PC
PC*

Michel Goumi
Nicolas Jousse
Ivan Gozard
Bertrand Hauchecorne
Olivier Leuck

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

- Méthodologie et objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Exercices-type oraux
- Corrigés détaillés et commentés

5e édition

ellipses

Mathématiques
PC/PC*

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques PC/PC*

5e édition

ouvrage coordonné par

Michel GOUMI
Ancien professeur au lycée E. Perrier (Tulle)

Nicolas JOUSSE
Professeur au lycée Michel Montaigne (Bordeaux)

Ivan GOZARD
Professeur au lycée Carnot (Dijon)

Bertrand HAUCHECORNE
Ancien professeur au lycée Pothier (Orléans)

Olivier LEUCK
Professeur au lycée R. Follereau (Belfort)

ellipses

Collection
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « Un mathématicien » et « Un peu d'histoire » des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en LaTeX.

ISBN 9782340-116320
Dépôt légal : juillet 2026

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique ou chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme et de remédier à quelques mauvais réflexes. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Du nouveau dans cette édition

- Une note méthodologique « Comment préparer les concours » en début d'ouvrage, vous aide à aborder les concours dans les meilleures conditions.
- Des « exos-minutes » dans chaque chapitre, plutôt faciles à résoudre, vous permettent de tester vos réflexes en application directe du cours.
- Dans chaque chapitre des exercices, particulièrement adaptés aux épreuves orales, repérés par un petit micro, vous entrainent à affronter avec succès les oraux.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique, de chimie et de sciences industrielles de l'ingénieur vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Méthodologie

Si vous tenez ce livre jaune entre vos mains, c'est que vous avez probablement été admis à passer en deuxième année de classes préparatoires aux grandes écoles : Félicitations ! Le nouvel objectif est maintenant d'intégrer l'école de vos rêves. Vous avez déjà acquis une belle expérience de travail en première année et elle vous sera très utile en deuxième année. Reste à réfléchir à la façon d'aborder les quelques mois qui arrivent.

Cette deuxième année sera rythmée par plusieurs échéances marquantes :

— Les épreuves écrites des concours étalées généralement sur les mois d'avril et mai ;

— Les résultats des épreuves écrites (admissibilités) au début du mois de juin ;

— les épreuves orales qui se tiennent de la fin du mois de juin jusqu'à fin juillet ;

— Les résultats des épreuves orales (admissions) à la toute fin du mois de juillet ;

— Les propositions des écoles durant tout le mois d'août.

C'est donc une très longue année qui vous attend, et afin que celle-ci se déroule dans les meilleurs conditions, il convient de mettre en place dès le mois de septembre une méthode de travail efficace et adaptée à vos objectifs. Nous vous proposons ici quelques éléments qui vous aideront à vous organiser en mathématiques, mais qui sont facilement transposables dans les autres matières scientifiques.

L'apprentissage du cours : C'est probablement la partie la plus importante, malheureusement trop souvent négligée par certains élèves. Le cours proposé par votre professeur devra être travaillé avec soin, et il sera d'autant plus facile de le faire que vous aurez été attentif pendant les séances en classe. Souvent, une seule lecture de ce cours ne suffira pas et il faudra y « repasser » plusieurs fois ! N'hésitez pas à vous réciter à haute voix les définitions et énoncés des théorèmes, et même à les écrire au brouillon pour être certain de bien les connaître. La partie **Résumé de cours** proposée dans ce livre, vous permettra, avant un DS, une khôlle ou avant les concours, de vous remettre en tête les notions les plus importantes. La partie **Vrai-Faux** sera aussi l'occasion de vous mettre en garde contre des erreurs classiques.

Le travail des exercices : une fois le cours correctement mémorisé, il convient de passer à la pratique. Là encore, les exercices sélectionnés par votre professeur devront vous servir de base de travail, surtout si vous les avez déjà préparés, voire si vous êtes passé au tableau devant toute la classe. Attention toutefois à ne pas vous contenter de « lire » un corrigé d'exercice : vous auriez la sensation de l'avoir compris mais les idées de départ ou les arguments utilisés ne resteraient pas forcément gravés dans votre esprit. Il faut donc impérativement se mettre dans une situation de recherche de ces exercices devant une feuille blanche. La partie

Méthodes et les **exercices classiques** seront de précieux alliés pour vous aider dans cet objectif. Commencez à les travailler, puis, si vous vous sentez complètement démuni, les indications pourront vous donner une idée pour démarrer. Une fois l'exercice terminé, comparez votre résultat avec le corrigé du livre pour vous assurer que votre raisonnement ou votre calcul est correct.

La recherche de problèmes : C'est la dernière étape, à ne réaliser qu'une fois les deux précédentes effectuées. En début d'année, vous pourrez vous contenter de « morceaux » de sujets de concours car les problèmes complets pourraient traiter de chapitres que vous n'avez pas encore abordés. Là encore, vous ne tireriez aucun avantage à lire uniquement les corrigés : cela vous donnerait une impression trompeuse d'avoir compris et mémorisé les idées, alors qu'il faut travailler et bloquer sur certaines questions pour en tirer profit. Avant les écrits, vous pourrez enfin vous entraîner sur de vrais sujets à traiter en entier. Vous trouverez d'ailleurs, dans la partie **exercices** de ce livre, des extraits de sujets d'écrits.

La préparation aux oraux : En toute fin d'année, vous serez amené à passer des épreuves orales. Vous vous entraînerez toute l'année à l'aide des khôlles ou des oraux blancs proposés par votre professeur mais il sera important de vous y préparer également de votre côté. N'hésitez pas à solliciter vos camarades de classe et mettez vous dans la peau, l'espace de quelques instants, tantôt d'un examinateur exigeant en posant des questions ou des exercices, tantôt dans le rôle du candidat, en répondant à leurs questions. Là encore, les exercices classiques présents dans ce livre, dont certains ont d'ailleurs été récemment posés à l'oral, pourront vous servir de base pour cette mise en situation.

Conclusion : En suivant méthodiquement les quelques conseils précédents, nul doute que vous progresserez ! L'année sera longue et semée d'embûches ; vous passerez par des moments de doute et par d'autres phases d'euphorie. Mais soyez assuré qu'il en est de même pour tous les élèves qui préparent les concours. Restez donc persévérant et continuez à travailler régulièrement. La marche est haute, mais la satisfaction, une fois l'objectif atteint, sera très grande !

Épreuves écrites de mathématiques de la filière PC :

Concours	CCINP	Centrale(1)	Mines	X-ENS
Épreuves	4H00	2 × 4H00	2 × 3H00	4H00

Épreuves orales de mathématiques de la filière PC :

Concours	CCINP	Centrale(1)	Mines	Mines-Telecom	X-ENS
Épreuves	1H00	30' + 1H00	1H00	30'	50'

(1) Les épreuves du concours Centrale sont susceptibles de changer à compter de la session 2026-2027 mais à ce jour, nous ne disposons pas de ces informations.

Chapitre 1

Compléments sur les espaces vectoriels et les endomorphismes

UN MATHÉMATICIEN

Très jeune, **Giuseppe Peano** (1858-1932) a compris l'importance de la nouvelle approche des mathématiques que permettait la théorie des ensembles à peine naissante. Déchiffrant l'ouvrage plutôt obscur d'Hermann Grassmann dans lequel sont introduits les espaces vectoriels, il bâtit une axiomatique claire encore utilisée de nos jours. Il introduit les applications linéaires et montre que cette théorie ne se limite pas à la dimension finie en donnant l'exemple des polynômes.

Un peu d'histoire

À tout nombre réel a, on peut faire correspondre une application toute simple, celle qui à un réel x fait correspondre ax soit la multiplication d'un nombre par un scalaire. Tout segment est alors transformé en un segment dont la longueur est multipliée par a. La variable x est au premier degré, elle n'est pas affectée d'une puissance.

Les applications linéaires en sont la généralisation aux dimensions supérieures ; l'expression des images est une expression de degré un des coordonnées et elles conservent l'origine.

Le maniement de ce type d'applications s'est particulièrement développé au XVIII^{e} siècle en particulier pour résoudre des systèmes linéaires, avec Gabriel Cramer, Étienne Bézout, Alexandre Vandermonde mais leur introduction formelle est l'œuvre de Peano.

Objectifs

les incontournables

- Revoir et enrichir les notions élémentaires concernant les espaces vectoriels : famille libre, famille génératrice, base, dimension... ;
- revoir et enrichir les notions élémentaires concernant les applications linéaires ;
- découvrir le produit d'espaces vectoriels et étendre les notions de somme et de somme directe à n sous-espaces vectoriels ;
- vérifier sa capacité à déterminer le rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire et à utiliser le théorème du rang ;
- découvrir la notion de sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme et d'endomorphisme induit sur un tel sous-espace vectoriel ;
- découvrir la notion de polynômes et de polynômes annulateurs d'un endomorphisme ;
- découvrir l'interpolation de Lagrange.

et plus si affinités

- S'approprier définitivement la notion de somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels : elle sera centrale par la suite ;
- s'approprier définitivement la notion, elle aussi centrale, d'endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable ;
- approfondir les questions d'existence, en dimension finie, d'une base, d'un supplémentaire pour tout sous-espace vectoriel, etc.

Résumé de cours

$\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Familles libres, familles génératrices, bases

Définition : Combinaison linéaire —. *On appelle* ***combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *de* E *toute somme* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, *où* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *sont des scalaires (des éléments de* $\mathbb{K}$*), appelés* ***coefficients*** *de la combinaison linéaire.*

Proposition 1.1.— Sous-espace vectoriel engendré par une famille —. L'ensemble des combinaisons linéaires finies d'une famille X de vecteurs est un sous-espace vectoriel de E, appelé ***sous-espace vectoriel engendré par*** X et noté $\mathsf{Vect}\,(X)$.

Remarque : $\mathsf{Vect}\,(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion, contenant la famille X.

Définition : Famille libre, famille liée —. ▸ $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, *famille* ***finie*** *de vecteurs de* E, *est* ***libre*** *si, et seulement si, quelle que soit la famille* $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Longrightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0.}$$

▸ $(x_i)_{i\in I}$, *famille de vecteurs de* E *de cardinal quelconque, est* ***libre*** *si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.*

▸ *Les* x_i, $i \in I$, *sont* ***linéairement indépendants*** *si, et seulement si, la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *est libre.*

▸ *Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est* ***liée****.*

Propriétés : ▷ Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
▷ Toute famille contenant une famille liée est liée (contraposition de l'implication précédente). En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Exemple : Si $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n)$, la famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$, $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, est dite de degrés échelonnés. Une telle famille est libre.

Proposition 1.2.— Famille liée et combinaison linéaire —. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si, et seulement si, l'un au moins des x_i est combinaison linéaire des autres.

(x_1, x_2) est liée si, et seulement si, il existe un scalaire λ tel que : $x_1 = \lambda\, x_2$ ou $x_2 = \lambda\, x_1$, et on dit alors que x_1 et x_2 sont ***colinéaires***.
(x_1, x_2, x_3) est liée si, et seulement si, il existe deux scalaires λ et μ tels que : $x_1 = \lambda\, x_2 + \mu\, x_3$ ou $x_2 = \lambda\, x_1 + \mu\, x_3$ ou $x_3 = \lambda\, x_1 + \mu\, x_2$, et on dit alors que x_1, x_2 et x_3 sont ***coplanaires***.

Définition : Famille génératrice —. *Une partie* X *de* E *est une* ***famille génératrice de l'espace vectoriel*** E *si, et seulement si, le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est* E *lui-même (autrement dit,* $\mathsf{Vect}\, X = E$*).*

Définition : Base —. *Une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une* **base** *de cet espace vectoriel si, et seulement si, elle est une famille libre et génératrice.*

Exemples : ▷ $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. $(X^i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
▷ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Ces bases sont les plus simples de chacun de ces espaces vectoriels : on dit que ce sont leurs **bases canoniques** respectives.

Proposition 1.3.— Coordonnées d'un vecteur dans une base —. Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, il existe un n-uplet unique $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que :

$$\boxed{x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i.}$$

$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ est le ***n-uplet des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$*** et $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ est la ***matrice colonne des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$***.

Exemple : Les coordonnées d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont ses coefficients.

■ Dimension

Définition : Espace vectoriel de dimension finie —. *Un espace vectoriel est* ***de dimension finie*** *si, et seulement si, il admet une famille génératrice finie.*

Proposition 1.4.— Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète —. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie.
De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E ; par conséquent, E admet une base finie.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Lemme 1.5.— Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre ne peut avoir plus d'éléments qu'une famille génératrice.

Théorème-Définition 1.6.— Théorème de la dimension —. Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé ***dimension de** E* et noté $\dim E$.
Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.

Proposition 1.7.— Si $\dim E=n$ et si $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, alors il y a équivalence entre :
(1) $\mathcal{F}$ est une base de E (2) $\mathcal{F}$ est une famille libre (3) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

Définition : Rang d'une famille finie de vecteurs —. *Le* ***rang d'une famille finie $\mathcal{F}$ de vecteurs*** *est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille. On le note* $\operatorname{rg}\mathcal{F}$.

Proposition 1.8.— Une famille finie de vecteurs est libre si, et seulement si, son cardinal est égal à son rang.

■ Produit, somme et somme directe d'espaces vectoriels

Produit d'espaces vectoriels

Définition : Produit cartésien —. *Le produit cartésien de deux ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, défini par :*

$$\boxed{A \times B = \{(u,v) \mid u \in A \text{ et } v \in B\}}.$$

Le produit cartésien de n ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ est l'ensemble, noté $\prod_{i=1}^{n} A_i$ défini par :

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ u_i \in A_i\}}.$$

Soit $(E, +, .)$ et $(F, \hat{+}, \hat{.})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

Théorème-Définition 1.9.— Produit de deux sous-espaces vectoriels —.

