

1^{re}

Nicolas Nguyen
Emmanuel Schneider
Stéphane Daniel

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

3^e édition

SPÉCIALITÉ

MATHS

- Résumé de cours
- Démonstrations
- Approfondissements, algorithmes
- Méthodes
- Vrai/Faux
- Exercices avec indications
- QCM et automatismes
- Corrigés détaillés et commentés

**NOUVEAU
PROGRAMME**

INCLUS
**PRÉPARATION
À L'ÉPREUVE ANTICIPÉE
DU BAC**



SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Première

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Première

3^e édition

**NOUVEAU
PROGRAMME**

**INCLUS
PRÉPARATION
À L'ÉPREUVE ANTICIPÉE
DU BAC**

ouvrage coordonné par

Nicolas NGUYEN

*Professeur de mathématiques
au lycée François Rabelais (Saint-Brieuc)*

Stéphane DANIEL

*Professeur de mathématiques
au lycée Arnaut Daniel (Ribérac)*

Emmanuel SCHNEIDER

*Professeur de mathématiques
au lycée Stanislas (Villers-lès-Nancy)*



COLLECTION PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



*Les notices culturelles « Un mathématicien » et « Le saviez-vous ? »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.*

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en LaTeX.

ISBN 9782340-116306

Dépôt légal : juillet 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant propos

Réussir les maths en Première

Réussir les maths en Première ? Pourquoi pas ? Votre choix de la spécialité maths en Première vous conduira sans doute vers une formation à dominante scientifique. Même si le baccalauréat vous semble encore loin, sachez que les bases de la réussite en mathématiques se construisent dès cette année. En un mot, il est déjà temps de vous préparer à une poursuite d'études supérieures dans des filières exigeantes. Écrit par des enseignants du secondaire et coordonné par un professeur de Prépa scientifique, cet ouvrage répond à cet objectif. Aussi, sera-t-il particulièrement utile à ceux qui souhaitent acquérir un très bon niveau en maths dans l'optique d'une **poursuite d'études supérieures** dans une formation ayant une composante **mathématique** importante : classes préparatoires scientifiques ou économiques bien sûr mais aussi khâgnes BL, études de médecine ou licences scientifiques à l'université.

Tout en suivant strictement le programme de la spécialité maths de Première, ce livre l'appréhende différemment car il insiste sur les points délicats, il présente des approches plus théoriques mais surtout, il facilite la compréhension des méthodes de raisonnement et de résolution qui sont la clé de la réussite dans les études supérieures scientifiques. Il permet ainsi l'acquisition de connaissances solides en mathématiques.

La structure de chaque chapitre est identique :

- **Le résumé de cours** vous remet en mémoire tous les résultats à savoir. Il vous permet d'accéder à une connaissance synthétique du cours. Sa relecture est indispensable avant un devoir en classe et a fortiori avant l'examen.
- **La partie « méthodes »** vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.
- **La partie « vrai/faux »** vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révèle les mauvais réflexes à corriger et vous met en garde contre les erreurs classiques.

- **Les exercices** sont incontournables pour assimiler le programme et pour acquérir un niveau très satisfaisant. Souvent tirés d'Annales du Bac, ils vous entraînent à l'épreuve de fin d'année. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettent d'avancer selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.
- Afin d'entraîner les élèves à l'épreuve anticipée du baccalauréat, un ou deux **exercices de type QCM** sont proposés dans chaque chapitre, au début de la section « exercices », et les méthodes classées « automatismes » sont identifiées par une icône « engrenage ».

Ainsi ce livre complète celui utilisé en cours. Il permet d'aborder avec aisance les interrogations, les devoirs surveillés et bien sûr d'assurer de bonnes bases qui seront si utiles plus tard. En outre, il procure **une compréhension approfondie** des mathématiques étudiées dans votre cursus et offre ainsi les meilleures conditions pour **réussir ensuite sa Terminale et, plus tard, son entrée dans les études supérieures.**

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

■ Algèbre

1.	Suites numériques	1
2.	Second degré	35

■ Analyse

3.	Dérivation	79
4.	Variations et courbes des fonctions.....	109
5.	Fonction exponentielle.....	139
6.	Trigonométrie	165

■ Géométrie

7.	Produit scalaire dans le plan.....	195
8.	Géométrie repérée.....	227

■ Probabilités et statistique

9.	Probabilités conditionnelles et indépendance.....	263
10.	Variables aléatoires réelles.....	295

■ Algorithmique et programmation

11.	Algorithmique et programmation.....	325
-----	-------------------------------------	-----

■ Annexe: logique

12.	Annexe	361
-----	--------------	-----

Index	367
-------------	-----

Algèbre

Chapitre 1

Suites numériques

Certaines équations, comme celles du second degré, se résolvent avec une formule. Il n'en est pas de même pour la majorité d'entre elles ; on est amené alors à définir des suites d'éléments qui tendent vers les solutions de l'équation étudiée, c'est-à-dire qui s'en approchent d'autant plus que l'on veut.

■ Un mathématicien

Léonard de Pise, plus connu sous le surnom de **Fibonacci**, vivait dans la première moitié du $xiii^e$ siècle. Après avoir voyagé en Afrique du Nord, il se persuade de la supériorité des chiffres arabes, c'est-à-dire ceux que nous utilisons de nos jours pour noter les nombres. Il explique comment effectuer des opérations élémentaires dans *Liber Abaci*, un ouvrage paru en 1202. Cependant, il reste célèbre pour avoir défini une suite de nombre (u_n) avec $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ en prenant l'exemple de couples de lapins qui, dès leur deuxième mois d'existence, donnent naissance à un nouveau couple chaque mois.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Le nombre π ne s'exprime pas sous forme de fraction et n'est la solution d'aucune équation polynomiale de quelque degré qu'elle soit : on dit qu'il est transcendant. Aussi pour calculer ses décimales on utilise des suites qui convergent vers π , c'est-à-dire dont les termes s'en rapprochent d'autant plus que l'on veut. Avant les ordinateurs, l'obtention d'un grand nombre de décimales nécessitait des calculs longs et fastidieux. De nos jours, on en connaît des millions que l'on calcule pour la gloire et non pour des besoins concrets.

■ les incontournables

- Calculer les termes d'une suite
 - ▶ lorsqu'elle est définie de manière explicite
 - ▶ lorsqu'elle est définie par récurrence
- Étudier le sens de variation d'une suite
- Démontrer qu'une suite est arithmétique
- Démontrer qu'une suite est géométrique
- Établir le terme général d'une suite
 - ▶ en reconnaissant une suite arithmétique
 - ▶ en reconnaissant une suite géométrique

■ et plus si affinités

- Calculer la somme de termes consécutifs
 - ▶ dans le cas d'une suite arithmétique
 - ▶ dans le cas d'une suite géométrique

■ ■ Résumé de cours

■ Généralités

Définition : Une **suite** u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ qui à tout entier naturel associe un réel $u(n)$, noté u_n . Cette suite se note u , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \geq 0}$ ou (u_n) .

Vocabulaire : u_n est appelé **le terme général** de la suite (u_n) ou le terme de rang n ou encore le terme d'indice n . u_0 est appelé **le terme initial** de la suite (u_n) .

Remarque : une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0 . On peut alors la noter $(u_n)_{n \geq n_0}$ et son terme initial est u_{n_0} .

Modes de génération

Définition : Lorsqu'une suite est donnée par son terme général u_n exprimé en fonction de n indépendamment des termes précédents, on dit que la suite est définie **sous forme explicite**.

Définition : Lorsqu'une suite est donnée par son premier terme et une relation exprimant chaque terme en fonction du terme précédent, on dit que la suite est définie par une **relation de récurrence**.

Sens de variation

Définition : Une suite (u_n) est **croissante** lorsque pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite u_n est **décroissante** lorsque pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$.

Une suite u_n est **constante** lorsque pour tout entier naturel n , $u_n = u_{n+1}$.

Vocabulaire : Une suite est dite **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante

Remarque : s'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, on ait $u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n \geq u_{n+1}$), on dit que la suite est croissante (respectivement décroissante) à partir du rang p .

■ Suites arithmétiques

Définition à l'aide d'une relation de récurrence

Définition : Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Vocabulaire : Le réel r est appelé la **raison de la suite**.

Expression du terme général

Théorème 1.1.— Une suite arithmétique est entièrement et uniquement déterminée par la donnée de sa raison r et de son premier terme u_0 . On a alors pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = u_0 + nr$$

Inversement, on a :

Proposition 1.2.— Soit a et b deux réels. Toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = an + b$ est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b

Somme des premiers termes

Théorème 1.3.— Pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ qui s'écrit aussi } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposition 1.4.— Soit n et p deux entiers tels que $n \leq p$. La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_p = \frac{u_n + u_p}{2} \times (p - n + 1)$$

Sens de variation

Proposition 1.5.— Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique de raison r .

- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

■ Suites géométriques

Définition à l'aide d'une relation de récurrence

Définition : Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait :

$$u_{n+1} = qu_n$$

Vocabulaire : Le réel q est appelé la **raison de la suite**.

Remarque : si $q = 0$ ou si $u_0 = 0$ alors pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 0$. On ne considère en général que des suites géométriques dont aucun terme n'est nul.

Expression du terme général

Théorème 1.6.— Une suite géométrique de premier terme non nul est entièrement et uniquement déterminée par la donnée de sa raison q et de son premier terme u_0 . On a alors pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = u_0 q^n$$

Proposition 1.7.— Toute suite de terme général $u_n = aq^n$ est géométrique de raison q et de premier terme a .

Somme des premiers termes

Théorème 1.8.— Soit q un réel quelconque et n un entier naturel :

- Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ qui s'écrit aussi $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- Si $q = 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = n + 1$

Proposition 1.9.— Si $q \neq 1$, la somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{p+n-1}$ de n termes d'une suite géométrique de raison q est égale à :

$$u_p \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Sens de variation

Proposition 1.10.— Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul.

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

■ Notion de limite infinie

Définition : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite. On dit que la suite tend vers $+\infty$ si, quel que soit le nombre A , tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang. On dit aussi que (u_n) a pour limite $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

■ ■ Démonstrations

Théorème 1.1.— Une suite arithmétique est entièrement et uniquement déterminée par la donnée de sa raison r et de son premier terme u_0 . On a alors pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration ▽

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes :

[1] Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n naturel par $u_n = u_0 + nr$.

On a $u_{n+1} - u_n = u_0 + (n+1)r - (u_0 + nr) = u_0 + nr + r - u_0 - nr = r$.

La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

[2] Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r \\ \dots &= \dots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + r \\ u_n &= u_{n-1} + r \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre toutes ces égalités, on obtient :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + nr$$

Après simplification, on a $u_n = u_0 + nr$.

Ce qui prouve que seule la suite s'écrivant $u_n = u_0 + nr$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . ▲

Théorème 1.6.— Une suite géométrique de premier terme non nul est entièrement et uniquement déterminée par la donnée de sa raison q et de son premier terme u_0 . On a alors pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = u_0 q^n$$

Démonstration ▽

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes :

[1] Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n naturel par $u_n = u_0 q^n$.

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_0 q^{n+1}}{u_0 q^n} = q$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

[2] Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 q \\ u_2 &= u_1 q \\ \dots &= \dots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} q \\ u_n &= u_{n-1} q \end{aligned}$$

On multiplie membre à membre toutes ces égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \times q^n$$

Après simplification, on a $u_n = u_0 q^n$.

Ce qui prouve que seule la suite s'écrivant $u_n = u_0 q^n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . ▲

Théorème 1.3.— Pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ ce qui s'écrit aussi } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration ▽

Pour n entier naturel non nul :

$$\text{Posons : } S = 1 + 2 + \cdots + n-2 + n-1 + n$$

$$\text{On a aussi : } S = n + n-1 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

En additionnant membre à membre les deux égalités, on obtient :

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ fois}}$$

Soit

$$2S = n(n+1) \text{ d'où } S = \frac{n(n+1)}{2}$$

▲

Théorème 1.8.— Soit q un réel quelconque et n un entier naturel :

- Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ qui s'écrit aussi $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- Si $q = 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = n + 1$

Démonstration ▽

Le cas $q = 1$ est évident.

Si $q \neq 1$ alors posons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

On a donc $q \times S = q \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}$.

D'où :

$$\begin{aligned} S - q \times S &= (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}) \\ S - q \times S &= 1 - q^{n+1} \\ S \times (1 - q) &= 1 - q^{n+1} \\ S &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

▲

■ ■ Approfondissements, algorithmes

■ Approfondissements théoriques

Somme des n premiers carrés

Théorème 1.11.— Somme des n premiers carrés —. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exemple : si $n = 5$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 &= 55 \\ \frac{5 \times (5+1) \times (2 \times 5 + 1)}{6} &= 55 \end{aligned}$$

Démonstration ∇

On note $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ et $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

On sait que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)^3 = (n+1)(n+1)^2 = (n+1)(n^2 + 2n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

On peut utiliser cette formule pour tous les entiers de 0 à n , on a :

$$\begin{aligned} (0+1)^3 &= 0^3 + 3 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1 \\ (1+1)^3 &= 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 \\ (2+1)^3 &= 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 \\ &\vdots \\ (n-2+1)^3 &= (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\ (n-1+1)^3 &= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ (n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1^3 \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre toutes ces égalités, on a :

$$S_3 + (n+1)^3 = S_3 + 3S_2 + 3S_1 + (n+1)$$

d'où :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= 3S_2 + 3S_1 + (n+1) \\ n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &= 3S_2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 &= 6S_2 + 3n(n+1) + 2(n+1) \\ 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2 &= 6S_2 \\ 6S_2 &= 2n^3 + 3n^2 + n \\ 6S_2 &= n(2n^3 + 3n + 1) \\ 6S_2 &= n(n+1)(2n+1) \\ S_2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

▲

Somme des n premiers cubes

Théorème 1.12.— Somme des n premiers cubes —. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Exemple : si $n = 5$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$$

$$\left(\frac{5(5+1)}{2} \right)^2 = 15^2 = 225$$

Démonstration ∇

On note $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ et $S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$

On sait que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)^4 = (n+1)^2(n+1)^2 = (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 2n + 1) = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

On peut utiliser cette formule pour tous les entiers de 0 à n , on a :

$$\begin{aligned} (0+1)^4 &= 0^4 + 4 \times 0^3 + 6 \times 0^2 + 4 \times 0 + 1 \\ (1+1)^4 &= 1^4 + 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1 \\ (2+1)^4 &= 2^4 + 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1 \\ &\vdots \\ (n-2+1)^4 &= (n-2)^4 + 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1 \\ (n-1+1)^4 &= (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1 \\ (n+1)^4 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre toutes ces égalités, on a :

$$S_4 + (n+1)^4 = S_4 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + (n+1)$$

d'où :

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + (n+1) \\ (n+1)^4 &= 4S_3 + n(n+1)(2n+1) + 4\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) &= 4S_3 \\ (n+1)((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1) &= 4S_3 \\ 4S_3 &= (n+1)(n^3 + n^2) \\ 4S_3 &= n^2(n+1)^2 \\ S_3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ S_3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = S_1^2 \end{aligned}$$

▲

Remboursement d'un emprunt par annuités constantes

En économie, la valeur actuelle C_0 d'un capital C_n obtenu après n années d'un placement au taux t est la somme qu'il faut placer aujourd'hui pour récupérer ce capital C_n après n années. Par conséquent, puisque $C_n = C_0(1+t)^n$, on a $C_0 = C_n(1+t)^{-n}$.

Le remboursement d'un emprunt par annuité constante consiste à verser chaque année une annuité de telle sorte que la somme des valeurs actuelles de ces annuités soit égale au capital emprunté C .

Soit :

$$C = a(1+t)^{-n} + a(1+t)^{-(n-1)} + \dots + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-1}$$

On remarque que ceci correspond à la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(1+t)^{-1}$ et de premier terme $a(1+t)^{-1}$.

D'après la **proposition 1.9**, on a :

$$C = a(1+t)^{-1} \frac{1 - (1+t)^{-n}}{1 - (1+t)^{-1}} = a(1+t)^{-1} \frac{1 - (1+t)^{-n}}{1 - \frac{1}{1+t}} = a(1+t)^{-1} \frac{1 - (1+t)^{-n}}{\frac{t}{1+t}} = a \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

On peut donc en déduire que :

$$a = \frac{Ct}{1 - (1+t)^{-n}}$$

Exemple : on cherche l'annuité correspondant au remboursement d'un crédit de 100000 € sur 5 ans au taux de 3%.

$$a = \frac{100000 \times 0,03}{1 - (1 + 0,03)^{-5}} = \frac{3000}{1 - 1,03^{-5}} \simeq 21835,46$$

Il faut donc rembourser chaque année 21835,46 €.

Tour de Hanoi

On considère trois piquets, notés A , B et C , et un nombre fini de disques de tailles différentes que l'on suppose placés initialement par taille décroissante sur le piquet A . Le but est ici de transférer cette tour de disques du piquet A au piquet C en respectant les règles suivantes :

- un seul disque peut être déplacé à la fois,
- un disque ne peut être placé sur un disque de taille plus petite.

Par exemple, pour trois disques, on peut déplacer la tour du piquet A au piquet C en effectuant 7 mouvements comme illustré ci-dessous.

Mouvement	Position	Mouvement	Position
Position initiale		4 : A vers C	
1 : A vers C		5 : B vers A	
2 : A vers B		6 : B vers C	
3 : C vers B		7 : A vers C	

Le problème consiste à déterminer le nombre minimal de mouvements pour déplacer une tour de n disques du piquet a au piquet C .

