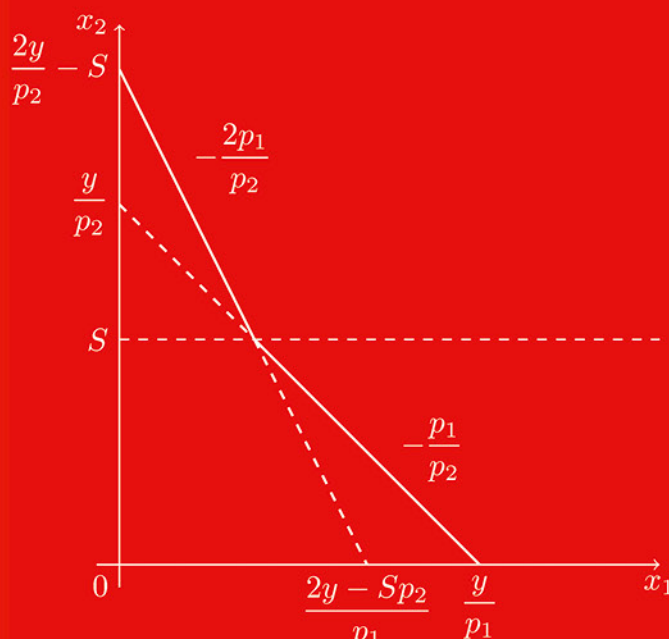


Bosco Menard

Annales corrigées de **MICROÉCONOMIE**

Épreuve de concours de
l'**ENS Paris-Saclay** et de l'**EDHEC**

$$\frac{\partial CM_{CT}(Y)}{\partial Y} - \frac{w}{Y^2} \left(\frac{Y}{2} - \frac{w}{Y} \left(\frac{Y}{2} - \frac{w}{Y} \left(\frac{Y - K}{3} \right) \right) \right)$$



$$\overbrace{\frac{\partial x_1(p_1, p_2, R)}{\partial p_2}}^{ET_{x_1}}$$

$$- \frac{rK_0}{Y^2} = 0$$

ellipses

Annales corrigées de **MICROÉCONOMIE**

Épreuve de concours
de l'**ENS Paris-Saclay** et de l'**EDHEC**

Annales corrigées de **MICROÉCONOMIE**

Épreuve de concours
de l'**ENS Paris-Saclay** et de l'**EDHEC**

Bosco Menard



ISBN 9782340-116535

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Chères lectrices, chers lecteurs,

C'est avec une grande fierté que je vous propose ce recueil des annales des épreuves de microéconomie des concours de l'École normale supérieure Paris-Saclay (ex-Cachan) et de l'EDHEC. Conçu pour accompagner les préparateurs dans leur quête d'excellence académique, cet ouvrage se veut un outil indispensable pour tous ceux qui désirent se préparer de manière rigoureuse et complète en microéconomie.

Ce livre rassemble l'ensemble des sujets de 2013 à 2025. Chaque correction est accompagnée d'explications détaillées et, le plus souvent possible, d'illustrations graphiques ou d'applications numériques visant à aiguiser vos compétences en résolution de problèmes et en pensée analytique.

J'espère que ce livre sera une aide précieuse tout au long de votre préparation et qu'il vous aidera à réaliser vos ambitions.

Puisse votre parcours être couronné de succès et de découvertes enrichissantes.

Bon courage à toutes et à tous pour votre préparation,

Bosco Menard

Remerciements

Un grand merci à mes courageuses relectrices et mes vaillants relecteurs : Première génération : Latifa B., Antony F., Esteban G., Valeriia S., Elias S., Ornella T., Lisa W., Tashya W., et Nicolas Z.

Seconde génération : Adam A., Eliott B., Louis F., Mathis F., Christophe H., Adam J., Yanis N., Clément S., Enzo S., et Samuel V. Votre travail a été précieux et apprécié.

Toute erreur subsistante relève bien évidemment de ma responsabilité.

Un très grand merci enfin à Stéphane Jacoupy : ton amicale aide organisationnelle depuis mon arrivée à Strasbourg a rendu la réalisation de cet ouvrage possible.

Bosco Menard

Table des matières

SUJETS ENS

Sujet 2013.....	13
Corrigé.....	17
Sujet 2014.....	31
Corrigé.....	35
Sujet 2015.....	53
Corrigé.....	56
Sujet 2016.....	69
Corrigé.....	73
Sujet 2017.....	99
Corrigé.....	103
Sujet 2018.....	125
Corrigé.....	129
Sujet 2019.....	145
Corrigé.....	149
Sujet 2020.....	165
Corrigé.....	169
Sujet 2021.....	181
Corrigé.....	185
Sujet 2022.....	207
Corrigé.....	211
Sujet 2023.....	223
Corrigé.....	228
Sujet 2024.....	247
Corrigé.....	251
Sujet 2025.....	271
Corrigé.....	275

SUJETS EDHEC

Sujet 2020	297
Corrigé.....	300
Sujet 2021.....	309
Corrigé.....	312
Sujet 2022	321
Corrigé.....	324
Sujet 2023	331
Corrigé.....	334
Sujet 2024.....	345
Corrigé.....	348
Sujet 2025	363
Corrigé.....	366

SUJETS ENS

Sujet 2013

On étudie l'arbitrage travail-loisir d'un individu. Cet individu partage son temps disponible total T entre travail l_1 et loisir l_0 . Le temps consacré au travail génère un revenu wl_1 (où w représente le taux de salaire) qui permet à l'individu de consommer le bien de consommation x . On note px la dépense de consommation (où p est évidemment le prix du bien de consommation). La fonction d'utilité du consommateur, $u(x, l_0)$, traduit le fait que le bien-être de ce dernier dépend de son niveau de consommation x et de son loisir l_0 ($x \geq 0, l_0 \geq 0$).

1. Écrivez la contrainte budgétaire du consommateur en y faisant apparaître les consommations de bien et de loisir (x et l_0).
2. On suppose, dans un premier temps, que la fonction d'utilité du consommateur, de type exponentielle négative, s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, l_0) = -e^{-ax-bl_0}$$

où $a > 0$ et $b > 0$.