Si on pose : $\begin{cases} \forall\,(u,v) \in E \times F,\ \forall\,(u',v') \in E \times F,\ (u,v)\check{+}(u',v') = (u+v, u'\hat{+}v') \\ \forall\,(u,v) \in E \times F,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\check{.}(u,v) = (\lambda.u, \lambda\hat{.}v) \end{cases}$,

alors $\left(E \times F, \check{+}, \check{.}\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dit ***espace vectoriel produit de** E **et** F*.

Proposition 1.10.— Dimension du produit de deux espaces vectoriels —. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, alors $E \times F$ est de dimension $n + p$.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose, pour simplifier, que sur chaque E_i, l'addition et la multiplication externe sont notées par les mêmes symboles : $+$ pour l'addition et la simple juxtaposition pour la multiplication externe.

Théorème-Définition 1.11.— Produit de p sous-espaces vectoriels —.

Si : $\begin{cases} \forall\,(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ \forall\,(u'_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ (u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} + (u'_i)_{i\in[\![1,p]\!]} = (u_i + u'_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \\ \forall\,(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\,(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} = (\lambda\, u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \end{cases}$

alors $\left(\prod_{i=1}^{p} E_i, +, \right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dit ***espace vectoriel produit des** E_i*.

Proposition 1.12.— Dimension du produit de p espaces vectoriels —. Si $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ est une famille de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n_1, n_2, \dots, n_p$, alors

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} n_i.$$

Somme de sous-espaces vectoriels

Théorème-Définition 1.13.— Somme —. Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E, $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \text{ où, } \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ x_i \in E_i\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Il est noté $\sum_{i=1}^{n} E_i$ et c'est **la somme des sous-espaces vectoriels** $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition : Somme directe —. ***La somme des sous-espaces vectoriels de la famille*** $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ ***est directe*** *si, et seulement si, tout vecteur x de $\sum_{i=1}^{n} E_i$ se décompose* ***de manière unique*** *sous la forme :* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, *où* $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Dans ce cas là, on note la somme de ces sous-espaces vectoriels : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition 1.14.— Caractérisation d'une somme directe —. La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe si, et seulement si,

$$\boxed{\forall\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \Longrightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ x_i = 0_E\right).}$$

Commentaire : La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est directe si, et seulement si, leur intersection est réduite à $\{0_E\}$.
En revanche, si $n \geqslant 3$, il ne suffit pas que les intersections deux à deux des E_i soient réduites à $\{0_E\}$, pour que la somme des E_i soit directe. (Voir la réponse à la question 5 du Vrai-Faux)

Définition : Sous-espaces vectoriels supplémentaires —. *Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont* ***supplémentaires dans*** *E si, et seulement si, leur somme est directe et égale à E, autrement dit, lorsque : $E = F \oplus G$.*

Théorème-Définition 1.15.— Base adaptée à un sous-espace vectoriel —. Si $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors il existe une base de E de la forme $(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
Une telle base est une ***base de E adaptée au sous-espace vectoriel*** F.

Commentaire : En dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet donc un supplémentaire, puisque $\mathrm{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E.

Proposition 1.16.— Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E constituent une décomposition en somme directe de E si, et seulement si, $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, ou, ce qui est équivalent :

$$\boxed{\forall\, x \in E,\ \exists!(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i.}$$

Proposition 1.17.— Décomposition en somme directe en fractionnant une base —. Si on fractionne une base $(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E, on obtient :
$$E = \mathsf{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p) \oplus \mathsf{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n).$$
Plus généralement, si on fractionne une base $\mathscr{B}$ de E en une partition $(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_k)$, alors
$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathsf{Vect}\,(\mathscr{B}_i).$$

On a ainsi une caractérisation du caractère directe de la somme de n sous-espaces vectoriels :

Théorème-Définition 1.18.— Base adaptée à une décomposition en somme directe —. $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille de n sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, les $\mathscr{B}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des bases respectives des E_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\mathscr{B}$ est la famille obtenue en juxtaposant (on dit aussi en concaténant) les vecteurs des familles $\mathscr{B}_i$.

La somme des $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe si, et seulement si, $\mathscr{B}$ est une base de $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Dans ce cas, $\mathscr{B}$ est dite ***base de E adaptée à cette décomposition.***

■ Sous-espaces-vectoriels en dimension finie

Proposition 1.19.— Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Proposition 1.20.— Caractérisation d'une somme directe par les dimensions —. Si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors :
$$\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim E_i}$$
avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Corollaire 1.21.— Décomposition en somme directe en dimension finie —. En dimension finie, $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ si, et seulement si, **deux des trois** propositions suivantes sont vérifiées :

(i) $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$; **(ii)** $\dim E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim E_i$; **(iii)** la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

Corollaire 1.22.— Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels —. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E :
$$\boxed{\dim\,(F+G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F\cap G)\,.}$$

■ Applications linéaires

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition : *Une application u de E dans F est dite **linéaire** si elle vérifie :*

$$\forall\,(x,y)\in E^2,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ u(\lambda\,x+y)=\lambda\,u(x)+u(y).$$

Notations et vocabulaire : ▷ On note $\mathscr{L}(E,F)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Lorsque E et F sont de dimensions finies, $\dim\mathscr{L}(E,F)=\dim E\times\dim F$.
▷ Une application linéaire de E dans E est un ***endomorphisme*** de E. Leur ensemble est l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$.
▷ Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est une ***forme linéaire*** sur E.
▷ Une application linéaire de E dans F bijective est un ***isomorphisme*** de E dans F. Un endomorphisme de E bijectif est un ***automorphisme*** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé ***groupe linéaire de*** E.
▷ Deux espaces vectoriels sont ***isomorphes*** si, et seulement si, il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.

Proposition 1.23.— Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base —. Étant donné deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F et une base $(e_1,e_2,\cdots,e_p)$ de E, une application linéaire u de E dans F est entièrement déterminée par la donnée des $u(e_j)$, pour $j\in[\![1,p]\!]$.

Proposition 1.24.— Application linéaire et supplémentaires —. Une application linéaire définie sur $E=E_1\oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

■ Sous-espaces stables

Définition : *Un sous-espace vectoriel F de E est **stable par un endomorphisme** u **de** E lorsque*

$$\boxed{u(F)\subset F}.$$

Dans ce cas, l'application $\hat{u}$ définie par : $\left\{\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \hat{u}(x)=u(x)\end{array}\right.$ *est **l'endomorphisme de** F **induit par** u.*

■ Noyau, image

Théorème-Définition 1.25.— Noyau d'une application linéaire —. Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble $\{x\in E\,|\,u(x)=0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé ***noyau de*** u et noté $\mathrm{Ker}\ u$.
$u\in\mathscr{L}(E,F)$ est injective si, et seulement si, son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.

Théorème-Définition 1.26.— Image d'une application linéaire —. Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble $\{u(x),\ x\in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F appelé ***image de*** u et noté $\mathrm{Im}\ u$.
u est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}\ u=F$.

L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.

Remarque : Si les endomorphismes u et v commutent, alors $\mathrm{Im}\,u$ et $\mathrm{Ker}\,u$ sont stables par v et, symétriquement, $\mathrm{Im}\,v$ et $\mathrm{Ker}\,v$ sont stables par u.

Proposition 1.27.— $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme de E dans F si, et seulement si, il existe une base de E dont l'image par u est une base de F.

Conséquences : $\triangleright$ Deux espaces vectoriels de dimensions finies E et F sont isomorphes si, et seulement si, leurs dimensions sont égales. En particulier, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
$\triangleright$ Si E et F ont même dimension finie et si u un élément de $\mathscr{L}(E,F)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) u est bijective ; (2) u est injective ; (3) u est surjective.
$\triangleright$ L'image par un isomorphisme d'une famille finie de vecteurs est une famille de vecteurs de même rang.
Une base de E étant choisie, l'application associant à un vecteur le n-uplet de $\mathbb{K}^n$ de ses coordonnées dans cette base est un isomorphisme ; en conséquence, le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la famille des n-uplets de ses coordonnées dans $\mathbb{K}^n$.

■ Endomorphismes remarquables

Définition : Endomorphisme nul de E —. ***L'endomorphisme nul de*** *E est l'application de E dans E notée $\tilde{0}$ telle que : $\forall\, x \in E,\ \tilde{0}(x) = 0_E$.*

Définition : Identité de E —. ***L'identité de*** *E est l'application de E dans E notée Id_E telle que : $\forall\, x \in E,\ \mathrm{Id}_E(x) = x$.*

$\forall\, f \in \mathscr{L}(E,F),\ f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\forall\, g \in \mathscr{L}(F,E),\ \mathrm{Id}_E \circ g = g$.

Définition : Homothétie —. *Un endomorphisme u de E est une* ***homothétie de*** *E s'il existe un scalaire k tel que : $u = k\,\mathrm{Id}_E$. u est alors l'homothétie de* ***rapport*** *k.*

Définition : Projecteurs et symétries —. *Un* ***projecteur*** *de E est un endomorphisme p de E vérifiant : $p \circ p = p$.*
Une ***symétrie*** *de E est un endomorphisme s de E vérifiant : $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.*

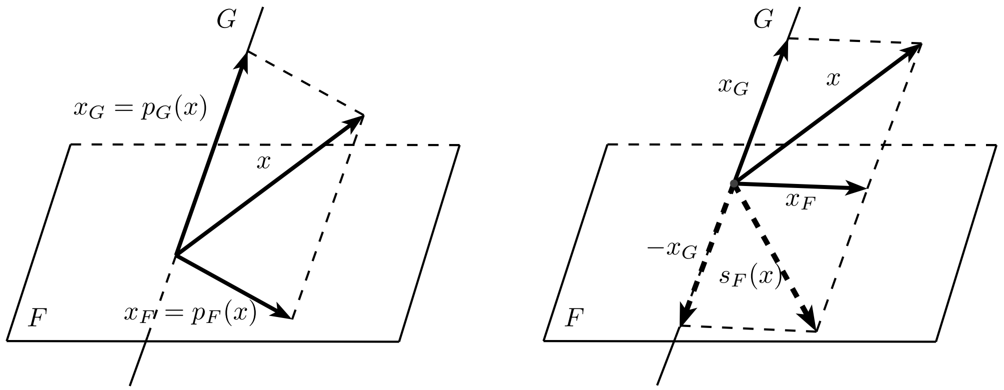
Si $E = F \oplus G$, tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme : $x = x_F + x_G$, avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.

Théorème-Définition 1.28.— Projecteurs et symétries associés à des supplémentaires —.
$p_F : x \longmapsto x_F$ et $p_G : x \longmapsto x_G$ sont des projecteurs. (p_F, p_G) est le ***couple de projecteurs associé aux sous-espaces supplémentaires*** F et G.
$s_F : x \longmapsto x_F - x_G$ et $s_G : x \longmapsto x_G - x_F$ sont des symétries. (s_F, s_G) est le ***couple de symétries associé aux sous-espaces supplémentaires*** F et G.

Remarque : Plus géométriquement, on dit aussi que p_F est la **projection sur F suivant G** et que p_G est la **projection sur G suivant F**. De même, on dit que s_F est la **symétrie d'axe F et de direction G** et que s_G est la **symétrie d'axe G et de direction F**.

Proposition 1.29.— Si p est un projecteur de E, alors $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$ et $(p, \mathrm{Id}_E - p)$ est le couple des projecteurs associés aux sous-espaces supplémentaires $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$.
Si s est une symétrie de E, alors $E = \{x \in E \,|\, s(x) = x\} \oplus \{x \in E \,|\, s(x) = -x\}$ et $(s, -s)$ est le couple de symétries associé aux sous-espaces supplémentaires $\{x \in E \,|\, s(x) = x\}$ et $\{x \in E \,|\, s(x) = -x\}$.

Remarque : Si p est un projecteur et s une symétrie tels que : $\mathrm{Im}\, p = \{x \in E \,|\, s(x) = x\}$ et $\mathrm{Ker}\, p = \{x \in E \,|\, s(x) = -x\}$, alors $s = 2\,p - \mathrm{Id}_E$.



■ Applications linéaires de rang fini

Définition : Rang d'une application linéaire de rang fini —. *Lorsque son image est de dimension finie, une application linéaire est dite* ***de rang fini*** *et son* ***rang*** *est alors la dimension de son image.*

Proposition 1.30.— E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base et u étant une application linéaire de E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F, u est de rang fini et, si on note $\operatorname{rg} u$ son rang :

$$\boxed{\operatorname{Im} u = \mathsf{Vect}\ (u(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ et } \operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\ (u(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\,.}$$

Proposition 1.31.— Soit E, F et G trois espaces vectoriels, où E est de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$:

- $v \circ u$ est de rang fini et $\operatorname{rg}\,(v\circ u) \leqslant \min\big(\operatorname{rg}\,(u), \operatorname{rg}\,(v)\big)$;
- si u est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}\,(v\circ u) = \operatorname{rg} v$;
- si v est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}\,(v\circ u) = \operatorname{rg} u$.

Autrement dit, le rang d'une application linéaire est invariant par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Proposition 1.32.— Une application linéaire induit un isomorphisme de tout supplémentaire de son noyau sur son image.

Remarque : Ce résultat ne nécessite pas que E soit de dimension finie, mais seulement que $\operatorname{Ker}\ u$ admette un supplémentaire.

Proposition 1.33.— Théorème du rang —. Si E est de dimension finie et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ alors u est de rang fini et :

$$\boxed{\dim \operatorname{Im}\ u + \dim \operatorname{Ker}\ u = \dim E.}$$

Corollaire 1.34.— u étant une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, E et F, u est un isomorphisme de E dans F si, et seulement si, $\operatorname{rg} u = \dim E = \dim F$.

■ Équation linéaire

Définition : *Une **équation linéaire** est une équation de la forme $u(x) = b$, où :*
- *u est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F ;*
- *b est un vecteur de F, appelé **second membre de l'équation**;*
- *l'**inconnue** x est un vecteur de E.*

*L'équation $u(x) = 0_F$ est **l'équation homogène associée à l'équation** $u(x) = b$.*

Exemples : ▷ $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_i\right)_{1\leqslant j\leqslant p} \end{array}\right.$ est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, donc le système de p équations à n inconnues : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_i = b_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$, est une équation linéaire.