Proposition 1.13.— Soit n un entier naturel non nul. Le nombre minimal $H(n)$ de mouvements pour déplacer une tour de n disques du piquet A au piquet C vérifie :

$$H(n) = 2H(n-1) + 1 \text{ et } H(0) = 0$$

Démonstration ▽

Il est clair que $H(0) = 0$. Soit $n \geq 1$.

[1] Pour déplacer le grand disque sur le piquet C , il est nécessaire que C soit vide et que les $n-1$ premiers disques soient déplacés. On doit donc nécessairement déplacer les $n-1$ premiers disques vers le piquet B . Le nombre minimal de coups est donc $H(n-1)$.

[2] Ensuite, il faut déplacer le grand disque vers le piquet C ce qui correspond à un coup.

[3] Finalement, il faut déplacer les $n-1$ premiers disques du piquet B vers le piquet C , ce qui nécessite $H(n-1)$ coups. En définitive, on a $H(n) = 2H(n-1) + 1$. ▲

Cette formule ne donne qu'une définition récurrente de $H(n)$. Mais on peut exprimer $H(n)$ en fonction de n .

Proposition 1.14.— Pour tout entier n naturel,

$$H(n) = 2^n - 1$$

Démonstration ▽

On peut remarquer que la suite $(H(n) + 1)$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1. En effet, $H(0) + 1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$:

$$H(n) + 1 = 2H(n-1) + 2 = 2(H(n-1) + 1)$$

En appliquant le **théorème 1.6**, on obtient $H(n) + 1 = 2^n$ soit $H(n) = 2^n - 1$. ▲

■ Prolongements algorithmiques

Calculs de termes, de somme de termes

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Voici un algorithme permettant de calculer et d'afficher les termes de rangs $0, 1, \dots, k$ où k est un nombre entré par l'utilisateur ainsi que la valeur de leur somme.

```
Lire k
Lire u
S ← 0
Pour i variant de 0 à k-1
  Faire
    u ← f(u)
  Afficher u
  S ← S+u
  Fin faire
Afficher S
fin
```

Exemple : on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et la relation $u_{n+1} = 0.5u_n + 2$. Voici le programme en Python correspondant à l'algorithme précédent.

```
k=eval(input(" Entrer n : "))
u=eval(input(" Entrer la valeur u_0 : "))
s=0
for i in range(0,k) :
    u=0.5*u+2
    print(u)
    s=s+u
print(" la somme vaut",s)
```

On obtient pour $k = 5$ les valeurs : 3.5, 3.75, 3.875, 3.9375, 3.96875 et la somme 19.03125

Calculs de seuil

On considère une suite (u_n) . Voici un algorithme qui détermine le rang à partir duquel la suite dépasse un seuil défini par l'utilisateur.

```
Lire s
n ← 0
Tant que u ≤ s
  Faire
    Calculer le terme suivant
    n ← n+1
  Fin faire
Afficher n
```

Exemple : traduisons l'algorithme précédent en Python pour la suite $(u_n) = (n^2)$.

```
s=eval(input(" Entrer le seuil : "))
n=0
while n^2<=s :
    n=n+1
print(n)
```

Pour $s = 1000000$, on obtient $n = 1001$.

Calculs de factorielle

Définition : Soit n un entier naturel. Pour $n \geq 1$, on appelle **factorielle** n , notée $n!$ le nombre défini par $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Pour $n = 0$, on a par convention $0! = 1$.

Voici un programme en Python permettant de calculer la valeur de factorielle n .

```
def fact(n):
    if n==0 :
        return(1)
    else :
        return(n*fact(n-1))
```

Pour $n = 10$, on obtient $10! = 3628800$.

Suite de Syracuse

Définition : On appelle **suite de Syracuse** la suite définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si u_n est pair, $u_{n+1} = 3u_n + 1$ si u_n est impair.

Voici un programme en Python permettant de calculer les n premiers termes de la suite de Syracuse pour un u_0 entré par l'utilisateur.

```
u=eval(input("Premier terme : "))
n=eval(input("Nombre de termes : "))
for i in range(0,n):
    if u%2==0:
        u=u/2
    else :
        u=3*u+1
    print(u)
```

Remarque : cette suite fait l'objet de la conjecture de Syracuse : quel que soit le nombre que l'on choisisse au départ, on finira par tomber sur 1. Cette conjecture n'a jamais été démontrée.

Suite de Fibonacci

Définition : On appelle **suite de Fibonacci** la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$.

Voici un algorithme qui calcule les n premiers termes de la suite.

```
def fibo(n):
    if n==1 :
        return(1)
    elif n==2 :
        return (1)
    else :
        return fibo(n-1)+fibo(n-2)
n=eval(input("nombre de termes"))
for i in range(1,n+1):
    print(fibo(i))
```

On obtient pour $n = 15$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

■ ■ Méthodes

■ Démarrage avec les suites

□ Méthode 1.1.— Comment calculer le terme de rang n_0 d'une suite ⚙

- Si la suite est définie de manière explicite, on peut calculer le terme de rang n_0 en remplaçant directement n par n_0 dans la formule de définition de la suite.
- Si la suite est définie par récurrence, il faut calculer successivement tous les termes de la suite en utilisant la définition par récurrence jusqu'au terme de rang n_0 .

Exemple : on considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 2n^2 + 1$. Calculer u_4 . Comme (u_n) est définie explicitement, il suffit de remplacer n par 4 dans la définition de la suite : on a donc $u_4 = 2 \times 4^2 + 1 = 33$.

Exemple : on considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2v_n^2 + 1 \end{cases}$.
Calculons v_4 .

Cette fois, la suite étant définie de manière récurrente, nous allons calculer successivement v_1, v_2, v_3 pour terminer avec v_4 . On a :

$$\begin{aligned} v_1 &= 2 \times v_0^2 + 1 = 2 \times 0^2 + 1 = 1 & v_2 &= 2 \times v_1^2 + 1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3 \\ v_3 &= 2 \times v_2^2 + 1 = 2 \times 3^2 + 1 = 19 & v_4 &= 2 \times v_3^2 + 1 = 2 \times 19^2 + 1 = 723 \end{aligned}$$

Mise en œuvre : exercice 1.2

□ Méthode 1.2.— Comment représenter une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Il est possible de représenter les premiers termes d'une suite définie par récurrence, pour cela :

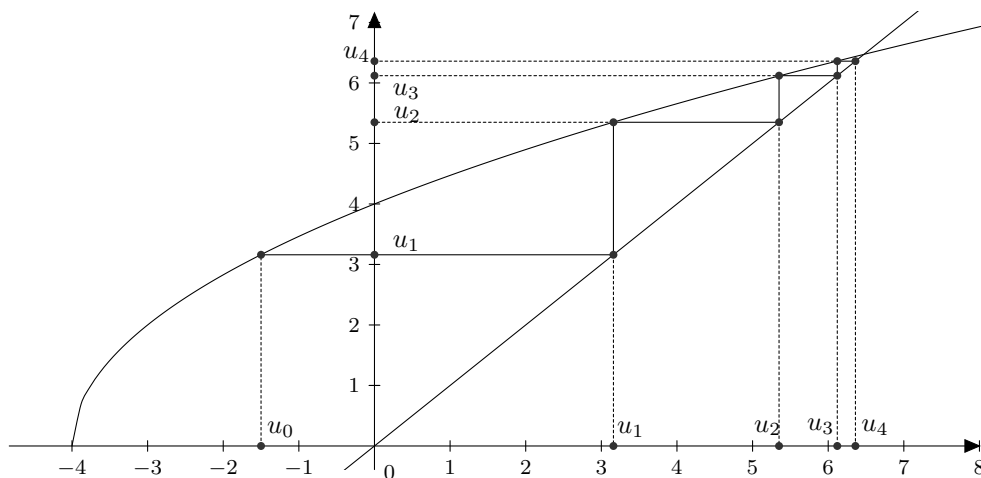
- 1 On trace la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
- 2 On trace la droite Δ d'équation $y = x$.
- 3 On place le point de coordonnées $(u_0; 0)$ sur l'axe des abscisses.
- 4 $u_1 = f(u_0)$ est l'ordonnée du point d'abscisse u_0 de la courbe représentative de f .
- 5 On place alors sur l'axe des abscisses le point de coordonnées $(u_1; 0)$ en construisant le point symétrique du point de coordonnées $(0; u_1)$ par rapport à Δ .
- 6 On répète alors le processus pour représenter autant de termes que nécessaire.

Exemple : on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = -1,5 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{4 + u_n} \end{cases}$.

Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite.

- 1 On construit la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{4 + x}$.
- 2 On trace la droite Δ d'équation $y = x$.
- 3 On place sur l'axe des abscisses le point de coordonnées $(-1,5; 0)$ qui correspond à u_0 .
- 4 $u_1 = f(u_0)$ est l'ordonnée du point d'abscisse $-1,5$ de la courbe $\mathcal{C}$.

