{ m.s}^{-1}$.
2. $s = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{(328-334,333)^2 + (336-334,333)^2 + \dots + (338-334,333)^2}{5}} \approx 4,6 \text{ m.s}^{-1}$.
On en déduit l'écart-type sur la moyenne $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \approx \frac{4,633}{\sqrt{6}} \approx 1,9 \text{ m.s}^{-1}$.
3. $\frac{U(c)}{c} = \frac{1,89\dots}{334,3\dots} \approx 5,65 \dots \times 10^{-3} \approx 0,57 \%$.
4. Ici nous avons trouvé $v = (334,3 \pm 1,9) \text{ m.s}^{-1}$: la valeur tabulée n'est pas comprise dans l'intervalle de confiance, l'expérience n'est pas concluante. On peut aussi calculer le z-score $z = \frac{|334-340|}{1,9} \approx 3$ qui est supérieur à 2.
5. Dans la question précédente il est indiqué « à pression et température ambiantes », or ces deux grandeurs n'ont pas été précisées dans l'énoncé et la vitesse du son dans un gaz en dépend fortement.

Exercice 2. Vitesse du son par méthode graphique

1. Graphe de λ en fonction de $\frac{1}{f}$ ci-dessous :



2. On peut modéliser par une fonction linéaire, ici une régression linéaire donne un coefficient directeur de $33\,764 \text{ cm.s}^{-1} = 337,64 \text{ m.s}^{-1}$.
3. Puisque $c = \lambda \times f$, on a $\lambda = c \times \frac{1}{f}$ et la vitesse du son n'est autre que le coefficient directeur précédemment trouvé.

- On obtient la première ligne avec $\frac{U(\lambda)}{\lambda} = \frac{2,0}{\lambda}$, la vitesse avec $\lambda \times f$ et la dernière avec $\frac{U(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{U(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{U(f)}{f}\right)^2}$. En mesurant de grandes longueurs d'onde, l'incertitude relative sur λ et donc sur c est plus faible car on mesure la longueur d'onde à incertitude fixée (2 cm), d'où l'intérêt de mesurer de grandes valeurs.
- Moyenne des vitesses : $336 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, est en accord avec le coefficient directeur.

$\lambda \pm 2,0 \text{ cm}$	52	60	64	71	77	80	85
Incert. relative sur λ (%)	3,8	3,3	3,1	2,8	2,6	2,5	2,4
$f (\pm 1,0 \%)$	645	560	525	470	440	420	395
Vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	335,4	336	336	333,7	338,8	336	335,8
Incert. relative sur c (%)	4,0	3,5	3,3	3,0	2,8	2,7	2,6

Exercice 3. Ressort d'un pèse-personne

- Si la personne est à l'équilibre, c'est que la somme des forces s'exerçant dessus est nulle, donc que la force du ressort compense le poids : $F = mg$ dont l'application numérique donne $F = 82 \times 9,81 \approx 804 \text{ N} \approx 8,0 \times 10^2 \text{ N}$.
- Comme $F = k \times \Delta L$, on en déduit $k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{804}{9 \times 10^{-3}} = 89\,380 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ que l'on doit arrondir à $k \approx 9 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ pour ne garder qu'un seul C.S.
- Pour avoir deux chiffres significatifs, il faudrait que ΔL soit obtenue avec deux C.S., et donc mettre une personne plus lourde, mais de moins de 120 kg, on mesure ΔL qui devrait être cette fois-ci de 10 mm ou plus et on refait les calculs des deux questions précédentes.

Exercice 4. Améliorer une série de mesures

- Si seule la première personne avait fait la mesure, on aurait été contraints de retenir sa valeur, donc un diamètre de 7,6 cm.
- Il faut éliminer la troisième qui n'est clairement pas en accord avec les autres.
- On trouve un diamètre moyen de 7,520 cm et un écart-type sur la moyenne de $s_{\bar{x}} \approx \frac{0,08367}{\sqrt{5}} \approx 3,742 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$.
- L'incertitude relative est ainsi de $\frac{0,03742}{7,52} \approx 0,50 \%$.
- Le premier chiffre non nul de l'incertitude étant quatre, on conserve deux C.S. à l'incertitude-type, ce qui donne $d = (7,520 \pm 0,037) \text{ cm}$.

Exercice 5. Simuler pour estimer l'incertitude

L'incertitude-type simulée est de $63,84 \text{ m}^2$ qu'on arrondira à $6 \times 10^1 \text{ m}^2$, l'aire moyenne étant $6925,36 \text{ m}^2$, on peut finalement écrire $(6,93 \pm 0,06) \times 10^3 \text{ m}^2$.

$\sqrt{\left(\frac{0,5}{105}\right)^2 + \left(\frac{0,5}{66}\right)^2} \approx 0,89 \%$ soit une incertitude type $6925 \text{ m}^2 \times 0,0089 \approx 62 \text{ m}^2$: sur cet exemple les deux méthodes donnent des résultats similaires.

Exercice 6. Expansion de l'Univers (Centrale 2024 MPI)

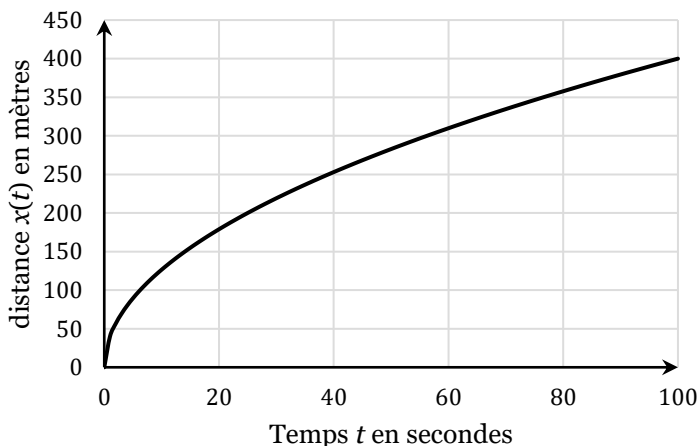
1. Puisqu'il y a 24 valeurs, l'incertitude est $\frac{\sigma_H}{\sqrt{N}} \approx \frac{1989}{\sqrt{24}} \approx 406 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ d'où une constante de Hubble $H = (812 \pm 406) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.
2. La régression linéaire affiche un coefficient directeur $H = 454 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ qui est moins éloignée de la valeur actuelle que celle de la question 1 : dans le second traitement statistique, la moyenne est faussée par la présence de deux valeurs aberrantes à faible d : les galaxies « L.mag » et « S.mag ». Sans ces deux valeurs (environ 5500 et 8500), la moyenne chute à une valeur bien moins grande : $\frac{812 \times 24 - 5500 - 8500}{20} \approx 274 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$; en général, une régression obtenue par la méthode des moindres carrés est plus robuste qu'un moyennage arithmétique lorsque la dispersion des valeurs est grande, même si dans notre cas la régression n'est pas non plus satisfaisante puisque les incertitudes sur d sont certainement grandes (détermination de distances extragalactiques difficiles à l'époque) et le coefficient de corrélation clairement inférieur à 0,99.
3. Intéressons-nous à deux galaxies et fixons l'une d'elles : à l'instant initial elles sont à une distance quasi-nulle, et puisque la deuxième s'éloigne à vitesse fixée de la première, elle se trouve à une distance $d = v \times \tau$ actuellement, où τ est l'âge de l'Univers. Or la loi de Hubble donne $v = Hd$ d'où $H\tau = 1$ et l'inverse de la valeur *actuelle* de H est bien l'inverse de l'âge de l'Univers. Remarquons que la *constante* de Hubble porte mal son nom puisqu'il s'agit certes d'une même valeur dans tout l'Univers à un instant donné, mais qu'elle varie au cours du temps ! En effet même dans ce modèle d'Univers en expansion linéaire (ni accéléré ni décéléré) les relations $d = vt$ et $v = Hd$ imposent $H(t) = \frac{1}{t}$ une constante de Hubble qui varie de façon inversement proportionnelle au temps.
4. $\frac{1}{\langle H \rangle} \approx \frac{1}{812 \times 10^3 \times (3,1 \times 10^{22})^{-1}} \approx 38 \times 10^{15} \text{ s} \approx 1,2 \text{ milliards d'années}$, valeur non compatible avec un système solaire qui serait plus âgé que l'Univers dans lequel il est né ! L'actuelle valeur de H , plus de dix fois plus petite que $\langle H \rangle$ calculée à la question 1, donne un âge de plus de 12 milliards d'années.