▷ Une équation différentielle du premier ordre : $y' + a(x)\,y = b(x)$, où les fonctions a et b sont continues sur un intervalle I, est une équation linéaire. En effet, $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(I) & \to & \mathscr{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & y' + a(x)\,y \end{array}\right.$ est une application linéaire. De ce fait, une telle équation est dite *équation différentielle linéaire du premier ordre*.

Proposition 1.35.— Structure de l'ensemble des solutions —. L'ensemble des solutions d'une équation linéaire $u(x) = b$ est soit l'ensemble vide, soit, x_0 étant une solution particulière, l'ensemble $\{x_0 + x, x \in \operatorname{Ker} u\}$, noté $x_0 + \operatorname{Ker} u$.

■ Interpolation de Lagrange

L'objectif est de déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ prenant des valeurs données $(\lambda_0, \lambda_1, .., \lambda_n)$ en les $n+1$ éléments, distincts deux à deux, $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ d'un intervalle I.
L'intérêt de ce problème peut être, entre autres, d'approcher une fonction, dont on connaît les valeurs en quelques points d'un intervalle I, par un polynôme coïncidant avec la fonction en ces points. Un tel polynôme est alors *un polynôme d'interpolation de la fonction aux points précédents.*
Dans la suite, on suppose les a_0, $a_1, \cdots, a_n$ de I et les λ_0, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de $\mathbb{K}$ donnés.

Définition : *Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose :* $L_i = \displaystyle\prod_{j\in[\![0,n]\!],\, j\neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

*Les polynômes de degré n L_0, $L_1, \cdots, L_n$ sont les **polynômes interpolateurs de Lagrange en** $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$.*

On vérifie que, pour tout (i, j) de $[\![0, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.
(δ_{ij} vaut 1, si $i = j$, et 0 sinon. C'est le *symbole de Kronecker.*)

Proposition 1.36.— $(L_0, L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et, $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)\, L_i$.

Corollaire 1.37.— L'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n prenant les valeurs $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ en les $n+1$ éléments, distincts deux à deux, $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ est

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, L_i.$$

En particulier : $1 = \sum_{i=0}^{n} L_i$ et la somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ est le polynôme constant et égal à 1.

■ Polynômes d'un endomorphisme

Définition : Polynôme et polynôme annulateur d'un endomorphisme —. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E, pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$,*

*$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$ est **le polynôme de l'endomorphisme u associé au polynôme P**.*
*Si $P(u) = \tilde{0}$, alors P est un **polynôme annulateur de l'endomorphisme** u.*

On rappelle que, u étant un endomorphisme de E : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u^{n-1} = u^{n-1} \circ u$.
On vérifie que : $\forall\, (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $u^p \circ u^q = u^q \circ u^p = u^{p+q}$.

Proposition 1.38.— Soit u un endomorphisme u de E :
- $\forall\, (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u)$;
- $\forall\, P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall\, k \in \mathbb{K}$, $(kP)(u) = kP(u)$;
- $\forall\, (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Corollaire 1.39.— Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Ainsi, le noyau de $P(u)$ est stable par u.

Exemple : $u \circ (\mathrm{Id}_E + u) = (\mathrm{Id}_E + u) \circ u = u + u^2$.

Méthodes

Comment montrer qu'une famille de vecteurs est libre

> **Méthode 1.1.—** ▸ Si la famille est finie, on prouve qu'une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est nulle si, et seulement si, ses coefficients sont tous nuls.
>
> ▸ Si la famille n'est pas finie, on prouve que toute sous-famille finie extraite de cette famille est libre.
>
> ▸ On peut aussi montrer que cette famille est l'image d'une famille libre par un isomorphisme.

Mise en œuvre : exercice 1.8

Exemple : *Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \longmapsto \cos^n x$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Soit I une partie finie quelconque contenue dans $\mathbb{N}$, montrons que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de réels tels que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i\, f_i = 0 \qquad (*).$$

Notons alors P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P = \sum_{i\in I} \lambda_i\, X^i$. De l'égalité (*), on déduit que, pour tout réel x, $P(\cos x) = 0$. La fonction cos prend une infinité de valeurs et, par conséquent, P est le polynôme nul, puisqu'il admet une infinité de racines. Tous les λ_i sont nuls et $(f_i)_{i\in I}$ est libre.
De ce fait, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

Comment montrer qu'une famille $\mathscr{B}$ de vecteurs est une base

> **Méthode 1.2.—** ▸ Avec la définition, en montrant que $\mathscr{B}$ est libre et génératrice ;
>
> ▸ si $\dim E = n$ et si $\mathscr{B}$ est de cardinal n, il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est libre (respectivement génératrice) ;
>
> ▸ on peut également montrer :
>
> ▹ que le déterminant de cette famille de vecteurs est non nul ;
>
> ▹ que $\mathscr{B}$ est une base adaptée à une décomposition en somme directe de E ;
>
> ▹ que $\mathscr{B}$ est l'image d'une base d'un espace vectoriel F par un isomorphisme de F dans E.

Mise en œuvre : exercice 1.6, **exercice 1.8**, **exercice 1.9**.

Exemple : *Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales. Soit A la matrice de E définie par : $A = \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$.*

Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une base de E.

$\triangleright$ Commençons par montrer que $\dim E = n$. $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$ est un isomorphisme : en effet, elle est linéaire et bijective. Ainsi, $\dim E = \dim \mathbb{R}^n = n$.

$\triangleright$ Puisque $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une famille de E de cardinal n, il suffit de justifier qu'elle est libre pour établir qu'elle forme une base de E. Soit $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels :

$$\lambda_0\, I_n + \lambda_1\, A + \cdots + \lambda_{n-1}\, A^{n-1} = 0_n. \qquad (*)$$

Un calcul matriciel élémentaire montre que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ A^j = \operatorname{diag}(1, 2^j, \dots, n^j) \text{ et } \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j\, A^j = \operatorname{diag}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j\, k^j\right)_{1 \leqslant k \leqslant n}.$$

Notons alors P le polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j\, X^j$. De l'égalité (*) et de la remarque ci-dessus, on déduit que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(k) = 0$. P, polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, possède alors n racines distinctes : c'est donc le polynôme nul. Ses coefficients sont nuls et la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une base de E.

■ Comment déterminer la dimension d'un espace vectoriel

❑ **Méthode 1.3.—** ▸ En déterminant une base $\mathscr{B}$, le cardinal de $\mathscr{B}$ étant alors la dimension de l'espace vectoriel considéré ;

- ▸ si φ est un isomorphisme de E dans F et si $\dim E = n$, alors $\dim F = n$;
- ▸ en l'identifiant comme produit d'espaces vectoriels de dimensions connues ;
- ▸ en utilisant le théorème du rang.

Mise en œuvre : exercice 1.4, exercice 1.5, exercice 1.6.

Exemple : *Soit $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\big\}$ et $G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = -y = z\big\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leurs dimensions respectives. Montrer, ensuite, qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.*

$$\begin{aligned} F &= \big\{(x, y, -x - y)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{x\,(1, 0, -1) + y\,(0, 1, -1)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \mathsf{Vect}\,\big((1, 0, -1), (0, 1, -1)\big) \end{aligned}$$

F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Cette famille, qui est génératrice de F, est formée de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre et c'est une base de F. Elle est de cardinal 2, donc $\dim F = 2$.
$G = \big\{(x, -x, x)\,,\ x \in \mathbb{R}\big\} = \mathsf{Vect}\,\big((1, -1, 1)$: G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
$\big((1, -1, 1)\big)$ est une famille génératrice de G, évidemment libre puisque formée d'un seul vecteur non nul. C'est une base de G et $\dim G = 1$.
$F \cap G = \big\{(0, 0, 0)\big\}$ et $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

■ Comment montrer que la somme de p sous-espaces vectoriels est directe

❑ **Méthode 1.4.—** Soit $F_1, F_2, \ldots, F_p$ une famille de p sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- Si $p = 2$, il suffit de montrer que leur intersection est réduite à $\{0_E\}$;
- si $p \geqslant 3$, on utilise la proposition 1.14 en prouvant :
$$\left.\begin{array}{l}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 0_E\end{array}\right\} \Longrightarrow \forall\, i \in [\![1, p]\!],\ x_i = 0_E\,;$$
- alternativement, on peut revenir à la définition en montrant que, pour tout vecteur x de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$, il existe un ***unique*** p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ tel que :
$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i.$$
- En dimension finie, il suffit de prouver que :
$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Mise en œuvre : exercice 1.13, **exercice 1.14** et **exercice 1.15**.

Exemple : *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, n scalaires deux à deux distincts. ($n \geqslant 2$)*
Montrer que les noyaux des endomorphismes $(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E)$, $i \in [\![1, n]\!]$, sont en somme directe.

Posons : $E_i = \operatorname{Ker}\,(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E)$, $i \in [\![1, n]\!]$, et remarquons que : $x \in E_i \iff f(x) = \lambda_i\, x$.
Démontrons le résultat attendu par récurrence sur n.

▷ Pour $n = 2$: $x \in E_1 \cap E_2 \Longrightarrow f(x) = \lambda_1\, x = \lambda_2\, x \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\, x = 0_E \Longrightarrow x = 0_E$ (puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$). On a donc $E_1 \cap E_2 \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque étant immédiate.

E_1 et E_2 sont en somme directe.

▷ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 pour lequel les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe et soit λ_{n+1} un scalaire différent des n premiers.

$$\forall\,(x_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]} \in E_1 \times \cdots \times E_n \times E_{n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0_E\ (1) \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) = 0_E \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\, x_i = 0_E\ (2).$$

$\lambda_{n+1}\,(1) - (2)$ donne : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_i)\ x_i = 0_E$.

Comme les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $(\lambda_{n+1} - \lambda_i)\ x_i = 0_E$.
Or : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_{n+1} - \lambda_i \neq 0$, d'où : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0_E$, puis, d'après (1), $x_{n+1} = 0_E$.

Les $(E_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ sont en somme directe.

▷ D'après le principe de récurrence : pour tout entier naturel n non nul, si les $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont deux à deux distincts, les noyaux des endomorphismes $(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E)$, $i \in [\![1, n]\!]$, sont en somme directe.

■ Comment montrer que $E = F \oplus G$

❑ **Méthode 1.5.—** ▸ On choisit un vecteur x quelconque de E et on montre qu'il s'écrit de manière unique sous la forme $x = f + g$, avec $(f, g) \in F \times G$. Pour cela, on peut procéder par *analyse-synthèse*.

▷ *Analyse* — On suppose qu'un tel couple existe et on cherche à exprimer f et g en fonction de x. On prouve ainsi que, si elle existe, la décomposition de x est unique.

▷ *Synthèse* — On vérifie que les vecteurs f et g trouvés sont effectivement tels que :

$$(f, g) \in F \times G \text{ et } f + g = x.$$

▸ On peut aussi montrer que la « concaténation » d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

▸ En dimension finie, on peut prouver que deux des trois propositions suivantes sont vérifiées : la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de E, la somme de F et de G est égale à E, $F \cap G = \{0_E\}$.

Mise en œuvre : exercice 1.18, **exercice 1.19** et **exercice 1.22**.

Exemple : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant $u + u^3 = \tilde{0}$. Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.*

Soit $x \in E$.

▷ *Analyse* — Si on suppose qu'il existe un couple $(y, z) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_E)$ tel que $x = y + z$, alors $u(x) = u(y) + u(z) = u(z)$, puis $u^2(x) = u^2(z) = -z$ (z appartient à $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_E)$, donc vérifie $u^2(z) = -z$). On a donc, nécessairement, $z = -u^2(x)$ et $y = x + u^2(x)$, ce qui établit l'unicité du couple (y, z), dans le cas où celui-ci existe.

▷ *Synthèse* — Posons $y = x + u^2(x)$ et $z = -u^2(x)$. On a bien :
$y + z = x$, $u(y) = u(x) + u^3(x) = (u + u^3)(x) = 0_E$ (puisque, par hypothèse, $u + u^3 = \tilde{0}$) et $(u^2 + \mathrm{Id}_E)(z) = -(u^4 + u^2)(x) = -u\big((u^3 + u)(x)\big) = 0_E$ (pour la même raison).

Tout vecteur x de E s'écrit, de manière unique, comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} u$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_E)$: $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.

■ Comment déterminer le rang d'une application linéaire

❑ **Méthode 1.6.—** ▸ Dans la plupart des cas, on utilisera le théorème du rang.

▸ Il arrivera aussi que l'on puisse accéder directement à la dimension de l'image de cette application linéaire en déterminant le rang de la famille des images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

▸ Ultérieurement, on verra que le rang d'une application linéaire est celui de l'une quelconque de ses matrices.

Mise en œuvre : de l'**exercice 1.7** à l'**exercice 1.11**, **exercice 1.24**.

Exemple : *E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) est une base de E et f est l'endomorphisme de E défini par :*

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3,\ f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \text{ et } f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

Déterminer le rang de f.

Le rang de f est celui de la famille $(f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3))$.

▷ $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont non colinéaires, donc le rang de cette famille est supérieur ou égal à 2. Si la famille est libre, son rang est 3, sinon, son rang est 2.

▷ $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0_E$ est équivalent à

$$(2\lambda_2 - \lambda_3)\, e_1 + (2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3)\, e_2 + (3\lambda_1 - 8\lambda_2 + 6\lambda_3)\, e_3 = 0_E.$$

D'où : $\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 - 8\lambda_2 + 6\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

La famille est libre, donc de rang 3 et f est également de rang 3.

■ Quand utiliser le théorème du rang

❑ **Méthode 1.7.—** Dans d'innombrables situations réclamant de calculer des dimensions ou des rangs.

Mise en œuvre : de l'**exercice 1.7** à l'**exercice 1.11**.

Exemple : *E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u est un endomorphisme de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$; (2) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$; (3) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$.