- 5 On place alors sur l'axe des abscisses le point de coordonnées $(u_1; 0)$ en construisant le point symétrique du point de coordonnées $(0; u_1)$ par rapport à Δ
- 6 On répète alors le processus pour représenter les cinq premiers termes soit u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 .



Mise en œuvre : exercice 1.5

■ Sens de variation

□ Méthode 1.3.— Comment étudier le sens de variation d'une suite

Il existe deux techniques classiques d'étude du sens de variation d'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$:

- Si on ne connaît pas le signe des termes de la suite :

1 On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$

2 On détermine le signe de cette différence

3 Si ce signe est toujours le même, indépendamment de n , on peut conclure :

- ▶ Si pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.
- ▶ Si pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est croissante.
- ▶ Si pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = 0$ alors $u_{n+1} = u_n$ et la suite (u_n) est constante.

- Si tous les termes de la suite sont strictement positifs :

1 On calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2 On compare ce quotient avec 1.

3 Si le quotient et 1 sont toujours rangés dans le même ordre, on peut conclure :

- ▶ Si pour tout entier n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.
- ▶ Si pour tout entier n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est croissante.
- ▶ Si pour tout entier n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ alors $u_{n+1} = u_n$ et la suite (u_n) est constante.

Remarque : on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ dans tous les cas y compris lorsque tous les termes de la suite sont positifs.

Exemple : soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - n - 2$. Étudier le sens de variation de (u_n) .

On ne peut pas connaître, à priori, le signe des termes de la suite.

[1] On calcule alors la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - (n+1) - 2 - (n^2 - n - 2) \\ &= n^2 + 2n + 1 - n - 1 - 2 - n^2 + n + 2 \\ &= 2n \end{aligned}$$

[2] n étant un entier naturel, $2n \geq 0$.

[3] Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ soit $u_{n+1} \geq u_n$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

Exemple : soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \frac{n}{2^n}$. Étudier le sens de variation de (u_n) .

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $2^n > 0$ donc $u_n > 0$.

[1] On calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n}$$

[2] Si $n \geq 1$ alors $n + n \geq 1 + n$ soit $2n \geq n + 1$ donc $\frac{n+1}{2n} \leq 1$ puisque $2n > 0$.

[3] Pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ soit $u_{n+1} \leq u_n$ ce qui signifie la suite (u_n) est décroissante.

Mise en œuvre : exercice 1.6, exercice 1.7

■ Suites arithmétiques

□ Méthode 1.4.— Comment montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique

► Lorsque la suite (u_n) est donnée sous forme explicite, on peut directement utiliser la **proposition 1.2** : s'il existe (a, b) des réels tels que pour tout entier naturel $u_n = an + b$, alors (u_n) est arithmétique, de raison a , de premier terme b .

► Lorsque (u_n) n'est pas donnée sous forme explicite, on utilise la définition :

[1] Soit n un entier naturel, on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$.

[2] On montre que cette différence est constante (égale à un réel indépendant de n).

Remarque : pour conjecturer qu'une suite est arithmétique, on peut calculer les trois ou quatre premiers termes de la suite pour voir si la différence entre ces termes est constante mais cela ne prouve pas que la suite est arithmétique. En effet, pour qu'une suite soit arithmétique, il faut prouver que la différence entre chaque terme est constante quel que soit le terme et des exemples ne suffisent pas.

Exemple : soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7 - 4n$. Comme (u_n) est définie sous forme explicite, on peut conclure directement que (u_n) est la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 7$.

Mise en œuvre : exercice 1.8, exercice 1.12

❏ Méthode 1.5.— Comment calculer les termes d'une suite arithmétique ⚙

Pour calculer le terme u_{n_0} d'une suite arithmétique de raison r , deux cas se présentent :

- Si on connaît le terme u_0 , on remplace directement u_0 et r par leur valeur dans la formule $u_{n_0} = u_0 + n_0 r$ de la formule du **théorème 1.1**.
- Si on connaît un terme u_p quelconque de la suite, sachant que $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$ pour n et p entiers naturels, on obtient $u_n = u_p + (n - p)r$. Il suffit alors de remplacer u_p et r par leur valeur.

Exemple : soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$. Calculer u_{15} .

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison -4 par définition donc, d'après le **théorème 1.1**, pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 + nr$. Par conséquent, $u_{15} = 10 + 15 \times (-4) = -50$.

Exemple : soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ telle que $u_3 = -1$. Calculer u_9 .

On a pour tout entier naturel n : $u_n = u_3 + (n - 3) \times \frac{1}{2}$ donc $u_9 = -1 + (9 - 3) \times \frac{1}{2} = 2$.

Mise en œuvre : exercice 1.9, exercice 1.10

❏ Méthode 1.6.— Comment calculer la raison d'une suite arithmétique ⚙

Il suffit pour cela de connaître deux termes u_n et u_p . En effet

- [1]** Sachant que $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$ pour n et p entiers naturels, on obtient la formule $u_n = u_p + (n - p)r$. On remplace u_n et u_p par leurs valeurs dans cette formule.
- [2]** On résout l'équation d'inconnue r obtenue.

Exemple : soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique telle que $u_{10} = 30$ et $u_{20} = 50$. Calculer la raison et le premier terme de cette suite.

[1] La suite (u_n) étant arithmétique, on a $u_{20} = u_{10} + (20 - 10)r$

[2] On a $50 = 30 + 10r$ d'où $r = \frac{50 - 30}{10} = 2$.

La raison de la suite (u_n) est donc 2. On a de plus $u_{10} = u_0 + 10 \times 2$ soit $30 = u_0 + 20$ donc $u_0 = 30 - 20 = 10$.

Mise en œuvre : exercice 1.11

❑ **Méthode 1.7.— Comment calculer la somme de termes d'une suite arithmétique**

Soit à calculer une somme S de termes en progression arithmétique, c'est-à-dire une somme de termes **consécutifs** d'une suite arithmétique. On vérifie d'abord que l'on a bien affaire à des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

③ On identifie le premier et le dernier terme de la somme.

④ On détermine le nombre de termes de la somme.

⑤ On applique la **proposition 1.4**,

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Exemple : calculer la somme $S = 1 + \frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + 2 + \cdots + 20$.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}$. Cette suite est arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

En remarquant que $S = \frac{4}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} + \frac{8}{4} + \cdots + \frac{80}{4}$, on peut écrire S comme la somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (u_n) soit $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_p$.

① Le premier terme de la somme est 1 et le dernier terme de la somme est 20.

② Il faut déterminer la valeur de p afin de connaître le nombre de terme de cette somme. On sait que (u_n) est une suite arithmétique donc pour tout entier relatif n , $u_n = u_0 + nr$ soit $u_n = 1 + n \times \frac{1}{4}$.

On a $u_p = 20$ donc $20 = 1 + p \times \frac{1}{4}$ soit $p = 4 \times (20 - 1) = 76$.

Lorsque l'on fait la somme des termes de u_0 à u_{76} , il y a 77 termes dans la somme.

③ On peut donc écrire, d'après **proposition 1.4**,

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = \frac{77 \times (1 + 20)}{2} = \frac{1617}{2}.$$

Mise en œuvre : exercice 1.13

■ Suites géométriques

❑ **Méthode 1.8.— Comment montrer qu'une suite (u_n) est géométrique**

► Lorsque la suite (u_n) est donnée sous forme explicite, on peut directement utiliser la **proposition 1.7** : s'il existe (a, q) des réels tels que pour tout entier naturel $u_n = aq^n$, alors (u_n) est géométrique de raison q , de premier terme $u_0 = a$.

► Lorsque (u_n) n'est pas donnée sous forme explicite, on revient à la définition : il s'agit de montrer qu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$. Pour démontrer que (u_n) est une suite géométrique qui ne s'annule pas, on utilise la caractérisation par les quotients :

① On vérifie que $u_0 \neq 0$.

② Soit n un entier naturel tel que $u_n \neq 0$. On calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

③ On montre que ce quotient est égal à un réel non nul, indépendant de n .

Exemple : soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4 \times 3^n$. D'après la **proposition 1.7**, la suite (u_n) est la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 4$.

Mise en œuvre : exercice 1.15

❑ Méthode 1.9.— Comment calculer les termes d'une suite géométrique ⚙

Pour calculer le terme u_{n_0} d'une suite géométrique de raison q , deux cas se présentent :

- Si on connaît le terme u_0 , on remplace directement u_0 et q par leur valeur dans la formule $u_{n_0} = u_0 q^{n_0}$ du **théorème 1.6**.
- Si on connaît un terme u_p quelconque de la suite, sachant que $u_n = u_0 q^n$ et $u_p = u_0 q^p$ pour n et p entiers naturels, on obtient la formule $u_n = u_p q^{n-p}$ et on remplace alors u_p et q par leurs valeurs dans cette formule $u_{n_0} = u_p \times q^{n_0-p}$.

Exemple : soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Calculer u_{10} .