- (a) Le fait que cette utilité soit négative vous paraît-il problématique ? Justifiez précisément votre réponse.
- (b) Une courbe d'indifférence de ce consommateur dans le plan (x, l_0) se définit comme suit :

$$u(x, l_0) = -e^{-ax-bl_0} = K$$

- i. Quelles sont les conditions qui doivent être satisfaites par le paramètre K pour garantir la vraisemblance économique ?
- ii. Représentez une courbe d'indifférence dans le plan (x, l_0) .
- iii. Donnez l'expression du taux marginal de substitution entre les 2 biens.

- iv. Quelle propriété caractérise les biens x et l_0 ?
- (c) Représentez, sur le même graphique, la contrainte budgétaire du consommateur. A votre avis, quels types de solution devraient émerger ?
- (d) Résolvez le problème du consommateur et décrivez son comportement de demande en bien de consommation et en loisir, ainsi que son comportement d'offre de travail, en fonction du rapport de prix en vigueur.
3. La fonction d'utilité du consommateur s'écrit désormais de la façon suivante : $u(x, l_0) = -e^{-ax} - e^{-bl_0}$ avec $a > 0$, $b > 0$.
- (a) Résolvez le problème du consommateur (**solution intérieure seulement**) et calculez les fonctions de demande en consommation et loisir, $x(p, w, T)$ et $l_0(p, w, T)$, ainsi que la fonction d'offre de travail $l_1(p, w, T)$.
- (b) Selon ce modèle, comment évolue l'offre de travail en cas d'inflation (i.e. lorsque le prix à la consommation p augmente) ? Comment interprétez-vous ce résultat ? (aide : vous supposerez p relativement grand afin d'obtenir une conclusion tranchée)
- (c) Que se passe-t-il si le prix à la consommation p et le taux de salaire w évoluent pareillement ?
- (d) Quel sens économique donnez-vous aux paramètres a et b ?
- (e) Comment l'individu ajuste-t-il sa demande de loisir lorsque le paramètre a augmente ?
4. On quitte provisoirement le cadre de l'arbitrage travail-loisir et l'on suppose que l'individu vit durant 1 ou 2 périodes. Pour simplifier, on néglige toute actualisation (autrement dit, on suppose que l'individu est indifférent entre recevoir 1 euro aujourd'hui ou demain) et l'on suppose que les prix, p et w , sont stables. En période 1, l'individu travaille et perçoit un revenu y_1 . Cependant, il n'est pas certain d'atteindre la 2^{de} période : sa probabilité de survie en période 2 est égale à q ($0 < q < 1$). En 2^{de} période, l'individu est à la retraite et ne travaille pas. Il doit donc financer sa consommation de 2^{de} période à l'aide du revenu perçu en 1^{ère} période. Pour réaliser cet objectif, on suppose que l'État a mis en place un système obligatoire de retraite de type rente viagère : les individus cotisent en 1^{ère} période et les sommes prélevées durant cette période sont entièrement redistribuées aux survivants en 2^{de} période. On note C le montant de cotisation versé ; cette cotisation donne droit au versement d'un revenu y_2 à l'individu.
- (a) On suppose que le système de retraite est équilibré : les cotisations prélevées sont intégralement redistribuées ; les coûts de transactions sont négligeables. Sachant qu'un individu qui survit en 2^{de} période, paie C en 1^{ère} période afin d'obtenir en échange un revenu y_2 en 2^{de} période, quelle relation lie C et y_2 ?

- (b) En déduire les contraintes budgétaires de 1ère période et de 2nde période. Ne pas omettre le fait que le revenu de 1ère période, y_1 , se partage entre consommation et cotisation.
- (c) On suppose que l'individu évalue son bien-être à partir de sa fonction d'utilité $u(\cdot)$, supposée strictement concave ($u'(\cdot) > 0$, $u''(\cdot) < 0$). Le bien-être de chaque période est caractérisé par une utilité $u(x_i)$ mais l'individu tient compte du fait que la 2nde période présente une probabilité q de survenir. Sur l'ensemble des 2 périodes, le bien-être de l'individu s'exprime donc par son espérance d'utilité : $u(x_1) + qu(x_2)$.
- Montrez que le problème de l'individu consiste à maximiser son espérance d'utilité en fonction de x_1 et x_2 , sous une contrainte à préciser.
 - Résolvez ce problème. En déduire les expressions de C , x_1 , x_2 et y_2 en fonction de y_1 .
 - Comment évolue la cotisation C lorsque la probabilité de survie augmente? Corrélativement, comment évoluent les niveaux de consommation x_1 et x_2 ?
 - Ce modèle de système de retraite effectue une redistribution en faveur des survivants. Est-ce une caractéristique présente dans tous les systèmes de retraite que vous connaissez?
 - En quoi ce modèle apporte-t-il un éclairage quant à l'évolution de notre système de retraite? Argumentez précisément.
5. On généralise maintenant le contexte de la question 4) afin d'y intégrer la question de l'arbitrage travail-loisir. En 1ère période, l'individu partage son temps total T entre loisir l_0 et travail l_1 . Ce travail génère un revenu $y_1 = wl_1$, qui lui permet de financer sa consommation courante (px_1), ainsi que la cotisation de retraite C . En 2nde période, l'individu a une probabilité de survie q ($0 < q < 1$) et le système de retraite lui garantit, le cas échéant, un revenu y_2 selon exactement le même principe que dans la question 4). Ce revenu y_2 lui permet d'effectuer sa dépense de consommation (px_2). Comme précédemment, le bien-être de l'individu s'exprime par son espérance d'utilité : $u(x_1, l_0) + qu(x_2, T)$, qu'il maximise en choisissant ses niveaux de consommation de 1ère et 2nde période, x_1 et x_2 , ainsi que son niveau de loisir de 1ère période. On notera qu'en 2nde période l'individu est à la retraite et consacre la totalité de son temps T au loisir. On suppose que la fonction d'utilité présente les mêmes caractéristiques que dans la question 3). Ainsi, l'espérance d'utilité prend la forme suivante :

$$u(x_1, l_0) + qu(x_2, T) = -e^{-ax_1} - e^{-bl_0} + q[-e^{-ax_2} - e^{-bT}].$$

- (a) Montrez que le problème de l'individu consiste à maximiser cette espérance d'utilité en fonction de x_1 , x_2 et l_0 sous une contrainte à préciser.
- (b) Déterminez les fonctions de demande de consommation pour chaque période, et pour la 1ère période, la fonction d'offre de travail ainsi que la fonction de demande de loisir (on se place évidemment dans le cas de solutions intérieures).
- (c) En déduire la cotisation de retraite C payée en 1ère période.
- (d) Quel est l'impact d'un accroissement de la probabilité de survie q sur l'offre de travail ?
- (e) Quel enseignement tirez-vous de ce dernier résultat ? Vous paraît-il intuitif ? Est-il conforme à l'évolution généralement observée en ce qui concerne les systèmes de retraite ?