▷ Supposons (1). On a toujours $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$. Soit, maintenant $x \in \operatorname{Ker} u^2$, alors :

$$u(x) \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0_E\}, \text{ donc : } x \in \operatorname{Ker} u \text{ et } \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2.$$

▷ Supposons (2). On a toujours $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$. D'après le théorème du rang :

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = \operatorname{rg} u^2 + \dim \operatorname{Ker} u^2.$$

Donc $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2$: $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} u^2$ ont la même dimension et sont donc égaux.

▷ Supposons (3). Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \operatorname{Im} u^2$. Il existe donc $z \in E$ tel que : $u(x) = u^2(z)$. Par linéarité, $v = x - u(z) \in \operatorname{Ker} u$ et $x = v + u(z) \in \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$, d'où : $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$. Comme $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$, on a bien : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

■ Quand utiliser les polynômes de Lagrange

❑ **Méthode 1.8.—** Chaque fois que l'on cherche à déterminer un polynôme prenant des valeurs données en des points donnés.

Mise en œuvre : exercice 1.21.

Exemple : *Soit a, b et c trois réels distincts et P dans $\mathbb{R}[X]$. Calculer, en fonction de polynômes d'interpolation de Lagrange, le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)(X-c)$.*

$$\exists\,!\,(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P = (X-a)(X-b)(X-c)Q + R.$$

Méthodes

Le reste cherché est donc le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 prenant les valeurs $P(a)$ en a, $P(b)$ en b et $P(c)$ en c, d'où :

$$R = P(a)\,L_a + P(b)\,L_b + P(c)\,L_c, \text{ où } \left\{ \begin{array}{lcl} L_a & = & \dfrac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} \\ L_b & = & \dfrac{(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)} \\ L_c & = & \dfrac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)} \end{array} \right.$$

■ Comment reconnaître un hyperplan

> ❑ **Méthode 1.9.—** ▸ En dimension quelconque, soit en l'identifiant comme étant le noyau d'une forme linéaire non nulle, soit en montrant qu'il admet un supplémentaire de dimension 1.
>
> ▸ En dimension finie n, on peut, en plus, soit montrer que c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, soit constater qu'il admet, dans une base donnée, une équation de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, où les a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous nuls.

Mise en œuvre : de l'**exercice 1.22** à l'**exercice 1.26**.

Exemple : *Soit* $H = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\ f'(0) = 0 \right\}$. *Montrer que* H *est un hyperplan de* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *et déterminer un supplémentaire de* H *dans* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

▷ $f \longmapsto f'(0)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, donc H, qui est le noyau de cette forme linéaire non nulle, est un hyperplan de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

▷ Si $g : x \longmapsto x$, alors $g \notin H$, donc $\mathbb{R}\,g = \{x \longmapsto k\,x,\ k \in \mathbb{R}\}$ est un supplémentaire de H dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

■ Comment montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme

> ❑ **Méthode 1.10.—** Si u est un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E :
>
> - ▸ on peut montrer que l'image par u d'un vecteur quelconque de F est aussi un vecteur de F ;
> - ▸ on peut aussi tenter d'identifier une situation classique : $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v lorsque u et v commutent ; pour tout polynôme P, $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u ; la restriction de u à F est une homothétie ;
> - ▸ dans le cas où E est de dimension finie, on verra, dans le chapitre 2, une caractérisation matricielle de la stabilité de F par u.

Mise en œuvre : **exercice 1.27**, **exercice 1.28**.

Exemple : *Démontrer les résultats de cours :*
1. *une droite est stable par un endomorphisme si, et seulement si, la restriction de cet endomorphisme à cette droite est une homothétie ;*
2. *si u est un endomorphisme de E, pour tout élément P de $\mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Ker} P(u)$ est stable par u.*

1. Soit $D = \mathbb{K}a$ une droite vectorielle stable par l'endomorphisme u : $u(a) \in D$, donc il existe un scalaire λ tel que : $u(a) = \lambda a$.
Pour tout vecteur $x = ka$ de $D = \mathbb{K}a$, $u(x) = ku(a) = k(\lambda a) = \lambda x$: la restriction de u à D est une homothétie.
Réciproquement, si la restriction à une droite $D = \mathbb{K}a$ de l'endomorphisme u est une homothétie, alors D est clairement stable par u.
2. D'après le cours, il suffit de vérifier que u et $P(u)$ commutent, ce qui est facile, puisque u commute avec n'importe laquelle de ses puissances (ou puisque deux polynômes de u commutent).

Exemple : *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on suppose que $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda\, Id_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$. Montrer que E_λ est stable par u et déterminer l'endomorphisme $\hat{u}$ de E_λ induit par u.*

$u - \lambda \operatorname{Id}_E$ est un polynôme de l'endomorphisme u, donc son noyau E_λ est stable par u.
$\forall x \in E_\lambda$, $\hat{u}(x) = u(x) = \lambda\, x$, puisque $(u - \lambda \operatorname{Id}_E)(x) = 0_E$. $\hat{u}$ est donc l'homothétie de rapport λ de E_λ.

Méthodes

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Une famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.	☐	☐
2. En dimension finie, une famille génératrice est une base.	☐	☐
3. $b = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ étant une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ étant une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.	☐	☐
4. En dimension finie, deux sous-espaces vectoriels de même dimension sont égaux.	☐	☐
5. La somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels est directe si, et seulement si, leurs intersections deux à deux est réduite à $\{0_E\}$.	☐	☐
6. En dimension finie, il suffit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim E_i = \dim E$ pour que les E_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, soient supplémentaires dans E.	☐	☐
7. Si $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ et si, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, b_i est une base de E_i, alors $b = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} b_i$ est une base de E.	☐	☐
8. Le rang d'une famille liée est strictement inférieur à son cardinal.	☐	☐
9. Si E et F sont de dimensions finies, il suffit que l'application linéaire u de E dans F soit injective (respectivement surjective) pour être bijective.	☐	☐
10. Dans $\mathbb{K}^4$, $ax + by + cz + dt = 0$, où $(a, b, c, d) \neq 0_{\mathbb{K}^4}$, est une équation définissant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$ de dimension 3.	☐	☐
11. $-\dfrac{4}{\pi^2}X^2 + 1$ est le seul polynôme de degré 2 prenant les mêmes valeurs que la fonction cosinus en $-\dfrac{\pi}{2}$, 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.	☐	☐
12. Pour tout scalaire λ, $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par u.	☐	☐

Énoncé des exercices

Exos minutes

Exercice 1.1 : Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que, si $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est une somme directe, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j \Longrightarrow E_i \cap E_j = \{0_E\}).$$

2. Montrer que, dans le cas $n = 2$, il y a même équivalence :

$$E_1 + E_2 \text{ est une somme directe} \Longleftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0_E\}.$$

3. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple choisi dans $\mathbb{R}^2$, que, dans le cas $n > 2$, la réciproque de l'implication de la première question est fausse.

Exercice 1.2 : Montrer que : si les endomorphismes u et v commutent, alors $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

Exercice 1.3 : Soit a, b et c trois réels deux à deux distincts, montrer que les trois polynômes interpolateurs de Lagrange associés à ces trois réels, L_a, L_b et L_c, forment une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

Base, dimension, rang et théorème du rang

Exercice 1.4 : 1. Soit la famille (e_1, e_2, e_3) de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, avec $e_1 = (-1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (1, 1, -1)$. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du vecteur $(2,\ 3,\ -1)$ dans cette base.

2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces engendrés, dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ suivant le cas, par les familles de vecteurs suivantes :

$$\{(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1)\}$$
$$\{(-1,1,1), (3,-2,6), (0,1,9)\}$$
$$\{(0,1,2,-1), (1,2,-1,0), (0,2,-1,1), (4,6,1,3)\}.$$

Exercice 1.5 : Dans $\mathbb{C}_3[X]$, on considère les polynômes $P_1(X) = 1 + X^2$, $P_2(X) = -2X - 3X^2$, $P_3(X) = 1 - X + 2X^2 - 3X^3$, $P_4(X) = 1 + X + 2X^2$ et $P_5(X) = 3 - X + 6X^2 - 6X^3$. Trouver des bases des sous-espaces : $F = \operatorname{Vect}(P_1,\ P_2)$, $G = \operatorname{Vect}(P_3,\ P_4,\ P_5)$, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 1.6 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A et B des parties de E, comparer $\mathsf{Vect}\,(A \cup B)$ et $\mathsf{Vect}\,(A) \cup \mathsf{Vect}\,(B)$, $\mathsf{Vect}\,(A \cap B)$ et $\mathsf{Vect}\,(A) \cap \mathsf{Vect}\,(B)$, puis $\mathsf{Vect}\,(\mathsf{Vect}\,(A))$ et $\mathsf{Vect}\,(A)$.

Exercice 1.7 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et deux endomorphismes u et v de E, tels que $u \circ v = \tilde{0}$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$.

1. Montrer que : $\operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. En déduire que : $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.

2. À l'aide du théorème du rang, montrer que : $\dim E \geqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$. Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 1.8 : On définit l'application Φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même en posant :

$$\Phi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Prouver que Φ est linéaire et n'est pas injective.
2. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$, Φ induit un isomorphisme entre $X^2\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$.
3. En déduire que Φ est surjective.

Exercice 1.9 : Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, montrer que :
$$\dim\,(u(G)) = \dim G - \dim\,(G \cap \operatorname{Ker}\,u)\,.$$

Exercice 1.10 : Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies avec $n = \dim\,F$. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, alors :
$$\operatorname{rg}\,(u) + \operatorname{rg}\,(v) - n \leqslant \operatorname{rg}\,(v \circ u) \leqslant \min\,(\operatorname{rg}\,(u), \operatorname{rg}\,(v))\,.$$

■ Sommes, sommes directes, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs

Exercice 1.11 🎙 : Soit f et g des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. On suppose que :
$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g.$$
Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 1.12 : Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F, v une application linéaire de F dans G et $w = v \circ u$.
Montrer que :
(w est un isomorphisme de E dans G) $\Longleftrightarrow$ (u injective, v surjective et $F = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$).

Exercice 1.13 🎙 : Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $u^3 - 3u^2 + 2u = \tilde{0}$.
Montrer que $E = \operatorname{Ker}\,u \oplus \operatorname{Ker}\,(u - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}\,(u - 2\operatorname{Id}_E)$.

Exercice 1.14 : Soit $E_1, E_2, \cdots, E_n$ n sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E $(n \geqslant 2)$, montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(1) E_1, $E_2, \cdots$, E_n sont en somme directe ;
(2) E_1, $E_2, \cdots$, E_{n-1} sont en somme directe et $(E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}) \cap E_n = \{0_E\}$.

Exercice 1.15 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, $n \geqslant 2$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note : $G_i = \mathsf{Vect}\left(\{e_k,\, k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}\}\right)$ et $H_i = \{f \in \mathscr{L}(E),\, G_i \subset \operatorname{Ker}\,f\}$.
1. Expliquer pourquoi les H_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que la somme des H_i est directe.

Exercice 1.16 : Soit, dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces vectoriels $F = \mathsf{Vect}\,\{(1, 1, 0), (2, 0, -1)\}$ et $G = \mathsf{Vect}\,\{(1, -1, 0), (1, 0, -2)\}$.
1. Justifier, sans calculs, que $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
2. Déterminer $F \cap G$.
3. Trouver un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F, puis un supplémentaire G' de $F \cap G$ dans G.

Exercice 1.17 🎙 : Soit f un endomorphisme de E pour lequel il existe deux réels a et b, distincts, tels que :

$$(f - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) = \tilde{0}.$$

1. Montrer que $p = \dfrac{f - a\,\mathrm{Id}_E}{b-a}$ et $q = \dfrac{f - b\,\mathrm{Id}_E}{a-b}$ sont des projecteurs.

2. Calculer $p+q$, $p \circ q$, $q \circ p$ et $b\,p + a\,q$. En déduire f^n en fonction de p et q, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1.18 : On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, deux projecteurs p et q de E, vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.

2. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(p \circ q) = \mathrm{Im}\,p \cap \mathrm{Im}\,q$.

3. Montrer que : $\mathrm{Ker}\,(p \circ q) = \mathrm{Ker}\,p + \mathrm{Ker}\,q$.

■ Équations linéaires

Exercice 1.19 : À l'aide de l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$, où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n,$$

montrer que le problème :
« Trouver toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 5$ » est une équation linéaire. Proposer alors une méthode pour la résoudre.

Exercice 1.20 🎙 : Soit p un entier naturel, on définit l'application Δ de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ vers $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ par :

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Delta$.

3. Montrer que $\mathrm{Im}\,\Delta = \mathbb{R}_p[X]$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel p, il existe un et un seul polynôme Q de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ tel que :

$$\Delta(Q) = \frac{X^p}{p!} \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

■ Interpolation

Exercice 1.21 : Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que : $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(12) = 1$, $P(13) = 4$.

■ Hyperplans et formes linéaires

Exercice 1.22 : Vérifier que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Déterminer, pour chacun d'eux, sa dimension et une de ses bases.

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\} \\ G & = & \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t = 0\} \end{array}$$

Exercice 1.23 : Les parties de $\mathbb{R}^3$ déterminées par les équations suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned}
x+5y+18z &= 0 \qquad (E_1)\\
x=2y &= 3z \qquad (E_2)\\
x+y+z+1 &= 0 \qquad (E_3)\\
(x+3)^2+(y+1)^2+z^2 &= x^2+(y+3)^2+(z+1)^2 \qquad (E_4)\\
|x+y| &= |x-y| \qquad (E_5)\\
x^3 &= y^3=z^3 \qquad (E_6)
\end{aligned}$$

Exercice 1.24 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, x_0 un vecteur non nul de E et u une forme linéaire non nulle. On définit l'application f en posant $f(x)=u(x)x_0$.
1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Quel est son rang ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur.
4. Soit un entier naturel $k>0$. Calculer f^k.

Exercice 1.25 : Soit $H=\left\{f\in\mathscr{C}^1([0,1]),\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathscr{C}^1([0,1])$ et déterminer un supplémentaire de H dans $\mathscr{C}^1([0,1])$.