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 2 par définition donc, d'après le **théorème 1.6**, pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 2^n$. Par conséquent, $u_{10} = -3 \times 2^{10} = -3 \times 1024 = -3072$.

Exemple : soit (u_n) une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ telle que $u_2 = -1$. Calculer u_7 .

On a pour tout entier naturel n : $u_n = u_2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ donc $u_7 = -1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{7-2} = \frac{1}{32}$.

Mise en œuvre : exercice 1.16

❑ Méthode 1.10.— Comment calculer la somme de termes d'une suite géométrique

Soit à calculer une somme S de termes en progression géométrique, c'est-à-dire une somme de termes **consécutifs** d'une suite géométrique. On vérifie d'abord que l'on a bien des termes consécutifs d'une suite géométrique.

- 1 On identifie le premier terme de la somme.
- 2 On calcule le nombre de termes de la somme.
- 3 On applique la **proposition 1.9**

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

Exemple : calculer la somme $S = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} - \frac{2}{3^3} - \frac{2}{3^4} - \frac{2}{3^5} - \frac{2}{3^6} - \frac{2}{3^7} - \frac{2}{3^8} - \frac{2}{3^9} - \frac{2}{3^{10}}$.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -\frac{2}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$. Cette suite est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On peut écrire S comme la somme de termes consécutifs de la suite géométrique (u_n) soit

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_p.$$

- 1 Le premier terme de la somme est $-\frac{2}{3}$.
- 2 Il y a 10 termes dans la somme.
- 3 On peut donc écrire, d'après **proposition 1.9**,

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = -\frac{2}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = -\frac{2}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1$$

Mise en œuvre : exercice 1.18, exercice 1.19

■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Si pour tout entier naturel n , $u_n = n^2$ alors pour tout entier naturel n , $u_{2n} = 2n^2$.	☐	☐
2. Si $(w_n)_{n \geq 0}$ est la suite définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + \frac{1}{n+1}$, alors $w_3 = \frac{17}{6}$.	☐	☐
3. Si la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ est telle que $v_0 \geq v_1 \geq v_2$, alors la suite (v_n) est décroissante.	☐	☐
4. Si les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $v_n = u_n + 3$, alors la suite (v_n) est géométrique.	☐	☐
5. Si la suite (d_n) est une suite arithmétique telle que $d_{12} = 45$ et $d_{21} = 51$ alors sa raison est $\frac{2}{3}$.	☐	☐
6. Si $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique, on a pour tout entier naturel $n > 0$, $v_{n+1} \times v_{n-1} = (v_n)^2$.	☐	☐
7. La suite (u_n) définie pour tout n entier naturel par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 3$ est croissante.	☐	☐
8. La suite (u_n) définie pour tout n entier naturel par $u_n = 9n^2 - 6n + 9$ est croissante.	☐	☐
9. $3 + 4 + 5 + \dots + 101 = 5148$	☐	☐
10. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{105} = 2^{106} - 1$	☐	☐

■ ■ Énoncé des exercices

■ QCM pour s'entraîner à l'épreuve anticipée du baccalauréat

Exercice 1.1 : On considère la suite définie par (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = u_n$$

- A. La suite (u_n) est géométrique de raison 3.
- B. La suite (u_n) est arithmétique de raison 1.
- C. La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
- D. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n + 1$.

■ Calculs et représentation de termes d'une suite

Exercice 1.2 : Pour chacune des suites données, calculer les quatre premiers termes.

- 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n + \frac{6}{n}$
- 2. $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $v_n = (v_{n-1})^2 - 10n + 3$
- 3. La suite (w_n) est définie pour tout entier naturel n par :
 - ▷ Si n est pair, $w_n = n^2$.
 - ▷ Si n est impair, $w_n = w_{n+1}$.
- 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2 - 7n^2$
- 5. $r_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $r_{n+1} = 2 - 7r_n^2$

Exercice 1.3 : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$. Calculer u_6 .

Exercice 1.4 : On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - n - 2$

- 1. Exprimer en fonction de n les termes suivants : u_{n+1} , u_{n-1} , $u_n + 1$, u_{2n} et u_{3n+1} .
- 2. Exprimer la différence $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n .

Exercice 1.5 : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1$
Construire sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé, les 5 premiers termes de la suite (u_n) .

■ Comportement d'une suite

Exercice 1.6 : Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

- 1. (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 7n + (-5)^n$.
- 2. (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 5n^2 - n + 2$.

Exercice 1.7* : Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

- 1. (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1} = -u_n^2 + u_n - 1$.
- 2. (v_n) est définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n + n^2 - 2n + 5$.
- 3. (w_n) est définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{n^2}{2^n}$.

■ Suites arithmétiques

Exercice 1.8 : Parmi les suites définies ci-dessous, indiquer celles qui sont arithmétiques et donner dans ce cas leur raison.

1. $u_n = 2n^2 - n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = \frac{n+1}{3}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_n = 3^n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. $a_n = 2n - 3$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. $c_{n+1} = c_n + n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $c_0 = 2$.
6. $d_{n+1} = d_n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $d_0 = -1$.
7. $t_{n+1} = 1 + 2t_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t_0 = 7$.

Exercice 1.9 : Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = -6$ et pour tout entier naturel $u_{n+1} = u_n + 5$. Calculer u_{20} .

Exercice 1.10 : Pour chaque question, exprimer u_n en fonction de n , entier, sachant que la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r

1. $u_0 = 2$ et $r = 2$
2. $u_1 = -1$ et $r = 4$
3. $u_5 = 3$ et $r = 2$
4. $u_{10} = 0$ et $r = \frac{1}{2}$

Exercice 1.11 : $(u_n)_{n \geq 0}$ étant une suite arithmétique, déterminer dans chaque cas, la raison r et l'expression de u_n en fonction de n .

1. $u_3 = 16$ et $u_9 = 28$
2. $u_3 = -\frac{1}{4}$ et $u_{12} = -\frac{5}{2}$
3. $u_6 = 20$ et $u_{24} = 11$
4. $u_{1500} = 3$ et $u_{300} = 65$

Exercice 1.12 : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_0 = 4$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite arithmétique de raison -2 telle que $v_0 = 9$. Démontrer que la suite $(w_n)_{n \geq 0}$, définie par $w_n = u_n - 5v_n$ est arithmétique et calculer w_{10} .

Exercice 1.13 : Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 7 + 13 + 19 + \cdots + 85 + 91$
2. $S_2 = 2011 + 2012 + 2013 + \cdots + 2098 + 2099$

Exercice 1.14* : $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique. On sait que $u_{10} + u_{12} + u_{14} = 33$ et $u_{100} = 55$. Déterminer le premier terme u_0 et la raison r .

■ Suites géométriques

Exercice 1.15 : Parmi les suites définies ci-dessous, indiquer celles qui sont géométriques et donner dans ce cas leur raison.

1. $u_n = \frac{2^{n+3}}{3^{n+2}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = 5^n - n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_n = 3n^2 + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = 3$.
5. $b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $b_0 = -2$.
6. $c_{n+1} = \frac{c_n}{5}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $c_0 = 1$.

Exercice 1.16 : Pour chaque question, exprimer u_n en fonction de n , entier, sachant que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison q et calculer u_{15} .

1. $u_0 = 2$ et $q = -1$

2. $u_1 = 1$ et $q = 3$

3. $u_5 = -3$ et $q = -2$

4. $u_8 = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{5}$

Exercice 1.17* : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique telle que $u_5 = 486$, $u_7 = 4374$ et $q > 0$. Déterminer q , u_0 et u_{10} .

Exercice 1.18 : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique telle que $u_2 = 9$ et $u_5 = 243$

1. Déterminer la raison q et le premier terme u_0 de la suite.

2. Exprimer u_n en fonction de n .

3. Calculer la somme $S = u_3 + u_4 + \dots + u_8$.

Exercice 1.19* : Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = -6 - 6\sqrt{6} - \dots - 1\,296\sqrt{6} - 7\,776$

2. $S_2 = -\frac{21}{16} + \frac{147}{128} - \dots - \frac{121\,060\,821}{268\,435\,456} + \frac{847\,425\,747}{214\,748\,3648}$

Exercice 1.20* : On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 4$ et $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 1$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (w_n) .

2. La suite (w_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?

3. Soit la suite (u_n) définie, pour n entier naturel, par $u_n = w_n - 2$. Calculer les quatre premiers terme de cette suite.

4. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de cette suite ?

5. Démontrer cette conjecture.

6. Exprimer u_n en fonction de n .

7. Exprimer w_n en fonction de n .

8. Calculer w_{25} .

■ ■ Indications

____ **Ex. 1.7** _____

Pour la suite (w_n) , on peut étudier le quotient $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ car les termes de la suite sont positifs.

____ **Ex. 1.13** _____

S_1 et S_2 sont des sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques.