Corrigé 2013

1. La contrainte budgétaire est :

$$(T - l_0)w = px$$

2. (a) Une utilité négative n'est pas un problème en soi. Il est admis depuis les travaux de Pareto que les fonctions d'utilité sont ordinales et non pas cardinales. Ainsi, le niveau d'utilité en absolu ne représente rien. On ne peut que comparer des niveaux d'utilité différents, sans interpréter la valeur absolue de l'écart.
- (b) La fonction d'utilité s'écrit :

$$u(x, l_0) = -e^{-ax-bl_0} = K$$

- i. Pour garantir la vraisemblance économique, il faut que $x \geq 0$. Pour représenter la courbe d'indifférence, on isole l_0 :

$$\begin{aligned} -e^{-ax-bl_0} &= K \\ \Leftrightarrow -ax - bl_0 &= \ln(-K) \\ \Leftrightarrow l_0 &= \frac{\ln(-K) + ax}{-b} \end{aligned}$$

Pour que ce logarithme existe, on doit avoir $K < 0$.

$$\Leftrightarrow l_0 = \frac{-\ln(-K) - ax}{b}$$

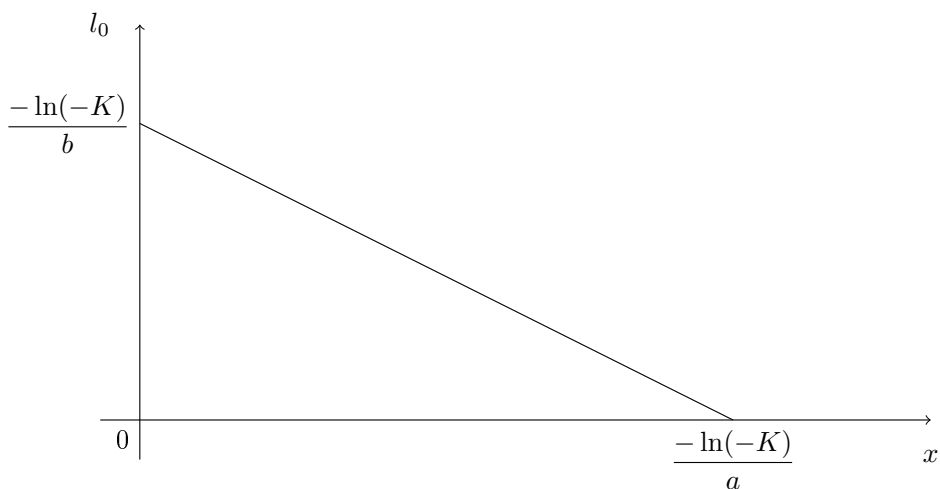
Dans la mesure où a et b sont positifs, ce montant pourra être positif si et seulement si :

$$\begin{aligned} -\ln(-K) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \ln(-K) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -K &\leq 1 \\ \Leftrightarrow K &\geq -1 \end{aligned}$$

La condition de vraisemblance sur K est donc :

$$-1 < K < 0$$

ii. Représentation graphique :



iii. Le taux marginal de substitution se calcule ainsi :

$$\frac{\frac{\partial U(x, l_0)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x, l_0)}{\partial l_0}} = \frac{ae^{-ax-bl_0}}{be^{-ax-bl_0}} = \frac{a}{b}$$

iv. Le taux marginal de substitution est constant. Les biens x et l_0 sont donc parfaitement substituables.

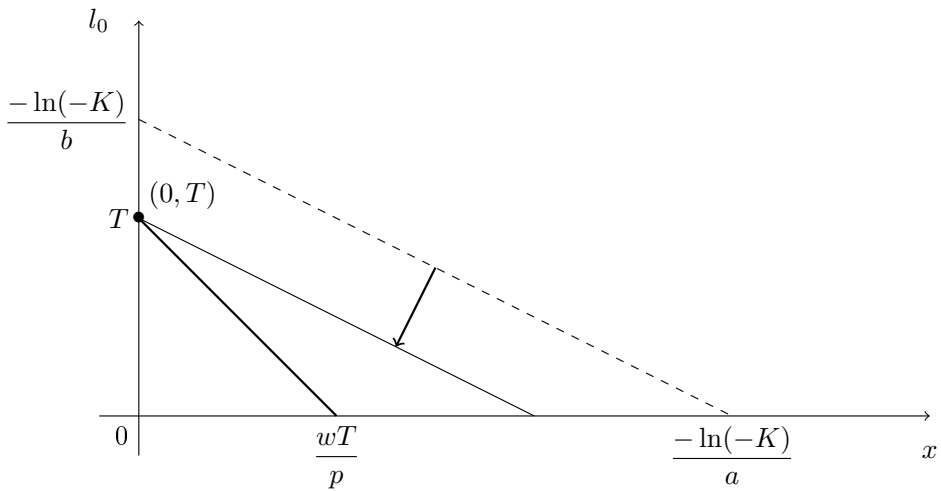
(c) On peut imaginer trois types de situations, que l'on étudiera successivement.