Exercice 1.26 : On note $E=\mathbb{K}[X]$ et on considère l'endomorphisme φ de E défini par :

$$\varphi(P)=P\left(\frac{X}{2}\right)+P\left(1-\frac{X}{2}\right)-2P(X).$$

1. Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré du polynôme P. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.
2. On pose $Q_0=1$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $Q_n=\varphi(X^n)$. Montrer que la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E. Montrer que $\operatorname{Im}\varphi$ est un hyperplan de E.
3. On considère la forme linéaire θ sur E définie par : $\theta(P)=\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que : $\operatorname{Im}\theta=\operatorname{Ker}\varphi$.

■ Sous-espaces stables, polynômes d'endomorphisme

Exercice 1.27 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$, f un endomorphisme de E tel que $f^2=-\mathrm{Id}_E$ et x un vecteur non nul de E.
1. Montrer que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, puis qu'aucune droite de E n'est stable par f.
2. Montrer que le plan $\mathsf{Vect}\big(x,f(x)\big)$ est stable par f.

Exercice 1.28 : Soit V et W deux sous-espaces supplémentaires, non réduits à $\{0_E\}$, de l'espace vectoriel E, p la projection sur V parallèlement à W.
1. Identifier l'endomorphisme $q=\mathrm{Id}_E-p$.
2. Montrer que les sous-espaces stables par $f=ap+bq$, où a et b sont des scalaires distincts, sont les sous-espaces vectoriels A de E tels que : $A=A\cap V+A\cap W$.
3. En déduire les sous-espaces de E stables par une symétrie s de E.

Exercice 1.29 : f et g étant des éléments de $\mathscr{L}(E)$:
1. Calculer $(Id_E-3f)^2$, $(f+g)^2$ et $(f-g)\circ(f+g)$.

2. On suppose, ici, que f et g commutent, calculer $(f-g)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}\right)$.
3. « Factoriser » $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E$. Peut-on en permuter les deux « facteurs » ?
4. Si $f^5 = \tilde{0}$ (endomorphisme nilpotent), montrer que $\mathrm{Id}_E + f$ est un automorphisme de E.

■ Avec Python

Exercice 1.30 : Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $S(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k!}$.
1. Justifier que la quantité $S(P)$ est correctement définie et établir que S est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Écrire une fonction `Factorielle`(n) à qui on fournit un entier naturel n est qui renvoie $n!$.
3. Écrire une fonction Python `Approx`(P,N) à qui on fournit un polynôme P et un entier naturel N et qui renvoie la valeur de la somme partielle d'ordre N de la série précédente.
4. On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(X) = (X-(n-1))H_{n-1}(X)$.
a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0(X), H_1(X), \dots, H_n(X))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
b. Calculer $S(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. a. Calculer `Approx`(P,100) lorsque P prend successivement les valeurs X^k avec $k \in [\![0,6]\!]$. Que peut-on conjecturer ? *On pourra utiliser le module numpy.polynomial*
b. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, exprimer $S(X^{p+1})$ à l'aide des $S(X^k)$ pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ puis démontrer la conjecture de la question précédente.

D'après Centrale PSI

■■ Indications

Ex. 1.4

Si une famille est liée, la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre est strictement inférieure au cardinal de la famille.

Ex. 1.5

Penser à la notion de base adaptée à $F \oplus G$.

Ex. 1.6

Chercher à prouver des inclusions, ou à les infirmer à l'aide de contre-exemples.

Ex. 1.8

Pour la deuxième question, déterminer le degré de $\Phi(P)$ en considérant les monômes de plus hauts degrés. En déduire le noyau de Φ.

Ex. 1.9

Appliquer le théorème du rang à $u_{|G}$.

Ex. 1.10

Commencer par appliquer le théorème du rang à $v_{|\mathrm{Im}\,(u)}$.

Ex. 1.11

Appliquer le théorème du rang à f et g, puis traduire que l'une de ces sommes n'est pas directe à l'aide de dimensions.

Ex. 1.13

Procéder par analyse-synthèse.

Ex. 1.16

Pour la première question raisonner sur les dimensions.

Ex. 1.17

Dans la dernière question, on peut utiliser la formule du binôme de Newton.

Ex. 1.18

Procéder par double inclusion.

Ex. 1.19

Montrer que l'application proposée est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ex. 1.21

Utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Ex. 1.22

Reconnaître les équations d'hyperplans.

Ex. 1.23

Commencer par identifier des hyperplans, puis des intersections d'hyperplans.

Ex. 1.25

Mettre en évidence une forme linéaire non nulle dont H est le noyau, puis une droite vectorielle quelconque non incluse dans H.

Ex. 1.26

Pour la première question, raisonner sur les monômes de plus haut degré de $\varphi(P)$ pour en déterminer le degré.

Ex. 1.27

1. *On peut raisonner par l'absurde.*

Ex. 1.28

Pour la deuxième question, démontrer l'implication directe, puis la réciproque en ne perdant pas de vue que tout x de E s'écrit $p(x) + q(x)$.

Ex. 1.29

1. *f et g ne commutent pas nécessairement.*
3. *Penser à la factorisation du polynôme $X^2 - 5X + 6$.*
4. *Factoriser $a^5 + b^5$, puis $X^5 + 1$ et, enfin, $f^5 + Id_E$.*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
V	F	V	F	F	F	V	V	F	V	V	V

1. Toute famille contenant une famille liée est liée et $\{0_E\}$ est clairement liée.

2. Une famille génératrice n'est pas nécessairement libre. Elle le sera si son cardinal est égal à la dimension de l'espace vectoriel considéré.

3. C'est la proposition 1.23 du cours.

4. $\mathbb{R}^3$ et à $\mathbb{R}_2[X]$ sont tous les deux de dimension 3 et ne sont pas égaux. En revanche, deux espaces vectoriels de même dimension sont isomorphes.

5. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, $\mathsf{Vect}\,(1,0)$, $\mathsf{Vect}\,(0,1)$ et $\mathsf{Vect}\,(1,1)$ ont bien deux à deux des intersections réduites à $\left\{0_{\mathbb{R}^2}\right\}$ et ils ne sont pas en somme directe, car $(1,0)+(0,1)+(-1,-1)=0_{\mathbb{R}^2}$, sans que chacun de ces trois vecteurs ne soit nul.

6. Il faut adjoindre à l'hypothèse "$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim E_i = \dim E$" l'une des deux hypothèses supplémentaires suivantes :

$$\text{la somme } \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ est directe}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = E$$

pour obtenr la conclusion : $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

7. C'est un résultat très souvent utilisé pour construire une matrice simple d'un endomorphisme de E laissant stable chacun des E_i.

8. Si le sous-espace vectoriel engendré par cette famille avait pour dimension le cardinal de la famille, alors celle-ci, famille génératrice, serait une base de ce sous-espace vectoriel, donc une famille libre.

9. Il manque l'hypothèse : $\dim E = \dim F$.

10. $(x,y,z,t) \longmapsto ax+by+cz+dt$ est une forme linéaire non nulle de $\mathbb{K}^4$. Son noyau, $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 / ax+by+cz+dt=0\right\}$, est donc un hyperplan de $\mathbb{K}^4$: c'est bien un sous-espace vectoriel de dimension 3.

11. $-\dfrac{4}{\pi^2}X^2+1$ prend effectivement les mêmes valeurs que la fonction cosinus en $-\dfrac{\pi}{2}$, 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. Ce polynôme est dans $\mathbb{R}_2[X]$, il s'écrit donc dans la base $\left(L_{-1}, L_0, L_1\right)$ des polynômes interpolateurs en $-\dfrac{\pi}{2}$, 0 et $\dfrac{\pi}{2}$:

$$0\,L_{-1} + 1\,L_0 + 0\,L_1, \text{ d'où son unicité.}$$

On a bien $L_0 = \dfrac{\left(X+\frac{\pi}{2}\right)\left(X-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(0+\frac{\pi}{2}\right)\left(0-\frac{\pi}{2}\right)} = -\dfrac{4}{\pi^2}X^2+1$.

12. Le noyau d'un polynôme de l'endomorphisme u est stable par u.

❑ Erreurs classiques

- Oublier que l'image d'une application linéaire est, en dimension finie, le sous-espace vectoriel engendré par les images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.
- Pour montrer que la somme de plus de deux sous-espaces vectoriels est directe, il ne suffit pas de montrer que leurs intersections deux à deux sont réduites à $\{0_E\}$.
- Ne pas dominer la notion d'endomorphisme induit par un endomorphisme u de E sur un sous-espace vectoriel de E stable par u.

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. Si $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est une somme directe, si $i \neq j$ et si $x \in E_i \cap E_j$, alors $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ et il se décompose en :
$x = 0_E + ... + 0_E + \underset{i}{x} + 0_E + ... + 0_E$ et $x = 0_E + ... + 0_E + \underset{j}{x} + 0_E + ... + 0_E$.
Du fait de l'unicité de la décomposition, $x = 0_E$.

2. Si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$, alors, $\forall\,(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $(x_1 + x_2 = 0_E \Rightarrow x_1 = -x_2)$, donc ces deux vecteurs appartiennent à $E_1 \cap E_2$ et sont donc nuls : $E_1 + E_2$ est directe.

3. $\mathsf{Vect}\,(1,0)$, $\mathsf{Vect}\,(0,1)$ et $\mathsf{Vect}\,(1,1)$ sont d'intersections deux à deux réduites à $\{0_E\}$ et la somme de ces trois s.e.v. n'est pas directe, puisque
$(1,0) + (0,1) + (-1,-1) = (0,0)$, sans que ces trois vecteurs soient nuls.

Exercice 1.2

Soit y appartenant à $\operatorname{Im} u$, il existe x appartenant à E tel que : $u(x) = y$.

$v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$, donc $v(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$, $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E$, donc $v(x) \in \operatorname{Ker} u$ et $v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u$.

Exercice 1.3

Ces trois polynômes vérifient : $\left\{\begin{array}{l} L_a(a) = 1 \\ L_a(b) = 0 \\ L_a(c) = 0 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} L_b(a) = 0 \\ L_b(b) = 1 \\ L_b(c) = 0 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} L_c(a) = 0 \\ L_c(b) = 0 \\ L_c(c) = 1 \end{array}\right.$

$\forall(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda\, L_a + \mu\, L_b + \nu\, L_c = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda\, L_a(a) + \mu\, L_b(a) + \nu\, L_c(a) = \lambda = 0 \\ \lambda\, L_a(b) + \mu\, L_b(b) + \nu\, L_c(b) = \mu = 0 \\ \lambda\, L_a(c) + \mu\, L_b(c) + \nu\, L_c(c) = \nu = 0 \end{array}\right.$$

et $(L_a,\, L_b,\, L_c)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 1.4

1. $\triangleright$ $\mathbb{R}^3$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, cette famille de cardinal 3 est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, elle est libre.
$\forall\,(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$,

$$\lambda\, e_1 + \mu\, e_2 + \nu\, e_3 = 0_{R^3} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \mu - \nu = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\triangleright$ Les coordonnées de $(2,\ 3,\ -1)$ dans cette base sont les composantes du triplet (λ, μ, ν) tel que :

$$(2,\ 3,\ -1) = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3.$$

Corrigé

On est ramené au système :

$$\begin{cases} -\lambda+\mu+\nu &= 2 \\ \lambda-\mu+\nu &= 3 \\ \lambda+\mu-\nu &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\nu &= 5 \\ \lambda-\mu+\nu &= 3 \\ 2\lambda &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda &= 1 \\ \mu &= \dfrac{1}{2} \\ \nu &= \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées de $(2,\ 3,\ -1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

En dimension n, une famille de n vecteurs est libre si, et seulement si, son déterminant est non nul.

2. $\triangleright$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$, donc la famille considérée est une base de $\mathbb{R}^3$, qui est le sous-espace vectoriel engendré.

$\triangleright$ $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 0$ (deux lignes colinéaires), donc la famille considérée n'est pas libre et n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Le sous-espace vectoriel engendré par cette famille est donc de dimension exactement 2, puisque ses deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires. Ces deux premiers vecteurs forment donc une base du sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

$\triangleright$ La famille considérée est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$, qui est le sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

Exercice 1.5

$\triangleright$ $\forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda\, P_1 + \mu\, P_2 = 0_{\mathbb{C}_3[X]} \Leftrightarrow \lambda - 2\mu\, X + (\lambda - 3\mu)X^2 = 0_{\mathbb{C}_3[X]}$, donc $\lambda = \mu = 0$: $\{P_1, P_2\}$ est une famille libre. C'est donc une base de F.

$\triangleright$ On constate que : $P_5 = 2P_3 + P_4$, donc le rang de la famille $\{P_3, P_4, P_5\}$ est strictement inférieur à 3. P_3 et P_4 ne sont pas colinéaires, donc ce rang est exactement 2 : G est de dimension 2. (P_3, P_4) est une famille libre de cardinal 2 de G, espace vectoriel de dimension 2 : c'est donc une base de G.

$\triangleright$ Soit $P \in \mathbb{C}_3[X]$.

$P \in F \cap G \iff \exists(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{C}^4$ tel que $P = \lambda\, P_1 + \mu\, P_2 = \lambda'\, P_3 + \mu'\, P_4$.

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées dans une base donnée sont égaux.

$(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{C}^4$ vérifie alors :

$\lambda - 2\mu X + (\lambda - 3\mu)X^2 = (\lambda' + \mu') + (-\lambda' + \mu')X + (2\lambda' + 2\mu')X^2 - 3\lambda'\, X^3$.

$$\begin{cases} \lambda &= \lambda' + \mu' \\ -2\mu &= -\lambda' + \mu' \\ \lambda - 3\mu &= 2\lambda' + 2\mu' \\ 0 &= -3\lambda' \end{cases} \Longrightarrow \lambda = \mu = \lambda' = \mu' = 0 \Longrightarrow P = 0_{\mathbb{C}_3[X]}.$$

Donc : $F \cap G = \{0_{\mathbb{C}_3[X]}\}$.

$\triangleright$ F et G sont donc en somme directe. On obtient une base de $F \oplus G$ en concaténant une base de F et une base de G : $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $F \oplus G$.