Dérivation

Les débats font rage : qui de Leibniz ou de Newton a inventé le calcul différentiel ? Les querelles de notation ne doivent pas faire oublier la très importante contribution de Pierre de Fermat dès 1636, soit près d'un demi-siècle plus tôt, qu'on appelle « la méthode des tangentes ». L'objectif de ce chapitre est de faire la correspondance entre les notations utilisées dans le cours de mathématiques de première et les notations utilisées dans le domaine des sciences appliquées. On en profitera pour approfondir la dérivation de fonctions composées et aborder la notion de développement limité. Pour être efficace et concis dans l'utilisation des résultats mathématiques, on supposera toutes les fonctions « bien définies ».

1. Une introduction sportive

Un « sportif du dimanche » se lance des starting-blocks pour un 400 mètres. Celui-ci n'étant pas très entraîné, sa régularité dans la puissance à fournir laisse à désirer. Observons le graphique de la distance « x » qu'il a parcourue en fonction du temps « t » qu'on a pu relever en filmant sa piteuse prestation.



Quelle est sa vitesse *moyenne* lors des 20 premières secondes de sa course ? D'après le graphique, il a parcouru environ 175 m durant ces 20 premières secondes, ce qui fait une vitesse $v = \frac{175}{20} \approx 8,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: quasiment la vitesse d'un sprinter ! Et durant les 20 secondes suivantes ? $v \approx \frac{250-175}{40-20} \approx 3,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (voir graphe pour les détails du calcul) : il s'est complètement essoufflé et a bien du mal à finir sa course ! Ainsi, rien ne sert de parler de « sa vitesse » puisqu'elle n'a pas du tout la même valeur en fin et en début de course. Il faudrait parler de sa **vitesse moyenne**.

Mais pourrions-nous calculer **sa vitesse instantanée, c'est-à-dire sa vitesse à un instant bien précis** ? Bien sûr ! Par exemple sa vitesse à $t = 20 \text{ s}$. Il suffirait de connaître la distance à « 20 secondes + une toute petite durée (notée dt) », on calculerait alors $v = \frac{x(20+dt)-x(20)}{dt}$. **Si dt était infiniment petit**, nous pourrions dire que la vitesse instantanée est exacte : $v(20) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{x(20+dt)-x(20)}{dt} \right)$: on reconnaît là la définition du nombre dérivé vu en spécialité mathématiques !

2. Nombre dérivé et tangente à la courbe

Considérons une fonction f et un réel α appartenant à son domaine de définition. Dans ce paragraphe, nous utiliserons t comme variable et non pas x comme dans la plupart des livres de maths, en effet, dans la plupart des problèmes de physique et de chimie, la variable est le temps, alors que x est une position, qui dépend du temps ! Donc x joue souvent le rôle de fonction et non de variable ! Les mathématiciens définissent le « nombre dérivé de f en α » par :

$$f'(\alpha) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{f(\alpha + dt) - f(\alpha)}{dt} \right)$$

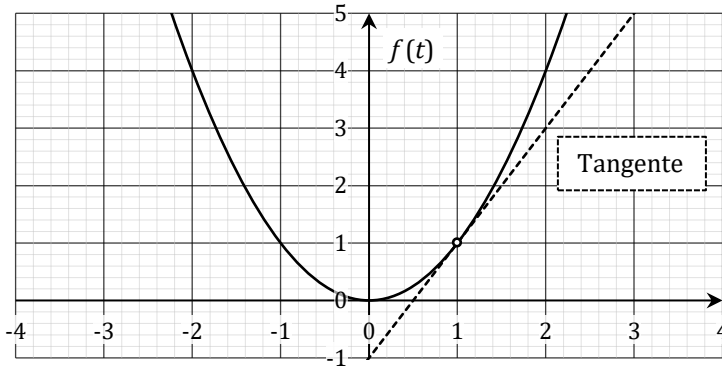
En physique, ce nombre dérivé sera noté $\frac{df}{dt}(\alpha)$ pour montrer qu'il s'agit d'une variation de f , notée df , divisée par une petite variation de temps dt ; $\frac{df}{dt}(\alpha)$ se lit « dérivée de f par rapport au temps en $t = \alpha$ ».

Calculons $\frac{df}{dt}(1)$ pour la fonction f définie par $f(t) = t^2$:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(1) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{f(1 + dt) - f(1)}{dt} \right) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{(1 + dt)^2 - (1)^2}{dt} \right) \\ \frac{df}{dt}(1) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2dt + dt^2 - 1}{dt} \right) = \lim_{dt \rightarrow 0} (2 + dt) = 2 \end{aligned}$$

On a tracé sur le graphique suivant la courbe représentative de la fonction ainsi que sa tangente en $t = 1$ pour illustrer une propriété que nous ne démontrerons pas : **le nombre dérivé est le coefficient directeur¹ de la tangente à la courbe en $t = \alpha$.**

¹ On peut aussi parler de « la pente » de la tangente.



Entraînement 1. Dérivée en zéro de la fonction cube

Déterminer de la même manière $\frac{df}{dt}(0)$ pour $f(t) = t^3$. Quelle est la particularité de la tangente à C_f (la courbe représentative de f) en zéro ?

3. Dérivée d'une fonction et applications

3.1. Définition

Si une fonction est dérivable en toute valeur t d'un intervalle I , alors **sa fonction dérivée est, par définition** :

$$\forall t \in I, \frac{df}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + dt) - f(t)}{dt} \right)$$

Reprenons l'exemple de $f(t) = t^2$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{(t+dt)^2 - t^2}{dt} \right) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{2tdt + dt^2}{dt} \right) = 2t.$$

On peut écrire que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t^2 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 2t$.

Pour en revenir à l'introduction du chapitre, **Newton notait $\dot{f}$ la dérivée d'une fonction tandis que Leibniz la notait $\frac{df}{dt}$** : cette dernière est moins élégante mais a le mérite de montrer qu'on dérive la fonction *par rapport* à t , ce qui a une importance lorsqu'on en vient à étudier des fonctions qui dépendent de plusieurs variables : il faut préciser par rapport à laquelle on dérive ! **Quant à la notation f' des mathématiciens, elle a été inventée par Lagrange** presque un siècle plus tard.

Puisque la dérivée d'une fonction est également une fonction, il se peut qu'elle soit également dérivable. Dans ce cas « **la dérivée de la dérivée** » s'appelle **dérivée seconde** et se note f'' pour les mathématiciens, $\frac{d^2f}{dt^2}$ pour les physiciens et chimistes, $\ddot{f}$ pour les lois de la mécanique de Newton.

Entraînement 2. Dérivée de la fonction inverse

Dériver, à l'aide de la définition, la fonction définie par $f(y) = \frac{1}{y}$.

3.2. Sens de variation d'une fonction

Puisque la valeur de $\frac{df}{dt}$ n'est autre que le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f , son signe nous donne le sens de variation de f :

- Si $\frac{df}{dt} > 0$ alors f est strictement croissante.
- Si $\frac{df}{dt} < 0$ alors f est strictement décroissante.
- Si $\frac{df}{dt} = 0$ alors f est constante.

Pour savoir où se trouve le minimum ou le maximum d'une fonction, il suffit de trouver la valeur pour laquelle sa dérivée s'annule ! Mais attention, pour déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum il faut étudier le signe de la dérivée seconde. Utilisons la notation de Lagrange par exemple :

- Si $f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) < 0$ alors f atteint un maximum en $t = \alpha$.
- Si $f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) > 0$ alors f atteint un minimum en $t = \alpha$.

Dans l'exemple $f(x) = x^2$, on calcule $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2 > 0$, en $x = 0$ on a f' qui s'annule et f'' qui est positive donc f a bien un minimum en $x = 0$.

Entraînement 3. Vitesse et accélération

Nous verrons dans le chapitre sur les mouvements que l'accélération d'un objet est la dérivée de sa vitesse. Si on s'intéresse à une voiture qui se déplace en ligne droite, dont on note x la position, on a $v = \frac{dx}{dt}$ la vitesse et $a = \frac{dv}{dt}$ l'accélération. Si cette dernière est négative, la vitesse de la voiture l'est-elle aussi forcément ?