La représentation de la contrainte budgétaire dans le plan (x, l_0) sera :

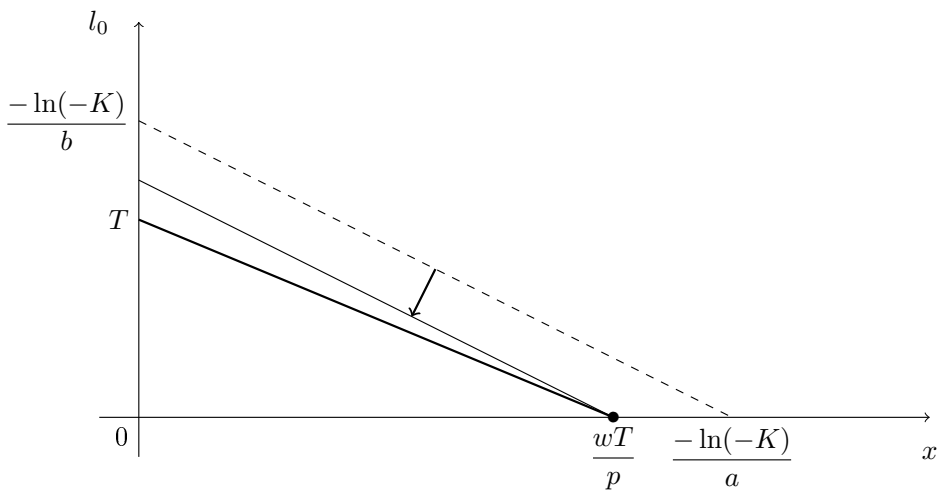
$$\begin{aligned} (T - l_0)w &= px \\ \Leftrightarrow l_0w &= Tw - px \\ \Leftrightarrow l_0 &= T - \frac{p}{w}x \end{aligned}$$

T est l'ordonnée à l'origine, et $-\frac{p}{w}$ la pente de la droite.

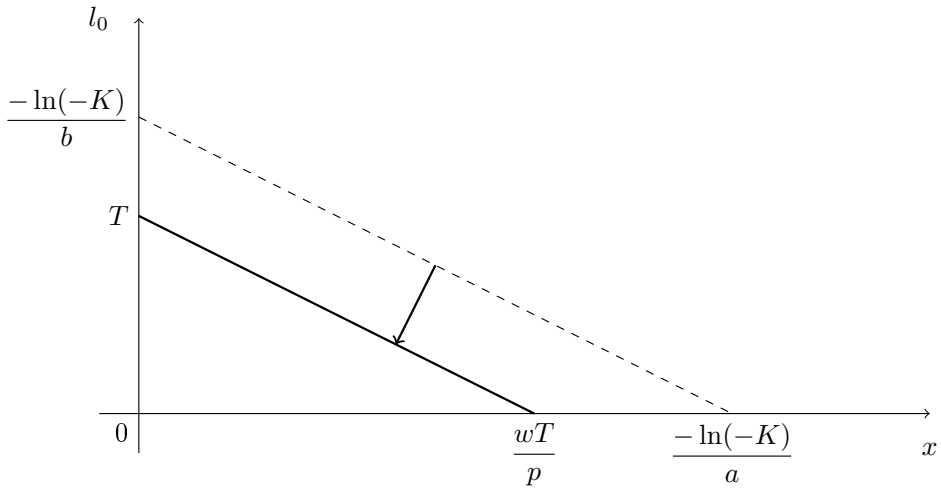
Situation 1 : la pente de la contrainte budgétaire est plus forte que celle de la courbe d'indifférence. L'équilibre se fera donc dans le coin gauche de la contrainte budgétaire, aux coordonnées $(0, T)$.



Situation 2 : la pente de la contrainte budgétaire est plus faible que celle de la courbe d'indifférence. L'équilibre se fera donc dans le coin droit de la contrainte budgétaire, aux coordonnées $(\frac{wT}{p}, 0)$.



Situation 3 : la pente de la contrainte budgétaire est strictement égale à celle de la courbe d'indifférence. L'équilibre se fera sur n'importe quel point de la contrainte budgétaire.



(d) Analytiquement :

Situation 1. Si $\frac{p}{w} > \frac{a}{b}$, alors :

$$x^*(p, w, T) = 0 \text{ et } l_0^*(p, w, T) = T$$

Situation 2. Si $\frac{p}{w} < \frac{a}{b}$, alors :

$$x^*(p, w, T) = \frac{wT}{p} \text{ et } l_0^*(p, w, T) = 0$$

Situation 3. Si $\frac{p}{w} = \frac{a}{b}$, alors :

$$x^*(p, w, T) = (T - l_0^*) \frac{w}{p} \text{ et } l_0^*(p, w, T) \in [0, T]$$

3. La fonction d'utilité s'écrit désormais :

$$u(x, l_0) = -e^{-ax} - e^{-bl_0}$$

(a) Le programme de l'agent est :

$$\begin{cases} \text{Max}_{\{x, l_0\}} u(x, l_0) = -e^{-ax} - e^{-bl_0} \\ \text{s.c. } (T - l_0)w = px \end{cases}$$

Le lagrangien associé est :

$$\mathcal{L}(x, l_0, \lambda) = -e^{-ax} - e^{-bl_0} + \lambda[(T - l_0)w - px]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(x, l_0, \lambda)}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow ae^{-ax} = \lambda p \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, l_0, \lambda)}{\partial l_0} = 0 &\Leftrightarrow be^{-bl_0} = \lambda w \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{a}l_0 - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \\ l_0 = \frac{a}{b}x + \frac{1}{b} \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, l_0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow (T - l_0)w = px \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \rightarrow (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} (T - l_0)w = p \left(\frac{b}{a}l_0 - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \right) \\ \left(T - \frac{a}{b}x - \frac{1}{b} \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \right) w = px \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} wT + \frac{p}{a} \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) = l_0 \left(w + \frac{bp}{a} \right) \\ wT - \frac{w}{b} \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) = x \left(p + \frac{aw}{b} \right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} l_0^*(p, w, T) = \frac{awT + p \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)}{aw + pb} \\ x^*(p, w, T) = \frac{bwT - w \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)}{aw + pb} \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
 l_1^*(p, w, T) &= T - l_0^*(p, w, T) \\
 &= T - \frac{awT + p \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)}{aw + pb} \\
 &= \frac{awT + bpT - awT - p \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)}{aw + pb} \\
 &= \frac{bpT - p \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)}{aw + pb}
 \end{aligned}$$

- (b) Maintenant que nous avons l'expression de la fonction d'offre de travail $l_1^*(p, w, T)$, nous pouvons étudier son comportement en fonction de p .