Exercice 1.6

$\triangleright$

$$\begin{cases} A & \subset & A \cup B \\ B & \subset & A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathsf{Vect}\,(A) & \subset & \mathsf{Vect}\,(A \cup B) \\ \mathsf{Vect}\,(B) & \subset & \mathsf{Vect}\,(A \cup B) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \mathsf{Vect}\,(A) \cup \mathsf{Vect}\,(B) \subset \mathsf{Vect}\,(A \cup B).$$

La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'étant pas, en général, un sous-espace vectoriel, il doit être possible de trouver un contre-exemple à l'inclusion réciproque.
Dans $\mathbb{R}^2$, si $A = \{(1,0)\}$ et $B = \{(0,1)\}$, alors : $\mathsf{Vect}\,(A) = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$, $\mathsf{Vect}\,(B) = \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$ et $\mathsf{Vect}\,(A \cup B) = \mathbb{R}^2$. Il est clair que, dans ce cas, l'inclusion précédente est stricte.

$\triangleright$

$$\begin{cases} A \cap B & \subset & A \\ A \cap B & \subset & A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathsf{Vect}\,(A \cap B) & \subset & \mathsf{Vect}\,(A) \\ \mathsf{Vect}\,(A \cap B) & \subset & \mathsf{Vect}\,(B) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \mathsf{Vect}\,(A \cap B) \subset \mathsf{Vect}\,(A) \cap \mathsf{Vect}\,(B).$$

L'inclusion réciproque est, en général, fausse comme le montre le contre-exemple suivant :
dans $\mathbb{R}^2$, prenons $A = \{(1,0)\}$ et $B = \{(3,0)\}$, alors : $A \cap B = \emptyset$,
$\mathsf{Vect}\,(A) = \mathsf{Vect}\,(B) = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$, $\mathsf{Vect}\,(A) \cap \mathsf{Vect}\,(B) = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathsf{Vect}\,(A \cap B) = \{(0,0)\}$ (plus petit sous-espace vectoriel contenant $\emptyset$).
Dans ce cas, l'inclusion précédente est stricte.

$\triangleright$ $\mathsf{Vect}\,(\mathsf{Vect}\,(A))$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathsf{Vect}\,(A)$, donc $\mathsf{Vect}\,(A)$ lui-même : $\mathsf{Vect}\,(\mathsf{Vect}\,(A)) = \mathsf{Vect}\,(A)$.

Exercice 1.7

1. Si $y \in \operatorname{Im}(u+v)$, alors : $\exists x \in E$ tel que $y = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$, donc $y \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$: $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.
$u + v \in \mathrm{GL}(E)$, donc : $E = \operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \subset E$, puis :

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v.$$

$\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \{u(a) + v(b),\ (a,b) \in E^2\}$

2. $u \circ v = \tilde{0} \Longrightarrow \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u \Longrightarrow \operatorname{rg}(v) \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$.
Or, d'après le théorème du rang : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$, donc :

$$\dim E \geqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

D'autre part, $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \Longrightarrow \dim E \leqslant \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v$, d'où :

$$\dim E = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v), \text{ autrement dit : } E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v.$$

$\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de E.

Exercice 1.8

1. $\triangleright$ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) + (\lambda P + \mu Q)(X-1) \\ &\qquad -2(\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) + \lambda P(X-1) + \mu Q(X-1) \\ &\qquad -2\lambda P(X) - 2\mu Q(X) \\ &= \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q) \end{aligned}$$

Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

$\triangleright$ On a clairement : $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker} \Phi$, donc : $\operatorname{Ker} \Phi \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et Φ n'est pas injective.

2. Déterminons plus précisément le noyau de Φ :

On va procéder par double inclusion.

Posons : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $n \geqslant 2$ et $a_n \neq 0$, alors :

$$\Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k + \sum_{k=0}^{n} a_k (X-1)^k - 2\sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

▷ Le coefficient du monôme de degré n de $\Phi(P)$ est : $a_n + a_n - 2a_n = 0$.

▷ Le coefficient du monôme de degré $n-1$ de $\Phi(P)$ est :

$$na_n + a_{n-1} - na_n + a_{n-1} - 2a_{n-1} = 0.$$

▷ Le coefficient du monôme de degré $n-2$ de $\Phi(P)$ est :

$$\frac{n(n-1)}{2}a_n + (n-1)a_{n-1} + a_{n-2} + \frac{n(n-1)}{2}a_n - (n-1)a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-2},$$

c'est-à-dire : $n(n-1)a_n \neq 0$.

On a donc, si $\deg P \geqslant 2$, $\deg \Phi(P) = -2 + \deg P$ et $P \notin \operatorname{Ker} \Phi$:

$$\operatorname{Ker} \Phi \subset \mathbb{R}_1[X].$$

Réciproquement, si $P = aX + b$, $\Phi(P) = 0$, donc : $R_1[X] \subset \operatorname{Ker} \Phi$.

$$\operatorname{Ker} \Phi = \mathbb{R}_1[X].$$

Raisonnons maintenant sur Φ_n, endomorphisme induit par Φ sur $\mathbb{R}_{n+2}[X]$. (On rappelle que : $\Phi\left(\mathbb{R}_{n+2}[X]\right) \subset \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_{n+2}[X]$.)

D'après le cours : $\mathbb{R}_{n+2}[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus X^2\mathbb{R}_n[X]$. $X^2\mathbb{R}_n[X]$ est donc un supplémentaire dans $\mathbb{R}_{n+2}[X]$ du noyau de Φ_n.

Toujours d'après le cours, Φ_n, et donc Φ, induit un isomorphisme de $X^2\mathbb{R}_n[X]$ dans $\Phi_n\left(\mathbb{R}_{n+2}[X]\right)$.

Or : $\Phi_n\left(\mathbb{R}_{n+2}[X]\right) \subset \mathbb{R}_n[X]$ et

Φ est un endomorphisme non injectif et surjectif de $\mathbb{R}[X]$: cet espace vectoriel n'est donc pas de dimension finie.

$\dim\left(\Phi_n\left(\mathbb{R}_{n+2}[X]\right)\right) = \dim\left(X^2\mathbb{R}_n[X]\right) = n+1 = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right)$, donc :

$$\Phi_n\left(\mathbb{R}_{n+2}[X]\right) = \mathbb{R}_n[X].$$

Finalement, Φ induit un isomorphisme de $X^2\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Tout polynôme de degré n admet un unique antécédent par Φ dans $X^2\mathbb{R}_n[X]$, donc tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ admet au moins un antécédent par Φ dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\Phi \text{ est surjective.}$$

Exercice 1.9

$u_{|G}$ est une application linéaire de G dans F. D'après le théorème du rang :

$$\dim G = \dim\left(\operatorname{Ker} u_{|G}\right) + \operatorname{rg}\left(u_{|G}\right).$$

Or : $\left\{\begin{array}{rcl} \operatorname{Im}\left(u_{|G}\right) & = & u(G) \\ \operatorname{Ker}\left(u_{|G}\right) & = & G \cap \operatorname{Ker} u \end{array}\right.$, d'où :

$$\dim\left(u(G)\right) = \dim G - \dim\left(G \cap \operatorname{Ker}\, u\right).$$

Exercice 1.10

▷ Appliquons le théorème du rang à $v_{|\operatorname{Im} u}$:

$$\dim\left(\operatorname{Im} u\right) = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(v_{|\operatorname{Im} u}\right) + \operatorname{rg}\left(v_{|\operatorname{Im} u}\right)\right).$$

Il est facile de se rendre compte que : $\operatorname{Im}\left(v_{|\operatorname{Im} u}\right) = \operatorname{Im}(v \circ u)$, donc :

$$\operatorname{rg}\left(v_{|\operatorname{Im} u}\right) = \operatorname{rg}(v \circ u).$$

C'est une conséquence du théorème du rang appliqué à $v_{|\operatorname{Im} u}$.

De plus, $\dim\left(v(\operatorname{Im} u)\right) \leqslant \dim \operatorname{Im} u$, donc

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u) = \operatorname{rg} u.$$

▷ D'autre part, $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$, donc : $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$.

$$\text{On a bien : } \operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min\left(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)\right).$$

$\triangleright$ Appliquons le théorème du rang à v : $\dim \operatorname{Ker} v = n - \operatorname{rg} v$.
Toujours d'après l'application du théorème du rang à $v_{|\operatorname{Im} u}$:

$$\dim \operatorname{Im} (v_{|\operatorname{Im} u}) = \operatorname{rg} u - \dim \operatorname{Ker} (v_{|\operatorname{Im} u}).$$

Or : $\operatorname{Ker} (v_{|\operatorname{Im} u}) \subset \operatorname{Ker} v$, d'où : $\dim \operatorname{Ker} (v_{|\operatorname{Im} u}) \leqslant \dim \operatorname{Ker} v$.
De plus : $\operatorname{rg} (v \circ u) = \dim \operatorname{Im} (v \circ u) = \dim \operatorname{Im} (v_{|\operatorname{Im} u})$, d'où :

$$\operatorname{rg} (v \circ u) \geqslant \operatorname{rg} u - \dim \operatorname{Ker} v = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - n.$$

Exercice 1.11

$$\begin{array}{rcccl} \dim E & = & \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f & = & \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \\ \dim E & = & \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} g & = & \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g \end{array}, \text{ donc :}$$

D'après le théorème du rang.

$2 \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

De plus, d'après les hypothèses : $\left\{ \begin{array}{rcl} \dim E & \leqslant & \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g \\ \dim E & \leqslant & \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g \end{array} \right.$.

La dimension d'une somme est inférieure à la somme des dimensions.

Si l'une de ces inégalités était stricte, on obtiendrait :

$$2 \dim E < \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

et une contradiction, donc ce sont en fait des égalités :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dim E & = & \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g \\ \dim E & = & \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g \end{array} \right. \quad \text{et}$$

les sommes : $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ sont directes.

Exercice 1.12

- Si w est un isomorphisme, alors $\operatorname{Im} w = G$ et $\operatorname{Ker} w = \{0_E\}$. Or :

$\triangleright$ $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} (v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$. $\operatorname{Im} v$ étant un sous-espace vectoriel de G, l'inclusion réciproque est triviale et : $\operatorname{Im} v = G$, donc v est surjectif.

$\triangleright$ $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Ker} (v \circ u) \supset \operatorname{Ker} u$. On a nécessairement $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} u$, donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ et u est injective.

$\triangleright$ $y \in \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u \iff \left\{ \begin{array}{c} v(y) = 0_G \\ \exists\, x \in E / y = u(x) \end{array} \right.$. On a donc :

$w(x) = v\left(u(x)\right) = 0_G$, donc $x = 0_E$, puis $y = u(x) = 0_F$.

$$\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u = \{0_F\}.$$

$\triangleright$ w étant un isomorphisme de E dans G, pour tout y de F, il existe un unique x de E tel que : $w(x) = v(y)$.

On peut écrire : $y = u(x) + (y - u(x))$, avec $\left\{ \begin{array}{c} u(x) \in \operatorname{Im} u \\ y - u(x) \in \operatorname{Ker} v \end{array} \right.$, puisque $v\left(y - u(x)\right) = v(y) - (v \circ u)(x) = 0_G$.

$$F = \operatorname{Ker} v + \operatorname{Im} u.$$

Si w est un isomorphisme de E dans G, alors u est injective, v surjective et $F = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$.

- Réciproquement, supposons u injective, v surjective et $F = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} w & \iff v \circ u(x) = 0_G \\ & \implies u(x) \in \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u \\ & \implies u(x) = 0_F \\ & \implies x \in \operatorname{Ker} u = \{0_E\} \\ & \implies x = 0_E \end{aligned}$$

Donc : w est injective.

$\forall\, z \in G$, $\exists\, y \in F$ tel que $v(y) = z$. Or, $F = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$, donc :

v est surjective.

$$\exists\, (y_1, y_2) \in \operatorname{Ker} v \times \operatorname{Im} u \text{ tel que } y = y_1 + y_2,$$

d'où : $z = v(y_1) + v(y_2) = v(y_2)$.

Comme $y_2 \in \operatorname{Im} u$, $\exists\, x \in E$ tel que $y_2 = u(x)$, d'où : $z = v \circ u(x)$

$w = v \circ u$ est surjective.

Si u est injective, v surjective et $F = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$, alors w est un isomorphisme de E dans G et on a bien l'équivalence attendue.

Exercice 1.13

Ce résultat a déjà été montré, dans un cadre plus général, dans un exemple illustrant la **méthode 1.4** : les réels 0, 1 et 2 étant deux à deux distincts, la somme des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ est directe.

Il reste à montrer que tout vecteur de E est somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} u$, d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.

On va procéder par analyse-synthèse.

Soit $x \in E$, supposons : $\exists\,(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \times \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ tel que : $x = x_1 + x_2 + x_3$, alors $u(x) = x_2 + 2x_3$ et $u^2(x) = x_2 + 4x_3$, d'où :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & x \\ x_2 + 2x_3 & = & u(x) \\ x_2 + 4x_3 & = & u^2(x) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{2}\left(u^2(x) - 3\,u(x) + 2x\right) \\ x_2 & = & -\left(u^2(x) - 2u(x)\right) \\ x_3 & = & \frac{1}{2}\left(u^2(x) - u(x)\right) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{2}\left(u^2(x) - 3\,u(x) + 2x\right) \\ x_2 & = & -\left(u^2(x) - 2u(x)\right) \\ x_3 & = & \frac{1}{2}\left(u^2(x) - u(x)\right) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{2}\left((u - \mathrm{Id}_E) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E)\right)(x) \\ x_2 & = & -\left(u \circ (u - 2\mathrm{Id}_E)\right)(x) \\ x_3 & = & \frac{1}{2}\left(u \circ (u - \mathrm{Id}_E)\right)(x) \end{array}\right.$$

$\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de E.