____ **Ex. 1.14** _____

On n'a pas une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on ne peut donc pas utiliser la **proposition 1.4**. Ici, il faut écrire u_n en fonction de r et u_0 et utiliser les informations de l'énoncé pour obtenir un système d'équation dont les inconnues sont r et u_0 .

____ **Ex. 1.17** _____

Commencer par exprimer u_7 en fonction de u_5 et q pour obtenir une équation dont q est solution.

____ **Ex. 1.19** _____

S_1 et S_2 sont des sommes de termes consécutifs de suites géométriques.

____ **Ex. 1.20** _____

La suite (u_n) semble géométrique.

■ ■ Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V

1. Pour tout entier naturel n , $u_{2n} = (2n)^2 = 2^2 n^2 = 4n^2$.
2. On calcule les premiers termes de la suite. $w_1 = w_0 + \frac{1}{0+1} = 1 + 1 = 2$, $w_2 = w_1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $w_3 = w_2 + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$.
3. L'ordre des trois premiers termes ne suffit pas à donner le sens de variation d'une suite. On peut considérer la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = n^2 - 4n + 4$ comme contre-exemple. En effet $v_0 = 4$, $v_1 = 1$, $v_2 = 0$ donc on a bien $v_0 \geq v_1 \geq v_2$ mais la suite n'est pas décroissante car $v_3 = 1$ donc $v_3 \geq v_2$.
4. On peut remarquer que : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+3}{u_n+3} = \frac{2u_n+3+3}{u_n+3} = \frac{2(u_n+3)}{u_n+3} = 2$. Par conséquent, le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant pour tout entier naturel n , ce qui signifie que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.
5. Si la suite (d_n) est arithmétique alors on sait que $d_{21} = d_{12} + (21 - 12)r$ où r désigne la raison de la suite. Par conséquent, on a $51 = 45 + 9r$ soit $r = \frac{51-45}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
6. (v_n) étant une suite géométrique, si on désigne par q sa raison, on a pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 q^n$ donc $v_{n+1} \times v_{n-1} = v_0 q^{n+1} \times v_0 q^{n-1} = v_0^2 q^{n+1+n-1} = v_0^2 q^{2n} = (v_0 q^n)^2$.
7. On a $u_0 = 2$ et $u_1 = u_0^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$ donc $u_0 > u_1$ par conséquent la suite (u_n) ne peut pas être croissante.
8. Pour tout n entier naturel, on a :

$$u_{n+1} - u_n = 9(n+1)^2 - 6(n+1) + 9 - (9n^2 - 6n + 9) = 9n^2 + 18n + 9 - 6n - 6 + 9 - 9n^2 + 6n - 9 = 18n + 3$$

Pour tout entier naturel n , $18n + 3 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

9. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1$. (u_n) est une suite arithmétique de raison 1 et pour tout entier naturel n , $u_n = n$. De plus, $3 + 4 + 5 + \dots + 101 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{101}$ donc d'après la **proposition 1.4**, on a $3 + 4 + 5 + \dots + 101 = \frac{(3 + 101) \times 99}{2} = 5148$.

10. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$. (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n$. De plus, $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{105} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{105}$ donc d'après la **proposition 1.9**, on a

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{105} = 1 \times \frac{1 - 2^{106}}{1 - 2} = 2^{106} - 1.$$

❑ Erreurs classiques

- On ne peut pas montrer qu'une suite est croissante ou décroissante en comparant les premiers termes d'une suite.
- Il faut être attentif lorsque l'on calcule le nombre d'éléments d'une somme de termes consécutifs d'une suite, il y a toujours un terme de plus que la différence des indices du premier et du dernier terme de la somme.

■ ■ Corrigé des exercices

Exercice 1.1

A. En effet, la suite vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n$. Il s'agit donc de la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1. ▲

Exercice 1.2

On met en œuvre la **méthode 1.1**.

1. Cette suite est définie à partir de l'indice 1 :

$$u_1 = (-1)^1 + \frac{6}{1} = -1 + 6 = 5 \quad u_2 = (-1)^2 + \frac{6}{2} = 1 + 3 = 4$$

$$u_3 = (-1)^3 + \frac{6}{3} = -1 + 2 = 1 \quad u_4 = (-1)^4 + \frac{6}{4} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

2. On connaît déjà $v_0 = 2$ et on a :

$$v_1 = v_0^2 - 10 \times 1 + 3 = 2^2 - 10 + 3 = -3$$

$$v_2 = v_1^2 - 10 \times 2 + 3 = (-3)^2 - 20 + 3 = -8$$

$$v_3 = v_2^2 - 10 \times 3 + 3 = (-8)^2 - 30 + 3 = 37$$

3. Cette suite est définie à partir de l'indice 0.

0 est pair donc $w_0 = 0^2 = 0$.

1 est impair donc $w_1 = u_2$. Il faut donc calculer w_2 pour connaître w_1 .

2 est pair donc $w_2 = 2^2 = 4$ et donc $w_1 = 4$.

3 est impair donc $w_3 = w_4$. Il faut donc calculer w_4 pour connaître w_3 et on a, puisque 4 est pair, $w_4 = 4^2 = 16$ donc $w_3 = 16$.

4. Cette suite est définie à partir de l'indice 0 :

$$t_0 = 2 - 7 \times 0^2 = 2; \quad t_1 = 2 - 7 \times 1^2 = -5.$$

$$t_2 = 2 - 7 \times 2^2 = -26; \quad t_3 = 2 - 7 \times 3^2 = -61.$$

5. On connaît déjà $r_0 = 1$ et on a :

$$r_1 = 2 - 7r_0^2 = 2 - 7 \times 1^2 = -5$$

$$r_2 = 2 - 7r_1^2 = 2 - 7 \times (-5)^2 = -173$$

$$r_3 = 2 - 7r_2^2 = 2 - 7 \times (-173)^2 = -209\,501$$

▲

Exercice 1.3

La suite étant définie par récurrence, pour calculer u_6 , il faut calculer tous les termes précédents.

$$u_2 = 3u_1 + 2u_0 = 3 \times 1 + 2 \times 0 = 3 \quad u_4 = 3u_3 + 2u_2 = 3 \times 11 + 2 \times 3 = 39$$

$$u_3 = 3u_2 + 2u_1 = 3 \times 3 + 2 \times 1 = 11 \quad u_5 = 3u_4 + 2u_3 = 3 \times 39 + 2 \times 11 = 139$$

Par conséquent $u_6 = 3u_5 + 2u_4 = 3 \times 139 + 2 \times 39 = 495$. ▲

Exercice 1.4

$$1. \quad u_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) - 2 = 2(n^2 + 2n + 1) - n - 1 - 2 = 2n^2 + 3n - 1$$

$$u_{n-1} = 2(n-1)^2 - (n-1) - 2 = 2(n^2 - 2n + 1) - n + 1 - 2 = 2n^2 - 5n + 1$$

$$u_n + 1 = 2n^2 - n - 2 + 1 = 2n^2 - n - 1$$

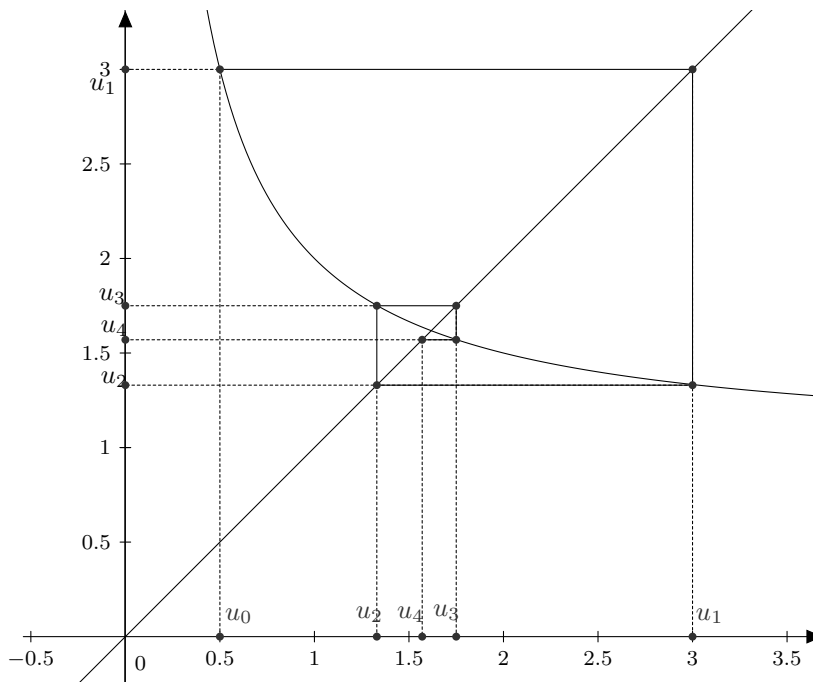
$$u_{2n} = 2(2n)^2 - 2n - 2 = 2 \times 4n^2 - 2n - 2 = 8n^2 - 2n - 2$$

$$u_{3n+1} = 2(3n+1)^2 - (3n+1) - 2 = 2((3n)^2 + 2 \times 3n + 1) - 3n - 1 - 2 = 18n^2 + 12n + 2 - 3n - 3 = 18n^2 + 9n - 1$$

2. On a, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 3n - 1 - (2n^2 - n - 2) = 2n^2 + 3n - 1 - 2n^2 + n + 2 = 4n + 1$. ▲

Exercice 1.5

On trace dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f définie pour $x > 0$ par $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ ainsi que la droite d'équation $y = x$. Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$. On peut donc utiliser la courbe représentative de la fonction f pour trouver sur l'axe des ordonnées les valeurs des différents termes de la suite et les « reporter » sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$ comme dans la **méthode 1.2**.