Nous n'avons pas parlé du cas $f''(\alpha) = 0$ car il nous intéresse moins pour la suite de cet ouvrage, mais tout lecteur curieux pourra se renseigner sur les points d'inflexion, qui certes ne nécessitent pas $f''(\alpha) = 0$, mais qui nécessitent un changement de signe de la dérivée seconde...

3.3. Règles de dérivation

Dérivées des fonctions usuelles

Apparemment, l'étude de fonctions dérivées permet un gain de temps phénoménal pour déterminer les variations et les extremums d'une fonction, mais le calcul d'une dérivée par la définition donnée au paragraphe 3.1. est laborieuse ; **il est donc à connaître un ensemble de règles** qui permettent de calculer très rapidement les dérivées de fonctions usuelles. On note n un entier relatif et $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de la fonction :

Fonction	Dérivée	Condition particulière
Fonction racine $\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
Fonction inverse $\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
De façon générale : x^n	$n x^{n-1}$	Attention au $\mathcal{D}_f$
Fonction cosinus $\cos(x)$	$-\sin(x)$	
Fonction sinus $\sin(x)$	$\cos(x)$	
Fonction tangente $\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Entraînement 4. Altitude d'un objet lancé vers le haut

On s'intéresse à la fonction $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + H$ où g, v_0 et H sont des constantes positives. Celle-ci correspond à l'altitude d'un objet qu'on lancerait avec une vitesse v_0 vers le haut depuis une hauteur H , d'où l'apparition de la fameuse pesanteur terrestre $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Déterminer à quel instant t_m l'altitude est maximale. Quelle est la valeur de la vitesse v_m à ce sommet ? S'agit-il vraiment d'un maximum d'altitude ?

Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions et k un réel, on admet les propriétés suivantes, en utilisant la notation de Lagrange (cette fois-ci dans un souci de concision) :

- somme de fonctions $(u + v)' = u' + v'$
- multiplication par un scalaire $(k \cdot u)' = k \cdot u'$
- dérivée d'un produit de fonctions $(uv)' = u'v + uv'$
- dérivée d'un quotient de fonctions $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $v \neq 0$.

Entraînement 5. Puissance d'une lampe

La puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ d'un dipôle électrique est le produit de son intensité $i(t)$ par la tension à ses bornes $u(t)$. Supposons que lorsqu'on allume une lampe, les évolutions temporelles de ces deux grandeurs puissent s'écrire $i(t) = I_0 \frac{t}{1+t}$ et $u(t) = U_0 \left(\frac{3}{2} - \frac{t}{1+t}\right)$ où I_0 et U_0 sont des constantes positives. Quel est le sens de variation de l'intensité ? Même question pour la tension. À quel instant la puissance est-elle maximale ?

Dérivée d'une fonction composée

On appelle la fonction « g rond f », qui se note $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Par exemple si $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $f(x) = x+1$ alors :

- On peut² écrire $(g \circ f)(x) = \sqrt{1+(x+1)^2} = \sqrt{2+2x+x^2}$.
- On pourrait aussi écrire $(f \circ g)(x) = g(x) + 1 = \sqrt{1+x^2} + 1$.

² Pour simplifier nous ne parlons pas de quelques subtilités sur les intervalles de définition des fonctions f et g .

On admettra le résultat très utile suivant : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$ qui se retrouve très vite avec la notation de Leibniz : $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \times \frac{df}{dx}$. Exemple : on souhaite dériver la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$; remarquons qu'on pourrait écrire $g(x) = \sqrt{f(x)}$ en introduisant $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Ainsi la formule précédente donne : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x\sqrt{x^2+x}}$.

Entraînement 6. Dérivées de fonctions composées

Dériver les fonctions définies par les formules suivantes où A, B, ω, φ, k et c sont des constantes strictement positives : $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$; $g(x) = \sqrt{1 - k \cos x}$; $h(y) = \frac{1}{y^2+y+1}$; $\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$ et $j(t) = \cos\left(\frac{B}{t}\right)$.

4. Notion de développement limité

Vous avez peut-être déjà croisé des exercices dans lesquels des approximations ont été faites, par exemple « si α est petit, $\sin(\alpha) \approx \alpha$ », ou bien « si x est petit, on a $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ », ou bien encore « si a est petit, $\frac{1}{1+a} \approx 1 - a$ ». Vous pouvez d'ailleurs vérifier sur quelques exemple la pertinence de ces approximations avec votre calculatrice (attention pour le sinus il faudra une calculatrice en radians).

Prérequis : on appelle « **factorielle n** » la quantité notée :

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ avec **par convention** $0! = 1$.

La formule de Taylor-Young fait partie d'un théorème qu'on admettra :

Soit f une fonction de classe³ C^n sur un intervalle I . On peut écrire alors pour x « au voisinage de α » :

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x - \alpha)^n + R(x)$$

où R est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{R(x)}{(x-\alpha)^n} \right) = 0$; nous ne nous intéresserons pas davantage à cette fonction appelée « reste » qui sera notée de façon différente dans le cours de mathématiques. Cette formule nous donne ce que nous appelons **le développement limité de f en α à l'ordre n** , noté DL_n .

Par exemple, le DL_2 de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ en zéro est :

$$f(x) \approx 1 + \frac{f'(0)}{1}(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 = 1 - x + x^2$$

Vous aurez remarqué la présence du symbole $\approx$ pour signifier que nous n'écrivons plus ici la fonction reste. Si nous nous étions contentés de l'ordre 1, nous aurions vérifié que $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ quand x est petit. Remarquez qu'un développement limité

³ On dit qu'une fonction est « de classe C^n » si elle est dérivable n fois.

au premier ordre n'est autre que la formule de la tangente que vous étudiez en spécialité mathématiques !

Entraînement 7. Approximations au premier ordre

Montrer que si x est très petit (proche de zéro, mais positif), on a « au premier ordre » $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, puis de façon générale que $(1+x)^\beta \approx 1 + \beta x$ avec β un nombre réel. S'en servir pour calculer de tête $1,0002^3$. Montrer également que $\tan x \approx x$, toujours au premier ordre.

Exercices sur la dérivation

Exercice 1. Chute libre

En T.P., on peut analyser la chute d'un corps en le filmant ; un logiciel permet d'étudier sa hauteur $h(t)$ au cours du temps t par rapport au point d'impact sur le sol. L'objet choisi pour faire cette expérience est une bille métallique suffisamment dense pour pouvoir négliger la poussée d'Archimède que l'air exerce sur celle-ci et de diamètre suffisamment petit pour pouvoir négliger les frottements de l'air. On obtient les résultats suivants :

Temps t en secondes	Hauteur h en mètres	Carré du temps t^2 en s^2
0	1,00	
0,050	0,99	
0,100	0,95	
0,150	0,89	
0,200	0,80	
0,250	0,69	
0,300	0,56	
0,350	0,40	
0,400	0,22	

- À l'aide de votre calculatrice, finir de remplir le tableau et tracer h en fonction de t^2 . En déduire l'expression de $h(t)$ en fonction de t . On arrondira le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine trouvés par la calculatrice avec deux chiffres significatifs.
- La vitesse est la dérivée temporelle de la hauteur : $v = \frac{dh}{dt}$. Déterminer son expression en fonction de t .
- En déduire la valeur de l'accélération a , qui est la variation temporelle de vitesse, c'est-à-dire que par définition $a = \frac{dv}{dt}$.
- Justifier le signe de v et a .
- Sachant que l'objet accélère vers le bas du fait de son poids, à quelle constante physique bien connue s'apparente la valeur de l'accélération trouvée à la question précédente ?

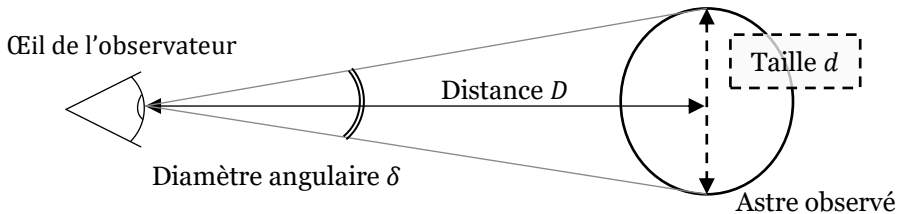
Exercice 2. Le zéro à 100 km/h

Au banc d'essai, la moto MV Agusta F4 1000S passe de zéro à 100 km. h⁻¹ en environ $t_1 \approx 3,1$ s (en ligne droite). La masse de l'ensemble {moto+pilote} est $m \approx 250$ kg.