Réciproquement, l'hypothèse : $u^3 - 3u^2 + 2u = \tilde{0}$ peut s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (u - \mathrm{Id}_E) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E) \circ u & = & \tilde{0} \\ & \text{ou} & \\ (u - 2\mathrm{Id}_E) \circ u \circ (u - \mathrm{Id}_E) & = & \tilde{0} \\ & \text{ou} & \\ u \circ (u - \mathrm{Id}_E) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E) & = & \tilde{0} \end{array}\right. \text{, donc :}$$

$$\forall\, x \in E, \left\{\begin{array}{rcl} -\left((u - 2\mathrm{Id}_E) \circ u\right)(x) & \in & \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \\ \frac{1}{2}\left(u \circ (u - \mathrm{Id}_E)\right)(x) & \in & \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \\ \frac{1}{2}\left((u - \mathrm{Id}_E) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E)\right)(x) & \in & \operatorname{Ker} u \end{array}\right.$$

$$x = -\left((u - 2\mathrm{Id}_E) \circ u\right)(x) + \frac{1}{2}\left(u \circ (u - \mathrm{Id}_E)\right)(x) + \frac{1}{2}\left((u - \mathrm{Id}_E) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E)\right)(x)$$

donc : $x \in \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) + \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$. Finalement :

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E).$$

Exercice 1.14

▷ Supposons vraie la proposition (1) :

✎ Pour justifier une équivalence, on procède souvent par double implication.

soit $(x_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]} \in E_1 \times \cdots \times E_{n-1}$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 0_E$, en complétant ce $(n-1)$-uplet par 0_E, on obtient un n-uplet de $E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \times E_n$ de somme nulle. Les $E_1, E_2, \cdots, E_n$ étant en somme directe, chacun des vecteurs de ce n-uplet est nul : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $x_i = 0_E$ et les $E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$ sont en somme directe.

D'autre part, si $x \in (E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}) \cap E_n$, alors :

$$\exists (x_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]} \in E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \text{ d'où :}$$

$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+(-x) = 0_E$, avec $(x_1, \cdots, x_{n-1}, -x) \in E_1\times\cdots\times E_{n-1}\times E_n$, puis : $x_1 = \cdots = x_{n-1} = -x = 0_E$ et $(E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}) \cap E_n = \{0_E\}$.

$$\text{On a bien : } (1) \Longrightarrow (2).$$

▷ Supposons vraie la proposition (2) :

soit $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E$, alors :

$$x_n = -x_1 - \cdots - x_{n-1} \in (E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}) \cap E_n$$
$$\text{donc } x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = 0_E.$$

Les $E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$ sont en somme directe, donc $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0_E$ et les $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont en somme directe.

$$\text{On a bien : } (2) \Longrightarrow (1) \text{ et finalement : } (1) \Longleftrightarrow (2).$$

Exercice 1.15

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

▷ $\tilde{0} \in H_i$ et $H_i \subset \mathscr{L}(E)$.

▷ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (f, g) \in H_i^2$, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g)$, donc : $G_i \subset \operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g)$ et $\lambda f + \mu g \in H_i$.

$$H_i \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E).$$

2. Soit $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in H_1 \times \cdots \times H_n$, tel que : $f_1 + \cdots + f_n = \tilde{0}$.

✎ On va montrer que chaque f_j s'annule sur tous les vecteurs d'une base de E. Ainsi, il sera l'endomorphisme nul.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $f_j \in H_j$, donc : $G_j \subset \operatorname{Ker} f_j$, d'où :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\},\ f_j(e_i) = 0_E.$$

$f_1 + \cdots + f_n = \tilde{0}$ implique : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $(f_1 + \cdots + f_n)(e_j) = f_j(e_j) = 0_E$, donc : $f_j(e_j) = 0_E$.

f_j s'annule sur tous les vecteurs d'une base de E : c'est donc l'endomorphisme nul.

$$f_1 + \cdots + f_n = \tilde{0} \Longrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ f_j = \tilde{0},$$
$$\text{donc la somme des } H_i \text{ est directe.}$$

Exercice 1.16

1. Si $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, alors ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, donc : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Or, les vecteurs engendrant F ne sont pas colinéaires, donc : $\dim F = 2$. De même, $\dim G = 2$, d'où : $\dim(F + G) = 4$.

C'est contradictoire avec « $\dim(F + G) \leqslant 3$, car $F + G$ sous-espace vectoriel de R^3 ». On a donc bien :

$$F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

2. $(x,y,z) \in F \cap G$ si, et seulement si,
$\begin{cases} \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x,y,z) = \lambda(1,1,0) + \mu(2,0,-1) \\ \exists(\lambda',\mu') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x,y,z) = \lambda'(1,-1,0) + \mu'(1,0,-2) \end{cases}$, donc :

$\exists(\lambda,\mu,\lambda',\mu') \in \mathbb{R}^4$ tel que $\begin{cases} x &= \lambda + 2\mu &= \lambda' + \mu' \\ y &= \lambda &= -\lambda' \\ z &= -\mu &= -2\mu' \end{cases}$.

D'où : $x = y - 2z = -y - \dfrac{z}{2}$, puis $\begin{cases} x = -\dfrac{5z}{4} \\ y = \dfrac{3z}{4} \end{cases}$.

$$\text{Donc : } F \cap G = \mathsf{Vect}\,(-5,3,4).$$

3. $\triangleright$ Puisque F est de dimension 2, toute droite vectorielle incluse dans F et non confondue avec $F \cap G$ est un supplémentaire F' dans F de $F \cap G$. (On a bien $F' \cap (F \cap G) = \{0_E\}$ et $\dim F = \dim F' + \dim(F \cap G)$.)

On peut choisir, par exemple, $F' = \mathsf{Vect}\,(1,1,0)$ ou $\mathsf{Vect}\,(2,0,-1)$.

$\triangleright$ De même, on peut choisir, par exemple :
$$G' = \mathsf{Vect}\,(1,-1,0) \text{ ou } \mathsf{Vect}\,(1,0,-2).$$

Exercice 1.17

1. $\triangleright$ $(f - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) = \tilde{0} \iff f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{Id}_E = \tilde{0}$.

$\triangleright$ $p \circ p = \dfrac{1}{(b-a)^2}\left(f^2 - 2af + a^2\mathrm{Id}_E\right)$
$= \dfrac{1}{(b-a)^2}\left((b-a)f - a(b-a)\mathrm{Id}_E\right) = p.$

p est donc un projecteur. Par le même calcul, q est un projecteur.

2. $\triangleright$ $p + q = \dfrac{f - a\,\mathrm{Id}_E}{b-a} + \dfrac{f - b\,\mathrm{Id}_E}{a-b} = \mathrm{Id}_E$.

$\triangleright$ $p \circ q = \dfrac{1}{(b-a)^2}\left(-f^2 + (a+b)\,f - ab\,\mathrm{Id}_E\right) = \tilde{0}$. De même : $q \circ p = \tilde{0}$.

$\triangleright$ $b\,p + a\,q = \dfrac{b}{b-a}(f - a\,\mathrm{Id}_E) - \dfrac{a}{b-a}(f - b\,\mathrm{Id}_E) = f$.

p et q commutent : il est possible d'utiliser la formule du binôme de Newton.

$\triangleright$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = (bp + aq)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} p^k \circ q^{n-k}$
$= a^n q + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} p \circ q + b^n p$
$= a^n q + b^n p.$

Exercice 1.18

1. $(p \circ q)^2 = (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q$
$= (p \circ p) \circ (q \circ q) = p \circ q$: $p \circ q$ est un projecteur.

On procède par double inclusion.

2. $\triangleright$ Si $y \in \mathrm{Im}\,(p \circ q) = \mathrm{Im}\,(q \circ p)$, alors :
$\begin{cases} \exists x_1 \in E,\ y = p \circ q(x_1) = p\,(q(x_1)) \implies y \in \mathrm{Im}\,p \\ \exists x_2 \in E,\ y = q \circ p(x_2) = q\,(p(x_2)) \implies y \in \mathrm{Im}\,q \end{cases}$,
donc : $y \in \mathrm{Im}\,p \cap \mathrm{Im}\,q$ et $\mathrm{Im}\,(p \circ q) \subset \mathrm{Im}\,p \cap \mathrm{Im}\,q$.

$\triangleright$ Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}\,p \cap \mathrm{Im}\,q$, alors : $y = p(y)$ et $y = q(y)$, donc : $y = p \circ q(y)$ et $y \in \mathrm{Im}\,(p \circ q)$.

Finalement : $\mathrm{Im}\,p \cap \mathrm{Im}\,q \subset \mathrm{Im}\,(p \circ q)$ et $\mathrm{Im}\,(p \circ q) = \mathrm{Im}\,p \cap \mathrm{Im}\,q$.

3. $\triangleright$ p étant un projecteur, on a : $E = \mathrm{Ker}\,p \oplus \mathrm{Im}\,p$, donc tout vecteur x de E s'écrit, de manière unique : $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\,p \times \mathrm{Im}\,p$.

Si $x = x_1 + x_2 \in \operatorname{Ker}(p \circ q)$, alors :
$0_E = p \circ q(x) = q \circ p(x) = q \circ p(x_1) + q \circ p(x_2) = q(x_2)$, donc : $x_2 \in \operatorname{Ker} q$ et $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$: $\operatorname{Ker}(p \circ q) \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

$\triangleright$ Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$, il existe $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Ker} q$ tel que : $x = x_1 + x_2$. Or, $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q \circ p$ et $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p \circ q = \operatorname{Ker} q \circ p$, donc $(x_1, x_2) \in \left(\operatorname{Ker} p \circ q\right)^2$ et $(p \circ q)(x) = (p \circ q)(x_1) + (p \circ q)(x_2) = 0_E$.

Finalement : $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p \circ q$ et $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p \circ q$.

Exercice 1.19

L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$, où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n,$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
$\forall\, (u, u') \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$, $\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (\varphi\,(\lambda\, u + \mu\, u'))_n &= (\lambda\, u + \mu\, u')_{n+2} - 3\,(\lambda\, u + \mu\, u')_{n+1} + 2\,(\lambda\, u + \mu\, u')_n \\ &= \lambda\, u_{n+2} + \mu\, u'_{n+2} - 3\lambda\, u_{n+1} - 3\mu\, u'_{n+1} + 2\lambda\, u_n + 2\mu\, u'_n \\ &= \lambda\, \varphi(u) + \mu\, \varphi(u') \end{aligned}$$

Le problème « Trouver toutes les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 5$ » s'écrit alors : $\varphi(u) = 5$ et il s'agit donc bien d'une équation linéaire.

5 désigne ici la suite constante et égale à 5.

On commence par résoudre l'équation homogène associée : $\varphi(u) = 0$, autrement dit "Trouver toutes les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0".$$

Cette question a déjà été étudiée en première année. L'équation caractéristique associée, $r^2 - 3r + 2 = 0$, a pour solutions 1 et 2, donc :
$\operatorname{Ker} \varphi = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ telle que : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda + \mu\, 2^n,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
Il suffit, ensuite, de trouver une solution particulière du problème. Cherchons parmi les suites simples suivantes : suites constantes, suites $(k\, n)_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{R}$ ou suites $(k\, n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{R}$.
Aucune suite constante n'est solution, mais la suite $(-5n)_{n \in \mathbb{N}}$ marche.
L'ensemble des suites cherchées est :

$$\left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ telle que : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = -5n + \lambda + \mu\, 2^n,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 1.20

1. Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} a_k X^k$, le monôme de plus haut degré de $P(X+1)$ est $a_{p+1} X^{p+1}$, donc $P(X + 1) - P(X)$ est un polynôme de degré au plus p : Δ est bien une application de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ vers $\mathbb{R}_{p+1}[X]$. Plus précisément, si $k \geqslant 1$, le monôme de plus haut degré de $a_k(X+1)^k - a_k X^k$ est $k a_k X^{k-1}$, donc $\Delta(P)$ est exactement de degré p.
De plus, $\forall\, (P,\, Q) \in \mathbb{R}_{p+1}[X]^2$, $\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda[P(X+1) - P(X)] + \mu[Q(X+1) - Q(X)] \\ &= \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q) \end{aligned}$$

$$\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_{p+1}[X].$$

2. $P \in \operatorname{Ker}\Delta \iff \Delta(P) = 0 \iff \deg P = 0$, car, d'après ce qui précède, si $\deg P > 0$, alors $\deg \Delta(P) \geqslant 0$, donc $\Delta(P) \neq 0$.

$$\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X].$$

3. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}\Delta + \operatorname{rg}\Delta = \dim \mathbb{R}_{p+1}[X]$. Comme $\dim \operatorname{Ker}\Delta = 1$, alors $\operatorname{Im}\Delta$ a pour dimension $p+1$.
De plus, d'après ce qui précède, $\operatorname{Im}\Delta \subset \mathbb{R}_p[X]$. Comme $\dim \mathbb{R}_p[X] = p+1$, on a donc :

$$\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_p[X].$$

4. $\dfrac{X^p}{p!}$ est un polynôme de degré p, donc de Im Δ. Il admet au moins un antécédent Q_0 dans $\mathbb{R}_{p+1}[X]$. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $\Delta(Q) = \dfrac{X^p}{p!}$ est donc $Q_0 + \mathbb{R}_0[X]$.

Si $Q_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} a_k X^k$, toute solution de $\Delta(Q) = \dfrac{X^p}{p!}$ est de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} a_k X^k + \lambda$.

$\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0 \iff \left[\sum_{k=0}^{p+1} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} + \lambda t\right]_0^1 = 0 \iff \lambda = -\sum_{k=0}^{p+1} \frac{a_k}{k+1}$, d'où l'unicité recherchée.

Exercice 1.21

L_1 L_2, L_{12} et L_{13} sont les polynômes interpolateurs de Lagrange en $(1, 2, 12, 13)$.

$$\begin{aligned} P &= L_1(X) + 4L_2(X) + L_{12}(X) + 4L_{13}(X) \\ &= -\frac{1}{132}(X-2)(X-12)(X-13) + \frac{4}{110}(X-1)(X-12)(X-13) \\ &\quad -\frac{1}{110}(X-1)(X-2)(X-13) + \frac{4}{132}(X-1)(X-2)(X-12) \\ &= \frac{1}{20}X^3 - \frac{21}{20}X^2 + \frac{29}{5}X - \frac{19}{5}. \end{aligned}$$

Exercice 1.22

L'application φ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x,y,z,t) = x - y + z - t$ est une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^4$. F est son noyau : c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ (aussi reconnaissable à son équation).