$$l_1^*(p, w, T) = \frac{bpT - p \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)}{aw + pb} = \frac{bT - \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)}{\frac{aw}{p} + b}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l_1^*(p, w, T)}{\partial p} &= \frac{-\frac{\frac{b}{aw}}{\frac{bp}{aw}} \left(\frac{aw}{p} + b \right) - \left(bT - \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \right) \left(-\frac{aw}{p^2} \right)}{\left(\frac{aw}{p} + b \right)^2} \\
 &= \frac{-\frac{1}{p} \left(\frac{aw}{p} + b \right) + \frac{aw}{p^2} \left(bT - \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \right)}{\left(\frac{aw + bp}{p} \right)^2} \\
 &= \frac{-\frac{b}{p} - \frac{aw}{p^2} \left(1 - bT + \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \right)}{\left(\frac{aw + bp}{p} \right)^2} \\
 &= \frac{-pb - aw \left(1 - bT + \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \right)}{(aw + bp)^2}
 \end{aligned}$$

Le dénominateur étant ici toujours positif, le signe de la dérivée dépendra du signe du numérateur.

- Pour p très petit, $-pb - aw \left(1 - bT + \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \right) > 0$ du fait de la fonction logarithme qui tend vers moins l'infini.
- pour p très grand, $-pb - aw \left(1 - bT + \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \right) < 0$ du fait de $-pb$ qui tend vers moins l'infini.

Ainsi, la fonction est croissante puis décroissante. Il existe donc un seuil à partir duquel l'inflation fait décroître l'offre de travail.

- (c) On voit bien dans l'expression :

$$l_1^*(p, w, T) = \frac{bT - \ln \left(\frac{b}{a} \frac{w}{p} \right)}{a \frac{w}{p} + b}$$

que la valeur de $l_1^*(p, w, T)$ ne change pas si w et p augmentent dans les mêmes proportions. Ainsi, si l'inflation concerne à la fois les biens de consommations et les salaires (c'est-à-dire si l'ensemble des prix, y compris ceux du travail, augmentent), alors l'agent ne change rien à son comportement. Encore dit autrement, l'agent n'est pas soumis à l'illusion monétaire : le montant en absolu des prix n'importe pas, seuls les prix relatifs comptent.

- (d) a et b sont les taux de préférences respectifs pour la consommation et pour le loisir. Ils permettent de représenter différents types de préférences des agents. Plus a sera élevé comparativement à b , et plus l'agent préférera la consommation au loisir.

Rappelons encore que seules les préférences relatives comptent. Ce qui importe n'est pas la valeur absolue de a ou de b , mais la comparaison entre a et b .

(e) La demande de loisir est la suivante :

$$l_0^*(p, w, T) = \frac{awT + p \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)}{aw + pb}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_0^*(p, w, T)}{\partial a} &= \frac{\left(wT - \frac{p}{a} \right) (aw + pb) - w \left(awT + p \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) \right)}{(aw + pb)^2} \\ &= \frac{aw^2T - pw + wTpb - \frac{p^2b}{a} - aw^2T - wp \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)}{(aw + pb)^2} \\ &= p \frac{w(Tb - 1) - \frac{pb}{a} - w \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)}{(aw + pb)^2} \end{aligned}$$

Le signe de la dérivée dépend du signe du numérateur, donc de :

$$w(Tb - 1) - \frac{pb}{a} - w \ln \left(\frac{bp}{aw} \right)$$

On peut constater que :

$$\lim_{a \rightarrow 0} w(Tb - 1) - \frac{pb}{a} - w \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) = -\infty$$

et que :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} w(Tb - 1) - \frac{pb}{a} - w \ln \left(\frac{bp}{aw} \right) = +\infty$$

Il existe donc un seuil de a , impossible à déterminer analytiquement, à partir duquel la dérivée de l_0^* devient positive.

4. On s'intéresse désormais au financement d'un système de retraite.

(a) La relation est :

$$C = qy_2$$

Si cette équation n'est pas intuitive, on peut imaginer une population composée de N individus qui cotisent tous. La somme des cotisations est donc NC . Seule une proportion q de cette population vivra la deuxième

période et bénéficiera donc d'un revenu y_2 . Les sommes redistribuées sont donc égales à qNy_2 . On a donc :

$$NC = qNy_2$$

En simplifiant par N , on retrouve la relation initiale.

- (b) En nommant x_1 et x_2 les consommations respectives durant les périodes 1 et 2, la contrainte en première période est :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1p + C \\ &= x_1p + qy_2 \end{aligned}$$

La contrainte de deuxième période est :

$$y_2 = x_2p$$

- (c) Le bien-être de l'individu s'exprime désormais par son espérance d'utilité :

$$u(x_1) + qu(x_2)$$

- i. Le programme du consommateur est désormais :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } u(x_1) + qu(x_2) \\ \text{sc. } \begin{cases} y_1 = x_1p + qy_2 \\ y_2 = x_2p \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } u(x_1) + qu(x_2) \\ \text{sc. } y_1 = x_1p + qx_2p \end{array} \right.$$

- ii. Le lagrangien associé est :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1) + qu(x_2) + \lambda[y_1 - x_1p - qx_2p]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} &= 0 \Leftrightarrow u'(x_1) = \lambda p \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} &= 0 \Leftrightarrow qu'(x_2) = \lambda qp \end{aligned} \right\} \Rightarrow u'(x_1) = u'(x_2) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow y_1 = x_1p + qx_2p \quad (2)$$

La fonction u étant strictement concave, $u'(x_1) = u'(x_2)$ implique nécessairement $x_1 = x_2$, d'où :

$$\begin{aligned} (1) \rightarrow (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1p + qx_1p \\ y_1 = x_2p + qx_2p \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{p(1+q)} \\ x_2 = \frac{y_1}{p(1+q)} \end{cases} \end{aligned}$$

De plus :

$$x_2 p = y_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = \frac{y_1}{(1+q)}$$

Et enfin :

$$C = qy_2 = \frac{qy_1}{(1+q)}$$

iii. On vérifie la dérivée de C par rapport à q :

$$\frac{\partial C}{\partial q} = \frac{y_1(1+q) - qy_1}{(1+q)^2} = \frac{y_1}{(1+q)^2} > 0$$

La dérivée est toujours positive : la cotisation augmente lorsque la probabilité de survie augmente. C'est très intuitif : plus il est sûr que la deuxième période sera vécue, plus il est adéquat de cotiser pour garantir sa consommation en deuxième période.