1. En considérant que l'accélération de la moto est constante, montrer qu'elle vaut environ $a \approx 9,0$ m. s⁻².
2. En déduire l'expression de sa vitesse au cours du temps $v(t)$.
3. En déduire l'expression de la distance $x(t)$ qu'elle a parcourue.
4. Quelle distance a-t-elle parcourue à $t_0 \approx 1,5$ s ? Commenter.
5. Quelle est sa vitesse à $t_0 \approx 1,5$ s ? Commenter.

Exercice 3. Diamètre angulaire

De façon très générale en physique, le diamètre angulaire δ , c'est « l'angle sous lequel on voit un objet ». Par exemple, une pièce de 1 € placée à deux mètres de votre œil vous paraîtra du même diamètre que la Lune, qui est certes beaucoup plus grande, mais aussi beaucoup plus loin. Le calcul exact du diamètre angulaire d'un objet de taille d situé à une distance D fait bien sûr intervenir une fonction trigonométrique, mais comme la plupart des astres observés se situent très loin de la Terre, on peut sans problème faire une approximation qui simplifie grandement les calculs.



1. Déterminer la relation exacte entre d , D et δ .
2. Quelle approximation peut-on faire (DL₁ en zéro) de la fonction tangente sachant que $\delta \ll 1$?
3. Vérifier la comparaison faite dans l'énoncé entre la pièce de 1 € (qui a un diamètre d'environ deux centimètres) et la Lune (qui a un rayon de 1740 km et qui se trouve à environ 384 000 km).
4. En astronomie, les angles étant très petits, les scientifiques utilisent des « minutes d'arc » et des « secondes d'arc » plutôt que des radians et degrés ; les conversions sont 60 min d'arc = $60' = 1^\circ$ et 60 sec d'arc = $60'' = 1'$. Déterminer le diamètre angulaire du Soleil vu depuis la Terre en minutes et secondes d'arc (on rappelle que le Soleil se trouve à environ 150 millions de km de la Terre et qu'il a un diamètre d'environ 1,4 millions de km).

Exercice 4. Puissance électrique

Nous verrons au chapitre 8 sur les circuits électriques que la puissance électrique P (en watts W) d'un dipôle quelconque est égale à sa tension u (en volts V) multipliée par son intensité i (en ampères A). Considérons un dipôle dont la tension et l'intensité au cours du temps évoluent respectivement selon : $u(t) = 2,0 - 0,50t$ (en volts) et $i(t) = 0,030t$ (en ampères), avec t le temps exprimé en secondes.

1. La puissance de ce dipôle est-elle constante au cours du temps ?
2. Quelle est l'unité du « 0,50 » dans l'expression de la tension ?
3. Même question pour le « 0,030 » dans celle de l'intensité.
4. En quelle date $t_{\max}$ cette puissance est-elle maximale ?
5. Quelle est la valeur $P_{\max}$ de cette puissance maximale ?

Exercice 5. Position d'un écran pour obtenir une image

On montrera au chapitre sur les lentilles minces que lorsqu'on place un objet à une distance x d'une lentille convergente, pour observer l'image de cet objet, il faut placer un écran à une distance D de l'objet telle que $\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$ avec f' la focale de la lentille, qu'on prendra égale à 10 cm ici.

1. À quelle situation physiquement grotesque correspond le cas $x = D$?
2. Montrer qu'on peut exprimer D sous la forme $D(x) = \frac{x^2}{x-f'}$.
3. À quelle situation physiquement subtile correspond le cas $x = f'$?
4. Déterminer l'expression $D'(x)$ de la dérivée de D .
5. En quelle valeur x_0 a-t-on un minimum de D et que vaut ce minimum $D_{\min}$?

Corrigés des exercices et entraînements

Entraînement 1. Dérivée en zéro de la fonction cube

Par la définition on a $\frac{df}{dt}(0) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{(0+dt)^3 - 0^3}{dt} \right) = 0$. Le coefficient directeur de la tangente est nul donc celle-ci est horizontale, et surtout elle coupe la courbe (voir graphe de la fonction sur calculatrice).

Entraînement 2. Dérivée de la fonction inverse

Par définition : $\frac{df}{dy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{y+dy} - \frac{1}{y}}{dy} \right) = \lim_{dy \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{y-y-dy}{(y+dy)y}}{dy} \right) = \lim_{dy \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{(y+dy)y} \right)$; si $y \neq 0$, alors $dy \ll y$ et on peut écrire $\frac{df}{dy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{y^2} \right) = -\frac{1}{y^2}$; d'ailleurs, heureusement que $y \neq 0$ puisque la fonction n'est pas définie en zéro !

Entraînement 3. Vitesse et accélération

Si l'accélération est négative c'est que la vitesse est une fonction décroissante du temps, mais pas forcément négative. C'est d'ailleurs ce qui arrive quand on freine : l'accélération est vers l'arrière mais la vitesse est toujours vers l'avant.

Entraînement 4. Altitude d'un objet lancé vers le haut

L'altitude est maximale quand sa dérivée première (la vitesse) est nulle et sa dérivée seconde (l'accélération) est négative. La vitesse s'écrit $v = \frac{dz}{dt} = -gt + v_0$ et elle s'annule en $t_m = \frac{v_0}{g}$. Pour vérifier qu'il s'agisse bien d'un maximum d'altitude z , il faut alors vérifier que sa dérivée seconde (donc l'accélération) est négative, ce qui est effectivement le cas puisque $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$.

Entraînement 5. Puissance d'une lampe

Pour le courant on a $\frac{di}{dt} = \frac{I_0}{(1+t)^2} > 0$ donc une intensité croissante. Pour la tension on a $\frac{du}{dt} = -\frac{U_0}{(1+t)^2} < 0$ donc décroissante. La puissance est maximale quand $\mathcal{P}'(t) = 0$ et $\mathcal{P}''(t) < 0$, ce qui est vérifié pour $t = 3$ s. En effet la dérivée est nulle en cette valeur de t : $\mathcal{P}'(t) = \frac{di}{dt}u + i\frac{du}{dt} = \frac{I_0U_0(3-t)}{2(1+t)^3}$ et la dérivée seconde est négative en cette valeur de t : $\mathcal{P}''(t) = \frac{U_0I_0}{2} \times \frac{2t-10}{(1+t)^4}$.

Remarque : nous n'étions pas obligés de déterminer le signe de $\mathcal{P}''(t)$, il suffisait de remarquer que pour $t < 3$, $\mathcal{P}'(t) > 0$ (donc $\mathcal{P}$ croissante) et pour $t > 3$, $\mathcal{P}'(t) < 0$, (donc $\mathcal{P}$ décroissante) : il s'agit bien d'un maximum.

Entraînement 6. Dérivées de fonction composées

Pour f on a : $\frac{df}{dt} = A \cos(\omega t + \varphi) \times \frac{d}{dt}(\omega t + \varphi) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

Pour g on a : $\frac{dg}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-k \cos x}} \times \frac{d}{dx}(1 - k \cos x) = \frac{k \sin x}{2\sqrt{1-k \cos x}}$.

Pour h on a : $\frac{dh}{dy} = -\frac{1}{(y^2+y+1)^2} \times \frac{d}{dy}(y^2+y+1) = -\frac{2y+1}{(y^2+y+1)^2}$.

Pour γ on a : $\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \left((1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2} (1 + \beta^2)^{-\frac{3}{2}} \times \frac{d}{d\beta}(1 + \beta^2) = \frac{-\beta}{(\sqrt{1+\beta^2})^3}$.

Pour j on a : $\frac{dj}{dt} = -\sin\left(\frac{B}{t}\right) \times \frac{d}{dt}\left(\frac{B}{t}\right) = \frac{B}{t^2} \sin\left(\frac{B}{t}\right)$.