F est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$.

Les trois vecteurs $u = (1,0,0,1)$, $v = (0,-1,0,1)$ et $w = (0,0,1,1)$ sont trois vecteurs de F formant clairement une famille libre : c'est une base de F.
G est l'intersection des hyperplans de $\mathbb{R}^4$ d'équations respectives $x + y = 0$ et $z + t = 0$:

G est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} G &= \{(x,-x,z,-z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,-1,0,0) + z(0,0,1,-1),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \operatorname{Vect}\left((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\right). \end{aligned}$$

Ces deux vecteurs non colinéaires forment une famille génératrice de G, donc une base de G.

Exercice 1.23

▷ $x + 5y + 18z = 0$ est une équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, donc

(E_1) définit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\triangleright$ $x = 2y = 3z \iff \begin{cases} x - 2y &= 0 \\ x - 3z &= 0 \end{cases}$. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par (E_2) est l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^3$, donc

(E_2) définit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\triangleright$ $(-1,0,0)$ satisfait à (E_3), $(0,-1,0)$ satisfait à (E_3), mais $(-1,-1,0)$ ne satisfait pas à (E_3). N'étant pas stable par addition,

le sous-ensemble défini par (E_3) n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\triangleright$ $\quad (x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = x^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2$
$\iff x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 2z + 1$
$\iff 6x - 4y - 2z = 0$

(E_4) définit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui est un hyperplan.

$\triangleright$ $|x+y| = |x-y| \iff x + y = x - y$ ou $x + y = -(x-y)$
$\iff y = 0$ ou $x = 0$.

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation (E_5) n'est pas stable par addition. En effet : $(1,0,0) \in E_5$, $(0,1,1) \in \mathbb{E}_5$ et $(1,0,0) + (0,1,1) = (1,1,1) \notin E_5$.

Le sous-ensemble défini par (E_5) n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\triangleright$ $x^3 = y^3 = z^3 \iff x = y = z$ définit bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (voir deuxième exemple).

Exercice 1.24

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, x_0 un vecteur non nul de E et u une forme linéaire non nulle. On définit l'application f en posant $f(x) = u(x)x_0$.

1. $\forall\, x \in E,\ f(x) = u(x)x_0 \in E$.

$\forall\,(x,x') \in E^2,\ \forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,$
$f(\lambda x + \mu x') = u(\lambda x + \mu x')x_0 = (\lambda\, u(x) + \mu\, u(x'))\, x_0 = \lambda\, f(x) + \mu\, f(x')$.

f est un endomorphisme de E.

2. $\operatorname{Im} f \subset \mathsf{Vect}\,(x_0)$ et f n'est pas nulle, donc : $\operatorname{Im} f = \mathsf{Vect}\,(x_0)$ et $\operatorname{rg}(f) = 1$.

3. f est un projecteur $\iff f \circ f = f$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall\, x \in E,\ f\left(u(x)x_0\right) = u(x)x_0 \\
&\iff \forall\, x \in E,\ u\left(u(x)x_0\right) x_0 = u(x)x_0 \\
&\iff \forall\, x \in E,\ u(x)u(x_0)x_0 = u(x)x_0 \\
&\iff \forall\, x \in E,\ \left(u(x_0) - 1\right) u(x)x_0 = 0_E \\
&\iff \forall\, x \in E,\ \left(u(x_0) - 1\right) u(x) = 0 \\
&\iff u(x_0) = 1 \qquad (u \neq \tilde{0} \Longrightarrow \exists\, x \,/\, u(x) \neq 0.)
\end{aligned}$$

4. $\forall\, x \in E,\ f^2(x) = u(x)u(x_0)x_0,\ f^3(x) = u(x)\left(u(x_0)\right)^2 x_0$. On peut conjecturer que, pour tout entier naturel $k > 0$ et pour tout x de E,

$$f^k(x) = u(x)\left(u(x_0)\right)^{k-1} x_0.$$

On va démontrer cette conjecture par récurrence.

$\triangleright$ Cette formule est vraie pour $k = 1$.

$\triangleright$ Supposons-la vraie pour un entier naturel non nul k, alors :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in E,\ f^{k+1}(x) &= f\left(u(x)\left(u(x_0)\right)^{k-1} x_0\right) \\
&= u(x)\left(u(x_0)\right)^{k-1} f(x_0) = u(x)\left(u(x_0)\right)^{k-1} u(x_0)x_0 \\
&= u(x)\left(u(x_0)\right)^{k} x_0.
\end{aligned}$$

$\triangleright$ La conjecture est exacte d'après le principe de récurrence.

Corrigé

Exercice 1.25

L'application $\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1([0,1]) & \to & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{C}^1([0,1])$. H est son noyau, donc un hyperplan de $\mathscr{C}^1([0,1])$.
L'application $k \ : \ t \longmapsto 1$ appartient à $\mathscr{C}^1([0,1])$ et n'appartient pas à H, puisque : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1 \neq 0$.

$\mathsf{Vect}\,(k)$ est un supplémentaire de H dans $\mathscr{C}^1([0,1])$.

Exercice 1.26

1. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$, un polynôme de degré n.
Le monôme de degré n de $\varphi(P)$ est :
$$a_n \left(\frac{X}{2}\right)^n + a_n(-1)^n \left(\frac{X}{2}\right)^n - 2a_n X^n = a_n \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{2^n} - 2\right) X^n.$$
Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{2^n} - 2 \neq 0$, car, alors : $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{2^n} \leqslant 1$. Si $n \geqslant 1$, $\deg(\varphi(P)) = \deg P$ et $P \notin \operatorname{Ker}\varphi$.
En revanche : $\forall\, P \in \mathbb{R}_0[X]$, $\varphi(P) = 0$, donc : $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_0[X]$.
2. $\triangleright$ C'est une famille de polynômes à degrés échelonnés, donc une famille libre.

$\triangleright$ D'autre part, si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré d, alors P s'écrit comme combinaison linéaire des $(Q_n)_{0\leqslant n\leqslant d}$. En effet, $(Q_n)_{0\leqslant n\leqslant d}$ est une famille libre de cardinal $d+1$ de $\mathbb{K}_d[X]$, qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $d+1$, donc cette famille est une base de ce $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$ et une base de $\mathbb{K}[X]$.

$\triangleright$ $\operatorname{Im}\varphi = \mathsf{Vect}\,((\varphi(X^n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathsf{Vect}\,((Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$. $\big(Q_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une base de $\mathbb{K}[X]$, on a : $\mathbb{K}[X] = \mathsf{Vect}\,(Q_0) \oplus \operatorname{Im}\varphi$, donc $\operatorname{Im}\varphi$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.
3. θ est une forme linéaire non nulle sur E, donc son image est $\mathbb{R}$, que l'on peut assimiler à $\mathbb{R}_0[X]$: $\operatorname{Im}\theta = \operatorname{Ker}\varphi$.

Exercice 1.27

On met en œuvre un raisonnement par l'absurde.

1. $\triangleright$ Si x et $f(x)$ étaient colinéaires, alors il existerait un réel λ tel que :
$$f(x) = \lambda x.$$
D'où : $f^2(x) = \lambda^2 x = -x \iff (\lambda^2+1)x = 0_E$.
Comme $x \neq 0_E$, $\lambda^2 = -1$, ce qui constitue une contradiction, puisque λ est réel.

$\triangleright$ Soit v un vecteur non nul et $\mathbb{R}v = \mathsf{Vect}\,(v)$. Comme v et $f(v)$ ne sont pas colinéaires, $f(v) \notin \mathbb{R}v$ et $\mathbb{R}v$ n'est pas stable par f.

Aucune droite de E n'est stable par f.

2. Soit $v \in \mathsf{Vect}\,\big(x, f(x)\big)$, $v = \lambda x + \mu f(x)$, avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
$f(v) = \lambda f(x) + \mu f^2(x) = -\mu x + \lambda f(x) \in \mathsf{Vect}\,\big(x, f(x)\big)$.

$\mathsf{Vect}\,\big(x, f(x)\big)$ est stable par f.

Exercice 1.28

1. $\forall\, x \in E$, $\exists!(x_V, x_W) \in V \times W$ tel que $x = x_V + x_W$.
$q(x) = \big(\mathrm{Id}_E - p\big)(x) = x - p(x) = x - x_V = x_W$:

q est la projection sur W parallèlement à V.

(p et q sont les projecteurs associés à la décomposition $E = V \oplus W$.)

2. $\triangleright$ Si $A = A\cap V + A\cap W$, alors tout vecteur x de A est la somme d'un vecteur de $A\cap V$ et d'un vecteur de $A\cap W$, donc d'un vecteur de V et d'un vecteur de W. Cette décomposition étant unique : $x = p(x) + q(x)$, avec $p(x) \in A\cap V$ et $q(x) \in A\cap W$.

On procède par double implication pour justifier l'équivalence demandée.

$(a\,p + b\,q)(x) = a\,p(x) + b\,q(x) \in A\cap V + A\cap W$, car $a\,p(x)$ et $b\,q(x)$ appartiennent respectivement aux sous-espaces vectoriels $A\cap V$ et $A\cap W$;

$$A = A\cap V + A\cap W \text{ est stable par } f.$$

$\triangleright$ Réciproquement, si le sous-espace vectoriel A est stable par f, alors :

$$\forall\, x \in A,\ f(x) = a\,p(x) + b\,q(x) \in A.$$

Comme $E = V \oplus W$, $x = x_V + x_W = p(x) + q(x)$, donc :
$f(x) - ax = (b-a)\,q(x) \in A$ et $f(x) - bx = (a-b)\,p(x) \in A$. Puisque $a \neq b$, $p(x)$ et $q(x)$ appartiennent à A.
$x = p(x) + q(x)$, avec $p(x) \in A\cap V$ et $q(x) \in A\cap W$: $A \subset A\cap V + A\cap W$.

$A\cap V + A\cap W$ est un sous-espace vectoriel de A, donc l'inclusion réciproque est claire et $A = A\cap V + A\cap W$.

A est stable par $f = ap + bq$, avec $a \neq b$, si, et seulement si, $A = A\cap V + A\cap W$.

3. La symétrie par rapport à V parallèlement à W est $s = p - q$. Elle est de la forme précédente avec $a = 1$ et $b = -1$.

Un sous-espace vectoriel A est stable par la symétrie d'axe V parallèlement à W si, et seulement si, $A = A\cap V + A\cap W$.

Exercice 1.29

1.
$$(\mathrm{Id}_E - 3f)^2 = \mathrm{Id}_E - 6f + 9f^2$$
$$(f+g)^2 = f^2 + f\circ g + g\circ f + g^2$$
$$(f-g)\circ(f+g) = f^2 + f\circ g - g\circ f - g^2$$

2.
$$(f-g)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}\circ g^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f^k \circ g^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} f^k\circ g^{n-k}$$
$$= f^n - g^n$$

f et g commutent : on peut utiliser la formule du binôme de Newton.

3. $f^2 - 5f + 6Id_E = (f - 2\mathrm{Id}_E)\circ(f - 3\mathrm{Id}_E) = (f - 3\mathrm{Id}_E)\circ(f - 2\mathrm{Id}_E)$.

Id_E commute avec tout endomorphisme.

4. Si $f^5 = \tilde{0}$, $\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E^5 + f^5$
$$= (\mathrm{Id}_E + f)\circ\left(\mathrm{Id}_E - f + f^2 - f^3 + f^4\right)$$
$$= \left(\mathrm{Id}_E - f + f^2 - f^3 + f^4\right)\circ(\mathrm{Id}_E + f)\,.$$

$\mathrm{Id}_E + f$ admet un endomorphisme inverse, $\mathrm{Id}_E - f + f^2 - f^3 + f^4$: c'est donc un automorphisme.

Exercice 1.30

1. P est un polynôme, donc, $\left|\dfrac{P(k)}{k!}\right| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, ce qui justifie la convergence absolue, donc, la convergence, de la série étudiée. L'application S va clairement de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ et est linéaire par définition des opérations sur les polynômes.

2. On peut proposer `Factorielle`(n) (la version itérative) ou `factorielle`(n) (la version récursive) :

Corrigé

```
def Factorielle(n:int)->int:
    if n == 0:
        return 1
    else:
        F = 1
        for k in range(2,n+1):
            F = F * k
        return F
```

```
def factorielle(n:int)->int:
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*factorielle(n-1)
```

3. La fonction suivante fait l'affaire :

```
def Approx(P:list,N:int)->float:
    S=0
    for k in range(0,N+1):
        S=S+P(k)/Factorielle(k)
    return S
```

4. a. La famille proposée est échelonnée en degrés, donc, libre. Par ailleurs, elle est de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, donc, il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. On trouve $S(H_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$S(H_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-(n-1))}{k!} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-n)!} \underset{p=k-n}{=} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} = e$$

5. a. On commence par exécuter les lignes de code suivantes :

```
L=[1]
for k in range(11):
    P=Polynomial(L)
    print(Approx(P,100))
    L=[0]+L
```

ce qui nous permet de remplir le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6
Approx(X**k,100)	2,71	2,71	5,43	13,59	40,77	141,35	551,81

Il semblerait que les valeurs obtenues soient des multiples de $e \approx 2,71$.

b. On trouve $S(X^0) = S(H_0) = e$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S(X^{p+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^{p+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{p+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^p}{(k-1)!} \underset{i=k-1}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(i+1)^p}{i!}$$

La formule du binôme de Newton permet alors d'obtenir :

$$S(X^{p+1}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} i^j = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^j}{i!} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} S(X^j)$$

On démontre alors facilement par récurrence que tous les termes $S(X^p)$ sont des multiples entiers de e.

Corrigé