Pour les consommations x_1 et x_2 (qui sont égales), la dérivée est :

$$\frac{\partial x_1}{\partial q} = -\frac{y_1}{p(1+q)^2} < 0$$

La dérivée est négative : x_1 et x_2 diminuent lorsque la probabilité de survie augmente. Interprétation :

- Pour x_1 , l'interprétation est simple : si la probabilité de survie augmente, l'individu doit augmenter sa cotisation, ce qui réduit d'autant le montant disponible pour sa consommation en première période.
- Pour x_2 , cela est moins intuitif. Pourquoi, malgré des cotisations en hausse, la consommation en deuxième période baisse-t-elle ? Parce que le fait que probabilité de survie augmente implique que *plus d'individus devront se partager la somme des cotisations disponibles*. Dit autrement, la consommation globale en seconde période augmente, mais la consommation individuelle diminue.

iv. Non, tous les systèmes de retraite n'effectuent pas une redistribution en faveur des survivants. Le système de retraite en France est un système de retraite par répartition, qui fonctionne sur le modèle décrit ici. En revanche, d'autres systèmes sont basés sur la capitalisation, où chacun accumule des droits en fonction de ses propres cotisations, sans redistribution vers les survivants. En cas de décès, le capital accumulé ne sert pas à financer le système de retraite, mais est transmis aux héritiers du défunt.

- v. L'augmentation de la probabilité de survie, qui a le même effet que l'allongement de la durée de la vie, nécessite indubitablement un financement plus important de ce genre de système de retraite. D'un point de vue purement comptable, si le système doit nécessairement s'autofinancer (ce qui n'est pas une obligation en soi : d'autres sources de financement sont possibles), trois solutions existent :
- la hausse des cotisations prélevées,
 - la baisse des pensions versées,
 - l'allongement de la durée de la période de travail (qui diminue mécaniquement la durée de la retraite).

5. La fonction d'utilité est désormais :

$$u(x_1, l_0) + qu(x_2, T) = -e^{-ax_1} - e^{-bl_0} + q[-e^{-ax_2} - e^{-bT}]$$

(a) Le programme du consommateur est désormais :

$$\begin{cases} \text{Max}_{\{x_1, x_2, l_0\}} u(x_1, l_0) + qu(x_2, T) \\ \text{s.c.} \begin{cases} wl_1 = x_1p + C \\ y_2 = x_2p \\ C = qy_2 \\ l_1 = T - l_0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Max}_{\{x_1, x_2, l_0\}} -e^{-ax_1} - e^{-bl_0} + q[-e^{-ax_2} - e^{-bT}] \\ \text{s.c. } w(T - l_0) = x_1p + qx_2p \end{cases}$$

(b) Le lagrangien associé est :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, l_0, \lambda) = -e^{-ax_1} - e^{-bl_0} + q[-e^{-ax_2} - e^{-bT}] + \lambda[w(T - l_0) - x_1p - qx_2p]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, l_0, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ae^{-ax_1} = \lambda p \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, l_0, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad qae^{-ax_2} = \lambda qp \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, l_0, \lambda)}{\partial l_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad be^{-bl_0} = \lambda w \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, l_0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w(T - l_0) = x_1p + qx_2p \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{(1)}{(2)} &\Rightarrow \frac{ae^{-ax_1}}{qae^{-ax_2}} = \frac{p}{qp} \\ &\Rightarrow e^{-ax_1} = e^{-ax_2} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{(2)}{(3)} &\Rightarrow \frac{qae^{-ax_2}}{be^{-bl_0}} = \frac{qp}{w} \\
 &\Rightarrow \frac{ae^{-ax_2}}{be^{-bl_0}} = \frac{p}{w} \\
 &\Rightarrow e^{-ax_2} = \frac{bp}{aw} e^{-bl_0} \\
 &\Rightarrow -ax_2 = \ln\left(\frac{bp}{aw}\right) - bl_0 \\
 &\Rightarrow x_2 = \frac{b}{a}l_0 - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{bp}{aw}\right) \tag{6}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l_0 = \frac{a}{b}\left(x_2 + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{bp}{aw}\right)\right) \tag{7}$$

$$(5) \rightarrow (4) \Rightarrow wT - wl_0 = p(1+q)x_2 \tag{8}$$

La demande de loisir est :

$$\begin{aligned}
 (6) \rightarrow (8) &\Rightarrow wT - wl_0 = p(1+q)\left(\frac{b}{a}l_0 - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{bp}{aw}\right)\right) \\
 \Leftrightarrow wT + \frac{p(1+q)}{a}\ln\left(\frac{bp}{aw}\right) &= l_0\left(w + \frac{bp(1+q)}{a}\right) \\
 \Leftrightarrow l_0 = \frac{1}{w + \frac{bp(1+q)}{a}} &\left(wT + \frac{p(1+q)}{a}\ln\left(\frac{bp}{aw}\right)\right) \\
 \Leftrightarrow l_0 = \frac{1}{aw + bp(1+q)} &\left(awT + p(1+q)\ln\left(\frac{bp}{aw}\right)\right)
 \end{aligned}$$

D'après (5), les fonctions de consommation sont identiques. Elles sont égales à :

$$\begin{aligned}
 (7) \rightarrow (8) &\Rightarrow wT - w\frac{a}{b}\left(x_2 + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{bp}{aw}\right)\right) = p(1+q)x_2 \\
 \Leftrightarrow x_2\left(p(1+q) + \frac{aw}{b}\right) &= wT - \frac{w}{b}\ln\left(\frac{bp}{aw}\right) \\
 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = w\frac{bT - \ln\left(\frac{bp}{aw}\right)}{bp(1+q) + aw} \tag{9}
 \end{aligned}$$