Entraînement 7. Approximations au premier ordre

Utilisons la formule de Taylor-Young dans le cas général (pour la racine, il suffit de voir qu'il s'agit du cas $\beta = \frac{1}{2}$) : soit $f(x) = (1+x)^\beta$, on a alors $f'(x) = \beta(1+x)^{\beta-1}$ donc $f(0) = 1$ et $f'(0) = \beta$, ce qui donne dans la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 : $(1+x)^\beta \approx 1 + \beta(x-0) = 1 + \beta x$. Pour la fonction

racine, on a alors effectivement $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$. On peut alors l'utiliser pour trouver que $(1,0002)^3 = (1 + 0,0002)^3 \approx 1 + 3 \times 0,0002 = 1 + 0,0006 = 1,0006$. Même méthode pour la fonction tangente, qui est par définition $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$: on en déduit $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ et il vient $\tan x \approx 0 + 1(x - 0) = x$.

Exercice 1. Chute libre

1. Les résultats répertoriés dans le tableau en fin de correction permettent de tracer le graphique de h en fonction de t^2 : on trouve une droite ne passant pas par l'origine, c'est donc que h est une fonction affine de t^2 , donc de la forme $h(t) = At^2 + B$, la calculatrice trouve via une régression linéaire un coefficient directeur $A = -4,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $B = 1,0 \text{ m}$ qui est la hauteur initiale.
2. En dérivant h , on trouve $v(t) = 2At \approx -9,8 t$.
3. De la même manière on trouve $a = 2A = -9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
4. h est décroissante, il est donc bien normal de trouver une vitesse (sa dérivée) négative ; même explication mathématique pour le signe de l'accélération (la vitesse augmente en norme, mais n'oublions pas qu'elle est négative, on a donc effectivement v décroissante) ; physiquement, on explique ces signes car les vecteurs vitesse et accélération sont orientés vers le bas tandis que nous comptons les distances positivement vers le haut (h est la hauteur de la balle).
5. $\|\vec{a}\| = g \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$: l'accélération de tout corps en chute libre est égal à g , c'est d'ailleurs pourquoi on s'en sert même d'unité d'accélération : une accélération de $2g$, c'est une accélération d'environ $2 \times 9,81 = 19,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Temps t en secondes	Hauteur h en mètres	Carré du temps t^2 en s^2
0	1,00	0
0,050	0,99	0,0025
0,100	0,95	0,0100
0,150	0,89	0,0225
0,200	0,80	0,0400
0,250	0,69	0,0625
0,300	0,56	0,0900
0,350	0,40	0,123
0,400	0,22	0,160

Exercice 2. Le zéro à 100 km/h

1. $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \approx 27,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, il vient alors $a = \frac{27,8-0}{3,1} = 9,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
2. On cherche une fonction qui donne a lorsqu'on la dérive et qui vaut zéro à l'instant initial $t = 0$, seule $v(t) = at \approx 9,0 t$ vérifie ces deux conditions.
3. De la même façon on a $x = \frac{a}{2}t^2 \approx 4,5 t^2$.
4. $x(1,5) = 4,5 \times (1,5)^2 \approx 10 \text{ m}$: à la moitié du temps total de parcours, la moto n'est pas à la moitié du parcours $x(3) \approx 40 \text{ m}$.

5. $v(1,5) \approx 13,4 \text{ m.s}^{-1} \approx 48 \text{ km.h}^{-1}$ qui est environ la moitié de la vitesse finale.

Remarque : dans le cas d'une d'accélération constante (mouvement uniformément accéléré), la vitesse évolue de façon linéaire, mais pas la distance parcourue !

Exercice 3. Diamètre angulaire

1. En observant le triangle formé du segment œil-centre de l'astre et du rayon de l'astre, on trouve $\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{d}{2D}$.
2. Comme l'angle est très petit ($\delta \ll 1$), on peut écrire à l'ordre 1 en zéro que $\frac{d}{2D} = \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) \approx \frac{\delta}{2}$ d'où $\delta \approx \frac{d}{D}$.
3. $\delta_{1\epsilon} \approx \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2} = 10^{-2} \text{ rad} \approx 0,573^\circ$ et $\delta_{Lune} \approx \frac{2 \times 1740}{384\,000} = 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,519^\circ$: on a bien le même ordre de grandeur.
4. $\delta_{Soleil} \approx \frac{1,4}{150} = 9,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,535^\circ \approx 32' 6''$; la comparaison faite avec la pièce d'un euro peut également être utilisée pour le Soleil, attention cependant à ne pas regarder celui-ci directement au risque de brûler votre rétine !

Exercice 4. Puissance électrique

1. La puissance de ce dipôle n'est clairement pas constante puisque son expression fait apparaître le temps $P(t) = 0,060t - 0,015t^2$.
2. Le « 0,50 » dans l'expression de la tension est nécessairement en V.s^{-1} pour que, multiplié par t , il donne des volts.
3. Avec un même raisonnement on trouve que 0,030 est en A.s^{-1} .
4. La dérivée de la puissance étant $\frac{dP}{dt} = 0,030 - 0,015t$, on remarque qu'elle est positive quand $t < t_{\max} = \frac{0,030}{0,015} = 2,0 \text{ sec}$, négative quand $t > t_{\max}$ et nulle en $t = t_{\max}$: date à laquelle P est effectivement maximale ; on aurait aussi pu dire que $\frac{d^2P}{dt^2} = -0,015 < 0$ pour justifier d'un maximum.
5. $P_{\max} = P(2,0) = 0,120 - 0,015 \times 4,0 = 60 \text{ mW}$.

Exercice 5. Position d'un écran pour obtenir une image

1. $x = D$ correspond à l'écran collé à la lentille... inutile d'y chercher une image !
2. $\left(\frac{1}{D-x} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{x} = \frac{x-f'}{xf'}\right) \Leftrightarrow \left(D = x + \frac{xf'}{x-f'} = \frac{x^2 - xf' + xf'}{x-f'} = \frac{x^2}{x-f'}\right)$ CQFD.
3. En physique il est impossible d'avoir exactement $x = f'$, on a $x - f'$ très petit et D très grand (positif ou négatif suivant que x est supérieur ou inférieur à f').
4. $D'(x) = \frac{2x(x-f') - x^2 \times 1}{(x-f')^2} = \frac{x^2 - 2xf'}{(x-f')^2} = \frac{x(x-2f')}{(x-f')^2}$ par dérivation d'un quotient.
5. D' s'annule en $x = 0$ (situation grotesque où l'on colle l'objet à la lentille) et pour $x_0 = 2f'$, d'ailleurs $D'(x)$ y est négative puis positive : on a bien un minimum pour lequel $D_{\min} = 4f' = 40 \text{ cm}$.

Réfraction et réflexion

De Snell le Néerlandais ou de Descartes le Français, qui a été le premier à découvrir les lois de la réfraction de la lumière ? Snell en 1621 mais sans démonstration et sans mettre en évidence son importance, ou Descartes, 16 années plus tard certes, mais dans un ouvrage très clair ? Une triste querelle puisqu'avant eux d'autres scientifiques n'étaient pas loin non plus de l'énoncer : Ibn Sahl, Johannes Kepler, etc.

1. Vitesse de la lumière et indice optique

Dans un milieu transparent noté X (eau, verre, plexiglas, etc.), la lumière se propage à une vitesse qu'on notera v_X , inférieure à celle dans le vide ($c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$). Par exemple, la vitesse de la lumière dans l'eau pure est $v_{\text{eau}} = 2,25 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$, dans un verre classique $v_{\text{verre}} = 2,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$, etc.

Remarque : autant la valeur $3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est une limite de vitesse indépassable du fait de la structure de l'espace et du temps, autant certaines particules peuvent se déplacer plus vite que la lumière *dans un milieu matériel* ! De même que le franchissement du mur du son par un avion crée un grand « bang », le dépassement de la vitesse de la lumière (dans une substance) par une particule crée un flash lumineux, c'est ce qu'on appelle l'effet Tcherenkov, qui provoque notamment la couleur bleue de l'eau entourant les réacteurs nucléaires.

Définissons une grandeur qui sera très utile pour mettre en équation les lois de la propagation de la lumière, **l'indice optique d'un milieu transparent X , noté n_X et défini par :**

$$n_X = \frac{c}{v_X}$$

Entraînement 1. Indices de réfraction

Sans calculatrice, déterminer l'indice optique de l'eau et du verre (les valeurs des vitesses de la lumière dans ces milieux vous ont été données dans le précédent paragraphe), puis donner la valeur de la célérité de la lumière dans le diamant D pour lequel $n_D \approx 2,5$.