Exercice 1.6

Le calcul des premiers termes suffirait pour montrer que la suite n'est ni croissante, ni décroissante mais le calcul de $u_{n+1} - u_n$ permet d'assurer qu'elle n'est pas croissante ou décroissante à partir d'un certain rang.

1. On met en œuvre la **méthode 1.3** en commençant par calculer pour n entier la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 7(n+1) + (-5)^{n+1} - (7n + (-5)^n) \\ &= 7n + 7 - 7n + (-5)^{n+1} - (-5)^n \\ &= 7 + (-5)^n(-5 - 1) \\ &= 7 - 4 \times (-5)^n \end{aligned}$$

On constate que le signe de $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant pour tout entier n puisque $7 - 4 \times (-5)^n$ est positif pour n impair et négatif pour n pair et supérieur ou égal à 2. La suite (u_n) n'est donc ni croissante, ni décroissante.

2. Deux méthodes peuvent être mises en œuvre pour traiter cette question.

■ Première méthode

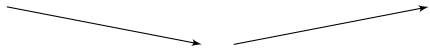
On peut comme précédemment calculer la différence $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= 5(n+1)^2 - (n+1) + 2 - (5n^2 - n + 2) \\
 &= 5(n^2 + 2n + 1) - n - 1 + 2 - 5n^2 + n - 2 \\
 &= 5n^2 + 10n + 5 - n - 1 + 2 - 5n^2 + n - 2 \\
 &= 10n + 4
 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , $10n + 4 > 0$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$ soit $v_{n+1} > v_n$, ce qui signifie que la suite (v_n) est croissante.

■ Deuxième méthode

Soit la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 5x^2 - x + 2$. Pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$. On peut donc étudier le sens de variation de la fonction f pour déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . On sait que f est dérivable sur son ensemble de définition et que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = 10x - 1$, on a donc le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{1}{10}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

La fonction f est donc croissante sur $[1; +\infty[$, ce qui entraîne que pour n entier naturel non nul $f(n) \leq f(n+1)$ puisque $n \leq n+1$.

Finalement, la suite (v_n) est croissante à partir du rang 1. Or $v_0 = 2$ et $v_1 = 6$ donc $v_0 < v_1$. Par conséquent, la suite (v_n) est croissante. ▲

Exercice 1.7

1. On met en œuvre la **méthode 1.3**, en calculant $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 + u_n - 1 - u_n = -u_n^2 - 1 = -(u_n^2 + 1)$$

Pour tout entier naturel n , $u_n^2 \geq 0$ donc $u_n^2 + 1 > 0$ soit $-(u_n^2 + 1) < 0$. On peut en conclure que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n , ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

2. De même que précédemment, on calcule $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = v_n + n^2 - 2n + 5 - v_n = n^2 - 2n + 5$$

On étudie alors le signe de la fonction polynôme du second degré $P : n \mapsto n^2 - 2n + 5$. Le discriminant de P est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 = -16$. Par conséquent pour tout entier naturel n , $n^2 - 2n + 5 > 0$, ce qui signifie que $v_{n+1} - v_n > 0$ soit $v_{n+1} > v_n$. La suite (v_n) est donc croissante.

3. On peut remarquer que tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs et non nuls pour $n \geq 1$. Soit $n \geq 1$.

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2 \times 2^n}{2^{n+1} \times n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

📎 On peut donc calculer $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ pour étudier le sens de variation.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x^2}$.

 f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour n entier naturel, on a $f(n) = \frac{w_{n+1}}{w_n}$

D'après le **théorème 3.4**, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2) \times 2x^2 - 4x(x^2+2x+1)}{(2x^2)^2} = \frac{4x^3 + 4x^2 - 4x^3 - 8x^2 - 4x}{4x^4} \\ &= \frac{-x-1}{x^3} \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Or $f(3) < 1$ donc pour n entier naturel supérieur ou égal à 3, $f(n) < 1$ soit $\frac{w_{n+1}}{w_n} < 1$, c'est-à-dire $w_{n+1} < w_n$. D'après la **méthode 1.3**, on peut conclure que la suite (w_n) est décroissante à partir du rang 3. ▲

Exercice 1.8

On met en œuvre la **méthode 1.4** pour chaque question.

1. Soit $n \geq 0$, un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^2 - (n+1) + 1 - (2n^2 - n + 1) \\ &= 2(n^2 + 2n + 1) - n - 1 + 1 - 2n^2 + n - 1 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - n - 2n^2 + n - 1 \\ &= 4n + 1 \end{aligned}$$

Ce résultat dépend visiblement de l'entier n . Par conséquent la suite n'est pas arithmétique.

2. Soit $n \geq 0$, un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{(n+1)+1}{3} - \frac{n+1}{3} = \frac{n+2-(n+1)}{3} \\ &= \frac{n+2-n-1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La différence $v_{n+1} - v_n$ est donc constante pour tout entier naturel n , ce qui signifie que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

3. Soit $n \geq 0$, un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 3^{n+1} + 1 - (3^n + 1) = 3^{n+1} + 1 - 3^n - 1 \\ &= 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3 - 1) = 2 \times 3^n \end{aligned}$$

Ce résultat dépend de n , ce qui signifie que la suite n'est pas arithmétique.

4. Soit $n \geq 0$, un entier naturel. On a :

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 3 - (2n - 3) = 2n + 2 - 3 - 2n + 3 = 2$$

La différence $a_{n+1} - a_n$ est indépendante de l'entier naturel n , ce qui signifie que la suite (a_n) est arithmétique de raison 2.

5. Soit $n \geq 0$, un entier naturel.

$$c_{n+1} - c_n = c_n + n - c_n = n$$

Ce résultat dépend de n et n'est donc pas constant. (c_n) n'est pas arithmétique.

 En fait, on peut calculer les trois premiers termes et montrer que la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante pour montrer que la suite n'est pas arithmétique.

6. Soit $n \geq 0$, un entier naturel. On a :

$$d_{n+1} - d_n = d_n - 5 - d_n = -5$$

La différence $d_{n+1} - d_n$ est donc constante pour tout entier naturel n . La suite (d_n) est arithmétique de raison -5 .

7. Soit $n \geq 0$, un entier naturel. On a $t_{n+1} - t_n = 1 + 2t_n - t_n = 1 + t_n$. Ainsi $t_1 - t_0 = 1 + t_0 = 8$, $t_2 - t_1 = 1 + t_1 = 16$. La différence entre deux termes consécutifs de la suite (t_n) n'est pas constante. La suite n'est pas arithmétique. ▲

Exercice 1.9

On peut remarquer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = 5$, ce qui signifie que la suite (u_n) est arithmétique de raison 5. En utilisant la **méthode 1.5**, on établit que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = u_1 + (n-1) \times 5$ soit $u_n = -6 + 5(n-1) = 5n - 11$. Par conséquent, $u_{20} = 5 \times 20 - 11 = 89$. ▲

Exercice 1.10

On peut utiliser la **méthode 1.5**.

1. Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$ soit, ici, $u_n = 2 + 2n$.

2. Pour tout entier naturel n , $u_n = u_1 + (n-1)r$. Ainsi,

$$u_n = -1 + (n-1) \times 4 = 4n - 5.$$

3. Pour tout entier naturel n , $u_n = u_5 + (n-5)r$ soit, ici,

$$u_n = 3 + (n-5) \times 2 = 2n - 7.$$

4. Pour tout entier naturel n , $u_n = u_{10} + (n-10)r$, d'où

$$u_n = 0 + (n-10) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n - 5.$$

Exercice 1.11

On met en œuvre la **méthode 1.6**.

1. On sait que la suite (u_n) est arithmétique on a :

$$u_9 = u_3 + (9-3)r \Leftrightarrow 28 = 16 + 6r \Leftrightarrow 28 - 16 = 6r \Leftrightarrow r = \frac{12}{6} = 2$$

La raison de la suite est donc $r = 2$. Pour exprimer u_n en fonction de n , il faut déterminer u_0 .

On sait que $u_3 = u_0 + 3r$ soit $16 = u_0 + 3 \times 2$ donc $u_0 = 16 - 6 = 10$.

Par conséquent pour tout entier naturel n , $u_n = 10 + 2n$.