Pour l'offre de travail, on sait que :

$$wl_1 = x_1p + qx_2p \quad \Leftrightarrow \quad l_1 = \frac{x_1p(1+q)}{w}$$

En injectant (9), on obtient :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad l_1 &= \frac{p(1+q)}{w} w \frac{bT - \ln\left(\frac{bp}{aw}\right)}{bp(1+q) + aw} \\ \Leftrightarrow \quad l_1 &= p(1+q) \frac{bT - \ln\left(\frac{bp}{aw}\right)}{bp(1+q) + aw} \end{aligned}$$

(c) On se souvient que $C = qy_2$ et que $y_2 = x_2p$, d'où :

$$\begin{aligned} C = qx_2p \quad \Leftrightarrow \quad C &= qp w \frac{bT - \ln\left(\frac{bp}{aw}\right)}{bp(1+q) + aw} \\ \Leftrightarrow \quad C &= pw \left(bT - \ln\left(\frac{bp}{aw}\right) \right) \frac{q}{bp(1+q) + aw} \end{aligned}$$

(d) On cherche la dérivée de l_1 par rapport à q .

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_1}{\partial q} &= p \left(bT - \ln\left(\frac{bp}{aw}\right) \right) \frac{bp(1+q) + aw - bp(1+q)}{(bp(1+q) + aw)^2} \\ &= p \left(bT - \ln\left(\frac{bp}{aw}\right) \right) \frac{aw}{(bp(1+q) + aw)^2} > 0 \end{aligned}$$

(e) L'augmentation de la probabilité de survie (encore une fois équivalente à l'augmentation de la durée de la vie) amène les individus, en moyenne, à travailler plus longtemps.

Sujet 2014

◇ Partie 1

Une économie est composée de deux agents notés A et B dont les préférences sont identiques et représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U^i(x_1^i, x_2^i) = \sqrt{x_1^i \cdot x_2^i}$$

avec $i = A, B$.

Leurs dotations initiales en biens 1 et 2 sont respectivement $w^A = (100, 0)$ et $w^B = (100, 200)$. Le prix du bien 1 est noté p_1 et celui du bien 2 noté p_2 . Le bien 1 est pris comme numéraire : $p_1 = 1$. On note y^A et y^B les revenus respectifs des agents A et B .

1. Calculez l'équilibre général concurrentiel.
2. Caractérisez l'ensemble des optima de Pareto au moyen d'un programme d'optimisation approprié. Représentez graphiquement cet ensemble.
3. L'État juge le précédent équilibre trop inégalitaire. Il décide de mettre en place une politique fiscale telle que le consommateur A obtienne l'allocation $(80, 80)$. Commentez.
4. L'État décide de mettre en place une TVA sociale sur le bien 2 dont le taux est noté $t(> 0)$ et de redistribuer les recettes fiscales à l'agent A . Calculez cet équilibre sachant que les agents considèrent la redistribution fiscale comme une donnée. Interprétez.
5. L'allocation $(80, 80)$ peut-elle être atteinte avec cette TVA ? Commentez votre réponse.
6. Y a-t-il un autre moyen de réaliser cette allocation ? Lequel ? Interprétez.

Partie 2

À la suite d'un typhon, les deux consommateurs ne possèdent plus de dotations initiales. Ils sont obligés de travailler et tirent de leur environnement naturel le bien 1. Leurs dotations initiales sont respectivement $w_1^A = 400$ et $w_1^B = 800$. Il existe une entreprise qui produit le bien 2 à partir du bien 1 qui est intégré dans le processus de production.

La technologie de production s'énonce $X_2 = 2\sqrt{k}$ avec k la quantité de facteurs de production utilisés.

Les préférences des consommateurs sont les suivantes :

$$U^i(x_1^i, x_2^i) = x_1^i \cdot x_2^i$$

avec $i = A, B$. Le consommateur A possède 50% de la firme et le consommateur B 50%. Leurs revenus sont constitués par la vente d'une partie de leurs dotations initiales qui servent de facteurs de production (notées respectivement k^A et k^B) et des dividendes perçus, proportionnellement aux parts sociales qu'ils détiennent. Comme précédemment, les prix des biens 1 et 2 sont respectivement notés p_1 et p_2 . De même, le bien 1 fait office de numéraire et y_A et y_B représentent les revenus respectifs des agents A et B. Le profit de l'entreprise sera noté π .

1. Calculez l'équilibre général concurrentiel. Vous prendrez soin d'identifier précisément les valeurs de toutes les offres et demandes, du prix p_2 , ainsi que celles du profit et des revenus.
2. L'État désirerait égaliser les niveaux de bien-être des deux consommateurs. Pour cela, il décide de mettre en place une taxation des profits destinée à subventionner le consommateur A.
 - Une telle démarche est-elle compatible avec un optimum de Pareto? Justifiez.
 - L'État peut-il réaliser son objectif? Démontrez.
3. L'agent B possède des compétences de dirigeant d'entreprise. Ses capacités de gestion sont réelles et permettent d'organiser la production plus efficacement. La fonction de production se réécrit :

$$X_2 = 2a\sqrt{k}$$

avec « a » l'apport de compétences managériales de l'agent B ($a > 1$). Identifiez l'équilibre général de concurrence qui en résulte.

4. Diriger une entreprise est coûteux pour l'agent B. La fonction d'utilité de l'agent B s'énonce :

$$U^B(x_1^B, x_2^B) = x_1^B \cdot x_2^B - \ln a$$

Le salaire de l'agent B dirigeant de l'entreprise est composé d'un fixe et d'un intéressement aux profits de l'entreprise. Son salaire est noté S et s'écrit

$$S = F + \theta\pi$$

avec $0 < \theta < 1$. Les deux agents se répartissent, à parts égales, le profit résiduel.

Calculez le niveau optimal de compétences managériales de l'agent B réalisé pour ce salaire.

5. L'agent A s'élève de cette rémunération en déclarant que l'agent B est trop payé ce qui réduit ses dividendes. Montrez qu'il existe un salaire S qui augmente le profit net de la firme 2. Commentez la politique de rémunération des chefs d'entreprise.

⇒ *Partie 3*

On suppose désormais que chaque consommateur détient une entreprise qui prend part à la production de bien 2 à partir du bien 1. Les fonctions de production de ces firmes sont identiques et s'écrivent comme suit :

$$X_2^i = 2\sqrt{k_i}$$

$i = A, B$, où X_2^i représente la production de bien 2 par la firme détenue par le consommateur i , et k^i , la quantité de bien 1 utilisée par cette même firme.