Remarques :

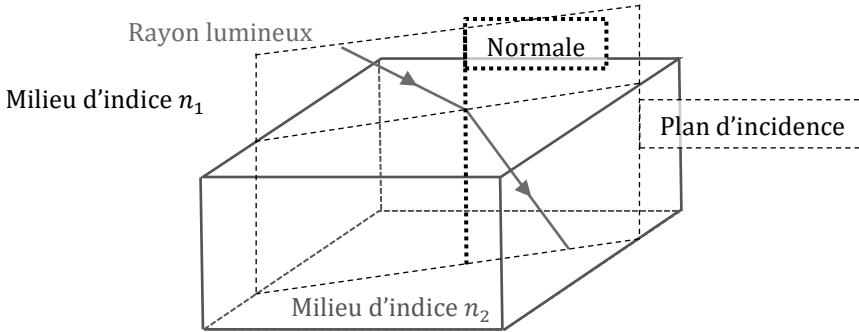
- La vitesse de la lumière étant forcément plus grande dans le vide que dans un « milieu X », on a : $c \geq v_X$, donc **l'indice optique vérifie forcément : $n_X \geq 1$.**
- Faisons l'analyse dimensionnelle de l'indice optique d'un milieu grâce à sa définition : $\dim(n) = \frac{\dim(c)}{\dim(v)} = \frac{\frac{L}{T}}{\frac{L}{T}} = 1$: **l'indice optique est sans dimension.**
- Il est à savoir que $n_{\text{air}} \approx n_{\text{vide}} = 1$.

2. Les lois de Snell – Descartes

2.1. Vocabulaire

Pour être sûrs de parler le même langage, il nous faut poser quelques définitions. Lorsque la lumière passe d'un milieu transparent à un autre, sa direction de propagation change, c'est ce qu'on appelle **la réfraction** de la lumière. **La surface délimitant les deux milieux est appelée l'interface.**

- **Rayon incident** = le rayon qui « arrive » sur l'interface
- **Rayon réfracté** = le rayon qui « part » de l'interface
- **Normale** = droite orthogonale à l'interface passant par le rayon



2.2. Les deux lois concernant la réfraction

La première loi de Snell-Descartes concernant le phénomène de réfraction de la lumière s'énonce ainsi : **le rayon incident, le rayon réfracté et la normale sont dans un même plan, appelé plan d'incidence.** La deuxième loi de Snell-Descartes concernant le phénomène de réfraction de la lumière s'énonce ainsi : en notant i_1 l'angle d'incidence (entre la normale et le rayon incident) et i_2 l'angle de réfraction (entre la normale et le rayon réfracté) on a :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

Remarque : dans certains livres, l'angle de réfraction est noté r .

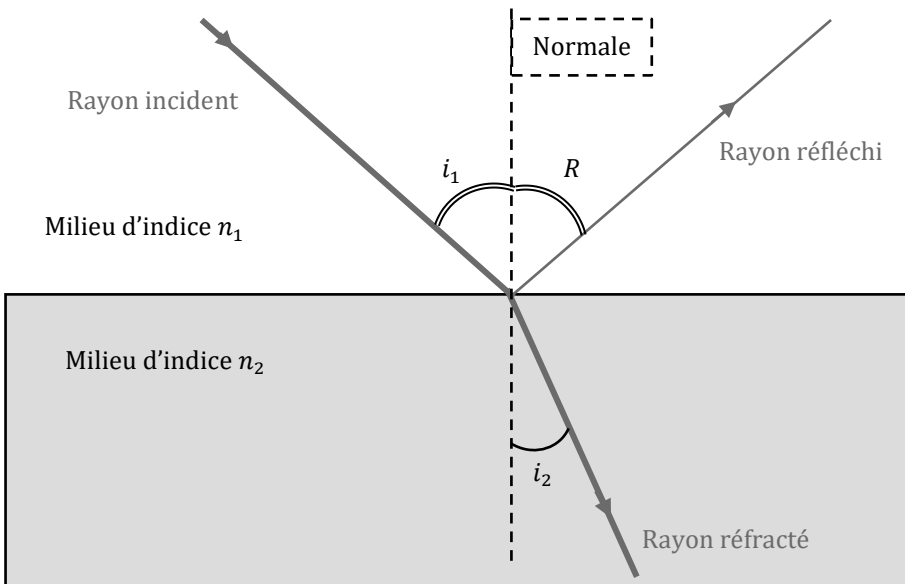
Entraînement 2. Réfraction d'un rayon lumineux

Un rayon lumineux passe de l'air à un matériau plastique transparent d'indice optique $n = 1,4$ avec un angle d'incidence $i_1 = 45^\circ$. Déterminer i_2 sans calculatrice, en remarquant que $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Dans cet entraînement, on fait l'observation suivante : **lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu d'indice « petit » à un milieu d'indice « grand », l'angle de réfraction est inférieur à celui d'incidence.** Rigoureusement, la précédente phrase s'écrit mathématiquement : $n_2 > n_1 \Rightarrow i_2 < i_1$.

2.3. Les deux lois de la réflexion

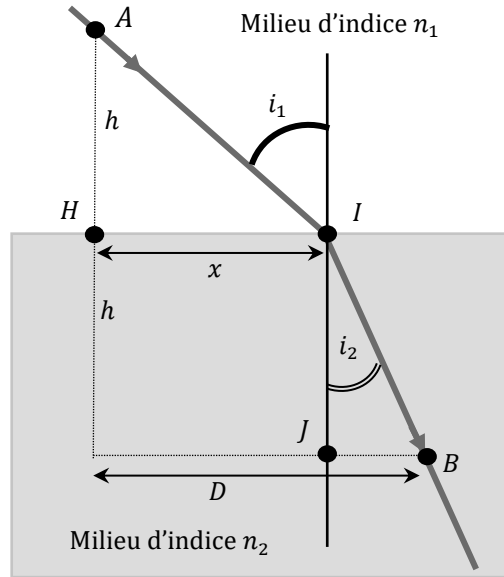
En fait, **il n'y a qu'une partie du faisceau lumineux qui traverse l'interface ! Une autre partie est réfléchi par celle-ci**, comme illustré sur le schéma suivant. Le professeur de physique de la classe de seconde vous a d'ailleurs certainement montré ce phénomène, mais il est en fait observable dans la vie de tous les jours, lorsqu'on regarde à travers les fenêtres : on voit toujours une légère réflexion. Lorsque la nuit tombe et que presque plus aucune lumière ne provient de l'extérieur, les vitres jouent un parfait rôle de miroir puisqu'il ne subsiste plus que les rayons réfléchis par celles-ci !



La première loi de Snell-Descartes concernant la réflexion s'énonce ainsi : **le rayon incident, le rayon réfléchi et la normale sont dans le plan d'incidence.** La deuxième loi de Snell-Descartes concernant la réflexion s'énonce : $i_1 = R$ où R est l'angle de réflexion, entre la normale et le rayon réfléchi.

2.4. Le principe de Fermat

Il s'énonce ainsi : pour aller d'un point A à un point B , la lumière emprunte le chemin qui minimise le temps de parcours. Il vient immédiatement que dans un milieu transparent homogène, la lumière se déplace en ligne droite : c'est le chemin le plus court pour aller d'un point A à un point B (en distance certes, mais également, et surtout, en temps !).



À partir de ce principe, on peut démontrer la seconde loi de Snell-Descartes de la réfraction ! Considérons le schéma précédent en y introduisant quelques notations : les points A, I, B, J et H tels que :

- H projeté orthogonal de A sur l'interface, J celui de B sur la normale
- I le point d'incidence (intersection rayon / interface)
- $AH = IJ = h$ et D deux valeurs fixées
- $HI = x$ la variable du problème.