On conserve les mêmes hypothèses que précédemment (Partie B) quant aux fonctions d'utilité : $U^i(x_1^i, x_2^i) = x_1^i * x_2^i$ avec $i = A, B$, ainsi que les mêmes dotations initiales où $w_1^A = 400$, $w_1^B = 800$. Le consommateur A possède 100% de la firme A et le consommateur B 100% de la firme B . Leurs revenus résultent de la vente d'une partie de leurs dotations initiales qui servent de facteurs de production (notées respectivement k^A et k^B) et des dividendes perçus, proportionnellement aux parts sociales qu'ils détiennent. Comme précédemment, les prix des biens 1 et 2 sont respectivement notés p_1 et p_2 . De même, le bien 1 fait office de numéraire et y_A et y_B représentent les revenus respectifs des agents A et B . Le profit de l'entreprise des entreprises par chaque firme.

1. Caractérisez l'équilibre général de concurrence qui en résulte.
2. Comparez avec les résultats de la question 1) de la partie B. Calculez le gain ou la perte de bien-être qui en résulte. Quels enseignements économiques en retirez-vous ?
3. On suppose maintenant que chaque firme prend conscience de son pouvoir de marché et qu'un marché de duopole à la Cournot s'établit pour le bien 2. Sur ce marché, l'offre correspond à la somme des productions émanant des firmes A et B : $X_2 = X_2^A + X_2^B$.
 - Procédez à l'étude de l'équilibre général (pour vous simplifier la tâche, vous supposerez que les valeurs d'équilibre sont les mêmes pour les 2 firmes).
 - Un tel équilibre vous paraît-il réaliste ? Existe-t-il ?
 - Le cas échéant, caractérisez cet équilibre et les gains ou pertes de bien-être qui en résultent pour les consommateurs.
4. Quels enseignements et quelles réflexions en retirez-vous ?

Corrigé 2014

Partie 1

1. Le programme du consommateur i s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \text{Max } U(x_1^i, x_2^i) = \sqrt{x_1^i x_2^i} \\ \text{sc. } y^i = x_1^i p_1 + x_2^i p_2 \end{cases}$$

Le lagrangien associé est :

$$\mathcal{L}(x_1^i, x_2^i, \lambda) = \sqrt{x_1^i x_2^i} + \lambda[y^i - x_1^i p_1 - x_2^i p_2]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1^i, x_2^i, \lambda)}{\partial x_1^i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1/2(x_1^i)^{1/2-1}(x_2^i)^{1/2} = \lambda p_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1^i, x_2^i, \lambda)}{\partial x_2^i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1/2(x_1^i)^{1/2}(x_2^i)^{1/2-1} = \lambda p_2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1^i, x_2^i, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^i = x_1^i p_1 + x_2^i p_2 \quad (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow x_1^i p_1 = x_2^i p_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (3) \rightarrow (4) & \Leftrightarrow \begin{cases} y^i = x_1^i p_1 + x_2^i p_1 \\ y^i = x_2^i p_2 + x_2^i p_2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{i*}(y^i, p_1) = \frac{y^i}{2p_1} \\ x_2^{i*}(y^i, p_2) = \frac{y^i}{2p_2} \end{cases} \end{aligned}$$

A l'équilibre, la demande du bien 1 est égale à l'offre du bien 1 :

Demande de bien 1 = Offre de bien 1

$$\Leftrightarrow x_1^{A*} + x_1^{B*} = w_1^A + w_1^B$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^A}{2p_1} + \frac{y^B}{2p_1} = 100 + 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{100p_1}{2p_1} + \frac{100p_1 + 200p_2}{2p_1} = 200$$

$$\Leftrightarrow 100p_1 + 100p_1 + 200p_2 = 400p_1$$

$$\Leftrightarrow 200p_2 = 200p_1$$

$$\Leftrightarrow p_1 = p_2$$

La loi de Walras affirme que l'équilibre du deuxième marché est assuré. On peut néanmoins le vérifier :

$$\begin{aligned}
 & \text{Demande de bien 2} = \text{Offre de bien 2} \\
 \Leftrightarrow & x_2^{A*} + x_2^{B*} = w_2^A + w_2^B \\
 \Leftrightarrow & \frac{y^A}{2p_2} + \frac{y^B}{2p_2} = 0 + 200 \\
 \Leftrightarrow & \frac{100p_1}{2p_2} + \frac{100p_1 + 200p_2}{2p_2} = 200 \\
 \Leftrightarrow & 100p_1 + 100p_1 + 200p_2 = 400p_2 \\
 \Leftrightarrow & 200p_1 = 200p_2 \\
 \Leftrightarrow & p_1 = p_2
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$p_1 = 1$	$p_2 = 1$
$x_1^{A*} = 50$	$x_2^{A*} = 50$
$x_1^{B*} = 150$	$x_2^{B*} = 150$

2. L'ensemble des optima de Pareto forme la courbe des contrats. Celle-ci réunit tous les points où l'égalité des TMS est respectée :

$$\begin{aligned}
 TMS^A = TMS^B & \Leftrightarrow \frac{\partial U^A / \partial x_1^A}{\partial U^A / \partial x_2^A} = \frac{\partial U^B / \partial x_1^B}{\partial U^B / \partial x_2^B} \\
 & \Leftrightarrow \frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Les conditions de saturation sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^A + x_1^B = w_1^A + w_1^B \Leftrightarrow x_1^B = 200 - x_1^A \\ x_2^A + x_2^B = w_2^A + w_2^B \Leftrightarrow x_2^B = 200 - x_2^A \end{array} \right. \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \rightarrow (5) & \Leftrightarrow \frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{200 - x_2^A}{200 - x_1^A} \\
 & \Leftrightarrow x_2^A(200 - x_1^A) = (200 - x_2^A)x_1^A \\
 & \Leftrightarrow x_2^A(200 - x_1^A + x_1^A) = 200x_1^A \\
 & \Leftrightarrow x_2^A = x_1^A
 \end{aligned}$$