Entraînement 3. Démonstration de la loi de la réfraction

Faire la démonstration de $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ en trois étapes :

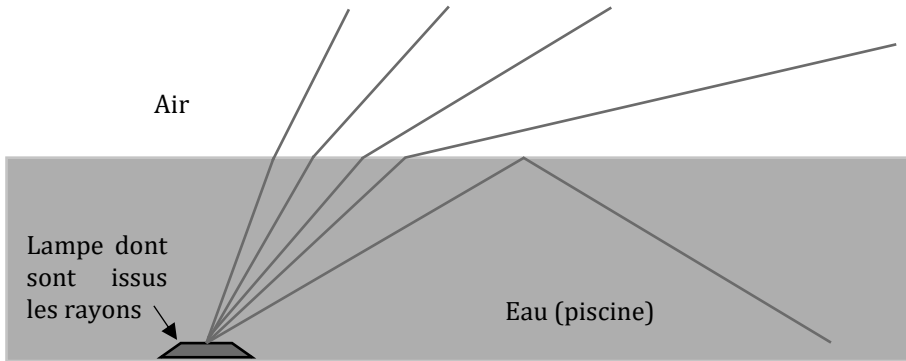
1. Exprimer le temps t que met la lumière pour aller de A à B en fonction de x, h, D, c, n_1 et n_2 . Puisque t dépend de x , c'est une fonction de la variable x .
2. D'après le principe de Fermat, la valeur de x qui va effectivement être « choisie » par la lumière doit minimiser le temps de parcours t ; que peut-on donc dire de sa dérivée $t'(x)$? En déduire une équation qui relie x, n_1, n_2, h et D .
3. En écrivant les expressions de $\sin(i_1)$ et $\sin(i_2)$ en fonction de x, h et D , récrire l'équation précédente pour faire apparaître la loi de la réfraction.

3. Le phénomène de réflexion totale

On se fait une bonne idée de ce phénomène lorsqu'on s'intéresse au problème suivant : considérons des rayons lumineux issus d'une lampe située au fond d'une piscine se dirigeant vers la surface avec des angles d'incidence à l'interface eau-air donnés dans la première ligne du tableau. Dans la deuxième ligne du tableau on donne les angles de réfraction respectifs. L'eau a un indice $n \approx 1,33$.

Angle d'incidence (en °)	20	30	40	47	60
Angle de réfraction (en °)	27	42	59	77	Erreur

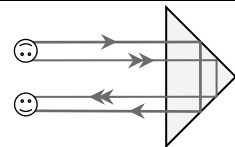
Si on fait un schéma de quelques-uns de ces rayons (ci-dessous), on voit que l'angle de réfraction est plus grand que l'angle d'incidence. D'ailleurs, si on prend un angle d'incidence de 60°, la calculatrice indique une erreur : en effet, pour un angle supérieur à une certaine valeur appelée « angle d'incidence limite », il n'y a plus de rayon réfracté : la totalité du rayon est réfléchi comme précisé sur le schéma.



De façon générale, lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu de fort indice à un milieu de faible indice, on a $i_2 > i_1$. Pour une certaine valeur de i_1 appelée **angle d'incidence limite** (i_L), on a $i_2 = 90^\circ$. Si $i_1 > i_L$ alors il n'y a plus de rayon réfracté : la totalité du rayon incident est réfléchi, c'est ce qu'on appelle la **réflexion totale**. De façon générale, comme $n_1 \sin i_L = n_2 \sin 90$, on peut retenir $i_L = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$. Cela dit, il est peut-être préférable de retenir les raisonnements faits ci-dessus, plutôt qu'une formule supplémentaire, qui ne découle que du domaine restreint de définition de la fonction arc sinus.

Entraînement 4. Réflexion totale

Dans les jumelles, on utilise un prisme pour redresser l'image, souvent d'indice optique $n = 1,57$ (BaK-4). A-t-on bien réflexion totale dans le cas d'un rayon qui arrive à 45° comme sur le schéma ci-contre ?



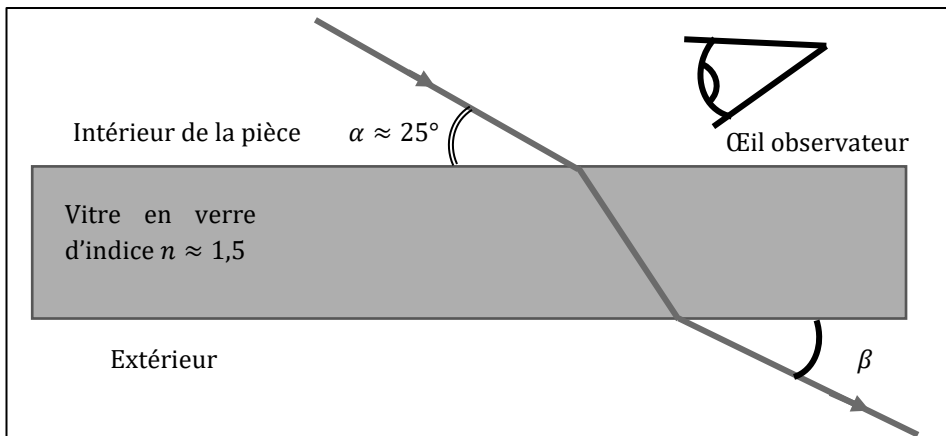
Exercices sur la réfraction et la réflexion

Exercice 1. Regarder par la fenêtre

Sur la photo ci-dessous à gauche, prise à la tombée de la nuit, on voit clairement le reflet du tableau dans la vitre. Des chercheurs du MIT¹ et de Google ont récemment trouvé un algorithme permettant de supprimer les reflets non-voulus ! Malheureusement, cela n'empêchera sûrement pas les partisans de la théorie du complot de poster sur internet des photos où le reflet de leur lustre de cuisine fait office de soucoupe volante (à droite). Lorsqu'un rayon lumineux traverse une vitre, celui-ci est dévié comme l'indique le schéma en fin d'exercice.

Traitement informatique du reflet du tableau  http://www.frandroid.com/culture-tech/301187_algorithme-magique-supprimer-reflets-photos	Reflet d'un lustre dans une vitre  http://www.cnes-geipan.fr/index.php?id=357
--	--

1. Déterminer la valeur de l'angle de réfraction i_2 à l'intérieur de la vitre.
2. Les deux faces de la vitre étant parallèles, en déduire la valeur de l'angle β .
3. Tracer le rayon manquant qui explique que l'œil de l'observateur peut voir l'objet dont est issu le rayon lumineux que nous venons d'étudier



¹ Massachusetts Institute of Technology.

Exercice 2. De vrais diamants ?

Le tableau ci-dessous liste des cristaux très utilisés pour imiter les diamants. Pour déterminer si une pierre est une imitation de diamant ou pas, des élèves mènent une expérience : ils envoient un faisceau lumineux sur un cristal « imitation de diamant » et pour diverses valeurs de l'angle d'incidence i , ils notent la valeur de l'angle de réfraction r . Les résultats qu'ils obtiennent sont répertoriés dans le deuxième tableau. Remarque : le « milieu 1 » est l'air et le « milieu 2 » est le cristal étudié.

1. Compléter le deuxième tableau.
2. Tracer le graphe de $\sin(i)$ en fonction de $\sin(r)$.
3. Calculer le coefficient directeur et en déduire de quelle imitation il s'agit.

Nom	Densité	Indice optique	Dureté	Formule chimique
Moissanite	3,21	Entre 2,65 et 2,69	9,25	SiC
Oxyde de zirconium	6	2,16	8,5	ZrO ₂
Strass	Entre 2 et 4,5	Entre 1,44 et 1,77	Entre 5,5 et 7	PbO

Angle d'incidence i (en °)	20	30	40	50	60
Angle de réfraction r (en °)	9,1	13,4	17,3	20,8	23,6
$\sin(i)$					
$\sin(r)$					

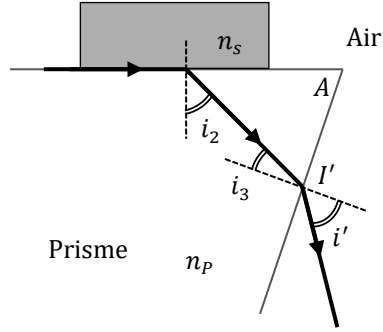
Exercice 3. Le réfractomètre d'Abbe (CG 2014)

On cherche à déterminer si une substance inconnue S est l'acide méthacrylique, liquide incolore à température ambiante ; pour cela, on peut mesurer son indice de réfraction n_s avec un réfractomètre tel que celui sur la photo ci-dessous.

Ce réfractomètre fonctionne sur le principe suivant : des rayons lumineux passent de la substance S avec un angle d'incidence i_1 à un prisme (d'indice $n_p = 1,70$ et d'angle au sommet $A = 61,0^\circ$) avec l'angle de réfraction i_2 . Ce rayon réfracté joue le rôle de rayon incident pour la deuxième interface prisme-air où il arrive avec un angle d'incidence i_3 et donne, dans l'air, un angle de réfraction $i' = 6,4^\circ$ (cf. schéma).



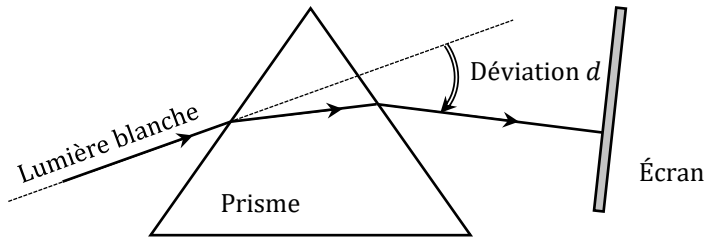
1. Déterminer la valeur de i_3 .
2. Trouver une relation entre i_2, i_3 et A puis en déduire la valeur de i_2 .
3. Dans le réfractomètre d'Abbe, le rayon lumineux arrive sous incidence « rasante », c'est-à-dire que $i_1 = 90^\circ$. Déterminer alors l'indice optique (noté n_s) de la substance étudiée.



4. Pour faire tous les calculs précédents, il faut évidemment que le faisceau lumineux puisse émerger du prisme. Quelle est la valeur minimale de n_s pour qu'un rayon puisse effectivement émerger du prisme ? Faut-il effectivement s'inquiéter de la valeur de n_s ?

Exercice 4. Spectroscopie à prisme (CCINP 2012)

On considère un prisme en verre dont l'indice évolue en fonction de la longueur d'onde λ suivant la loi de Cauchy : $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$ avec a et b deux constantes positives. Ce prisme a un angle au sommet $A = 60,00^\circ$. On y envoie un fin pinceau de lumière blanche parallèle, sous incidence $i = 60,00^\circ$ par rapport à la normale à la face d'entrée du prisme. La lumière émerge sous un angle $\theta(\lambda)$ (cet angle dépend effectivement de la longueur d'onde) par rapport à la normale à la face de sortie du prisme. On note d la déviation, c'est-à-dire l'angle entre le rayon incident de la face d'entrée du prisme et le rayon émergent de sa face de sortie.

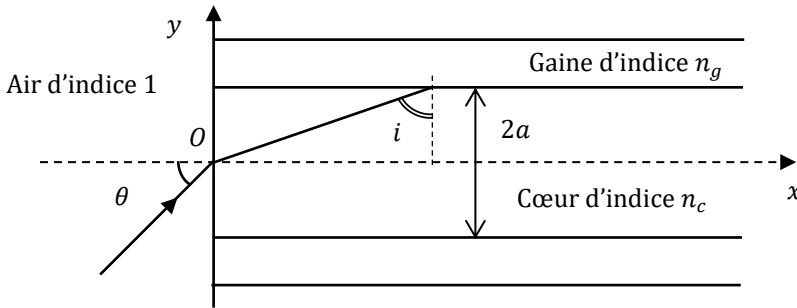


1. Exprimer d en fonction de A, i et θ exclusivement.
2. Si on mesure d pour diverses valeurs de i , on observe qu'il existe une valeur minimale de d , notée d_{min} , qui est obtenue lorsque $i = \theta$. Exprimer n en fonction de d_{min} et A .
3. Un rayon rouge est-il plus ou moins dévié qu'un rayon bleu ?
4. Un binôme d'élèves a trouvé $d_{min}^R = 35,07^\circ$ pour le rouge ($\lambda_r \approx 650 \text{ nm}$) et $d_{min}^B = 35,84^\circ$ pour le bleu ($\lambda_b \approx 440 \text{ nm}$). En déduire les valeurs des paramètres a et b de la loi de Cauchy.

Exercice 5. La fibre optique (CG 2006)

Une fibre optique est un cylindre de silice appelé cœur (indice $n_c = 1,500$), entouré d'une gaine dont l'indice $n_g = 1,470$ est très légèrement inférieur. On envoie sur cette gaine un rayon lumineux ayant un angle d'incidence θ donné (voir figure ci-dessous : vue de côté de la gaine).

1. Pour quelle valeur i_L de l'angle d'incidence à l'interface cœur-gaine y a-t-il réflexion totale ?
2. En déduire la valeur maximale de θ , notée θ_L , pour qu'un rayon puisse se propager dans la fibre.
3. Soit L la longueur de la fibre, exprimer en fonction de c et n_c le temps t_m que met un rayon arrivant en incidence normale $\theta = 0$ pour traverser la fibre.
4. Déterminer l'expression du temps t_M maximal que met un rayon pour traverser la fibre, en fonction de L, c et des indices n_c et n_g .
5. Déterminer l'expression de l'écart $\delta t = t_M - t_m$ entre ce temps et le temps de parcours minimal t_m du rayon qui met le moins de temps à traverser la fibre.
6. On pose $2\Delta = 1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}$. Montrer que si $\Delta \ll 1$ (ce qui est le cas pour les fibres optiques), on a $\delta t \approx \frac{L}{c} n_c \Delta$.
7. On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse très brève, de durée $t_0 = 1,0 \mu\text{s}$ et formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_L . Quelle est la durée approximative de l'impulsion lumineuse en sortie d'une fibre d'un kilomètre de long ?



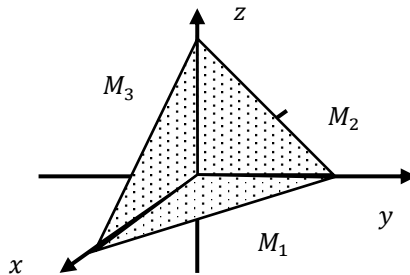
Exercice 6. Rétroreflecteur en « coin de cube » (CG 2004)

1. La distance Terre – Lune a été mesurée à l'aide d'un faisceau LASER dirigé vers la Lune, sur laquelle on a déposé un miroir lors d'une précédente mission spatiale. La durée de l'aller – retour a été mesurée : $\Delta t = 2,56$ s. En déduire la valeur de la distance Terre – Lune en km.
2. Pour que l'envoi et la réception du faisceau LASER puisse se faire au même endroit sur Terre, on a utilisé un miroir « coin de cube » dont traite les questions suivantes. Si nous avons utilisé un miroir plan, quel devrait-être l'angle d'incidence maximal du rayon incident pour que la réception du faisceau se fasse à moins de deux mètres de l'émission ? On attend le résultat en secondes d'arc (notées $''$) ; on rappelle que $1^\circ = 3600''$. On considère dans cette question que la Lune et la Terre sont immobiles.

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On considère un miroir dont la surface plane réfléchissante M_1 est confondue avec le plan (xOy) .

3. Un rayon lumineux, dont la direction est définie par le vecteur unitaire $\vec{u}$ de coordonnées (a, b, c) , subit une réflexion sur M_1 . Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}_1$, caractérisant la direction du rayon réfléchi.
4. Préciser les coordonnées du point A_1 , image d'un point quelconque $A(x, y, z)$ par le miroir M_1 .

On considère maintenant un « coin de cube » $\mathcal{C}$: ensemble de trois miroirs plans identiques M_1, M_2 et M_3 constituant les trois faces d'un trièdre trirectangle $Oxyz$ (voir figure ci-dessous). Des rayons lumineux, issus d'un point source $A(x, y, z)$ très éloigné de O $(0,0,0)$, arrivent sur $\mathcal{C}$ et sont successivement réfléchis par les trois faces M_1, M_2 et M_3 .



5. Montrer que ces rayons sont réfléchis dans la direction du point A .
6. Quelle relation géométrique existe-t-il entre les points A, O et A' (image de A donnée par le « coin de cube ») ?
7. Commenter les avantages de ce réflecteur $\mathcal{C}$ par rapport à l'utilisation d'un simple miroir plan.
8. Revenons sur l'hypothèse de la Terre fixe de la deuxième question : sachant que celle-ci tourne à raison d'un tour en 24 h et qu'elle a un rayon moyen d'environ $R = 6400$ km, de quelle distance a bougé le laboratoire pendant les $\Delta t = 2,56$ s de l'aller-retour du rayon lumineux ?