2. On sait que la suite (u_n) est arithmétique donc on a :

$$u_{12} = u_3 + (12-3)r \Leftrightarrow -\frac{5}{2} = -\frac{1}{4} + 9r \Leftrightarrow -\frac{5}{2} + \frac{1}{4} = 9r \Leftrightarrow r = \frac{-\frac{9}{4}}{9} = -\frac{1}{4}$$

La raison de la suite est donc $r = -\frac{1}{4}$. Pour exprimer u_n en fonction de n , il faut déterminer u_0 .

On sait que $u_3 = u_0 + 3r$ soit $-\frac{1}{4} = u_0 + 3 \times (-\frac{1}{4})$ donc $u_0 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Par conséquent pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}n$.

3. On sait que la suite (u_n) est arithmétique donc on a :

$$u_{24} = u_6 + (24 - 6)r \Leftrightarrow 11 = 20 + 18r \Leftrightarrow 11 - 20 = 18r \Leftrightarrow r = \frac{-9}{18} = -\frac{1}{2}$$

La raison de la suite est donc $r = -\frac{1}{2}$. Pour exprimer u_n en fonction de n , il faut déterminer u_0 .

On sait que $u_6 = u_0 + 6r$ soit $20 = u_0 + 6 \times (-\frac{1}{2})$ donc $u_0 = 20 + 3 = 23$.

Par conséquent pour tout entier naturel n , $u_n = 23 - \frac{1}{2}n$.

4. On sait que la suite (u_n) est arithmétique donc on a :

$$\begin{aligned} u_{1500} &= u_{300} + (1500 - 300)r \Leftrightarrow 3 = 65 + 1200r \\ &\Leftrightarrow 3 - 65 = 1200r \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-62}{1200} = -\frac{31}{600} \end{aligned}$$

La raison de la suite est donc $r = -\frac{31}{600}$. Pour exprimer u_n en fonction de n , il faut déterminer u_0 .

On sait que $u_{300} = u_0 + 300r$ soit $65 = u_0 + 300 \times (-\frac{31}{600})$ donc $u_0 = 65 + 300 \times \frac{31}{600} = \frac{161}{2}$.

Par conséquent pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{161}{2} - \frac{31}{600}n$. ▲

Exercice 1.12

La suite (u_n) est arithmétique de raison 3 telle que $u_0 = 4$ donc pour tout entier naturel n , $u_n = 4 + 3n$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison -2 telle que $v_0 = 9$ donc pour tout entier naturel n , $v_n = 9 - 2n$.

Par conséquent, pour tout entier naturel n , on a :

$$w_n = u_n - 5v_n = 4 + 3n - 5 \times (9 - 2n) = 4 + 3n - 45 + 10n = 13n - 41$$

D'après la **proposition 1.2**, (w_n) est arithmétique de raison 13 et de premier terme -41 . Par conséquent, $w_{10} = -41 + 13 \times 10 = 89$. ▲

Exercice 1.13

1. On met en œuvre la **méthode 1.4**.

Soit la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + 6$ et $u_0 = 7$. La suite (u_n) est arithmétique de raison 6 et on peut remarquer que S_1 est la somme de termes consécutifs de cette suite. Pour calculer S_1 , il faut donc déterminer le nombre de termes de cette somme, c'est-à-dire déterminer l'indice du dernier terme. Par conséquent, il faut trouver l'entier p tel que $u_p = 91$. Sachant que l'on a pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + 6n$, on a $u_p = 91 \Leftrightarrow 91 = 7 + 6p$ soit $p = 14$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{13} + u_{14} \\ &= \frac{(u_0 + u_{14}) \times 15}{2} = \frac{(91 + 7) \times 15}{2} = 735 \end{aligned}$$

 *Attention ! quand on somme des termes consécutifs d'une suite de l'indice 0 à l'indice 14, il y a $14 + 1 = 15$ termes.*

2. On peut remarquer que la somme S_2 est la somme des entiers consécutifs de 2011 à 2099. Or la suite des entiers naturels peut être considérée comme une suite (u_n) arithmétique de raison 1 et de premier terme 0. On a donc :

$$\begin{aligned} S_2 &= 2011 + 2012 + 2013 + \cdots + 2098 + 2099 \\ &= u_{2011} + u_{2012} + u_{2013} + \cdots + u_{2098} + u_{2099} \\ &= \frac{(u_{2011} + u_{2099}) \times (2099 - 2011 + 1)}{2} \\ &= \frac{(2011 + 2099) \times 89}{2} \\ &= 182\,895 \end{aligned}$$

 Quand on fait la somme des termes consécutifs d'une suite de l'indice 2011 à l'indice 2099, il y a $2099 - 2011 + 1 = 89$ termes.

▲

Exercice 1.14

$(u_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique donc pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} u_{10} + u_{12} + u_{14} = 33 &\Leftrightarrow u_0 + 10r + u_0 + 12r + u_0 + 14r = 33 \\ &\Leftrightarrow 3u_0 + 36r = 33 \end{aligned}$$

De même :

$$u_{100} = 55 \Leftrightarrow u_0 + 100r = 55$$

Il reste donc à résoudre le système : $\begin{cases} 3u_0 + 36r = 33 \\ u_0 + 100r = 55 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3u_0 + 36r = 33 \\ u_0 + 100r = 55 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_0 + 36r = 33 \\ 3u_0 + 300r = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_0 + 36r = 33 \\ 264r = 132 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 5 \\ r = \frac{132}{264} = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

▲

Exercice 1.15

On met en œuvre la **méthode 1.8**.

1. À l'aide des règles de calcul avec les puissances, il vient pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2^{n+3}}{3^{n+2}} = \frac{2^n \times 2^3}{3^n \times 3^2} = \frac{2^3}{3^2} \times \frac{2^n}{3^n} = \frac{8}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(u_n) est donc la suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $\frac{8}{9}$.

2. $v_0 = 1 \neq 0$, de plus pour tout entier naturel n tel que $v_n \neq 0$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{5^{n+1} - (n+1)}{5^n - n}$$

Ce quotient n'est pas constant car il dépend de n donc la suite (v_n) n'est pas géométrique.

On peut aussi le prouver en calculant : $v_0 = 1$, $v_1 = 5^1 - 1 = 4$ et $v_2 = 5^2 - 2 = 23$. On constate que $\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$. Or si la suite (v_n) était géométrique, ces quotients seraient égaux.

3. $w_0 = 1 \neq 0$, de plus pour tout entier naturel n tel que $w_n \neq 0$:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{3(n+1)^2 + 1}{3n^2 + 1} = \frac{3(n^2 + 2n + 1) + 1}{3n^2 + 1} = \frac{3n^2 + 6n + 4}{3n^2 + 1}$$

Ce quotient n'est pas constant car il dépend de n donc la suite (w_n) n'est pas géométrique.

4. Pour tout entier naturel n , on a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{a_n}{2} \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$$

Pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$ donc, par définition, la suite (a_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{2}$.

5. $b_0 = -2 \neq 0$, de plus pour tout entier naturel n tel que $b_n \neq 0$:

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{n+1}$$

Ce quotient n'est pas constant car il dépend de n donc (b_n) n'est pas géométrique.

6. Pour tout entier naturel n , on a :

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{5} \Leftrightarrow c_{n+1} = \frac{1}{5} \times c_n$$

Pour tout entier naturel n , $c_{n+1} = \frac{1}{5}c_n$ donc, par définition, la suite (c_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

▲

Exercice 1.16

On peut utiliser la **méthode 1.9**.

1. Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 q^n$ soit, ici, $u_n = 2 \times (-1)^n$. On a donc $u^{15} = 2 \times (-1)^{15} = -2$.

2. Pour tout entier naturel n , $u_n = u_1 q^{n-1} = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$. On a donc $u^{15} = 3^{14} = 4\,782\,969$.

3. Pour tout entier naturel n , $u_n = u_5 q^{n-5} = -3 \times (-2)^{n-5}$. On a donc $u^{15} = -3 \times (-2)^{10} = -3\,072$.

4. Pour tout entier naturel n , $u_n = u_8 q^{n-8} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-8} = \frac{1}{2 \times 5^{n-8}}$. On

a donc $u^{15} = \frac{1}{2 \times 5^7} = \frac{1}{156\,250}$.

▲

Exercice 1.17

On sait que pour tout entier $n \geq 0$, $u_7 = u_5 \times q^{7-5}$ d'où $4374 = 486q^2$ soit $q^2 = \frac{4374}{486} = 9$. On en déduit donc que $q = 3$ ou $q = -3$. Comme par hypothèse, $q > 0$, il s'ensuit que $q = 3$.

Pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_5 = u_0 \times q^5$ d'où $u_0 = \frac{u_5}{q^5} = \frac{486}{3^5} = 2$. Par conséquent, pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times 3^n$ donc $u_{10} = 2 \times 3^{10} = 118\,098$.

▲

Exercice 1.18

1. On sait que pour tout entier $n \geq 0$, $u_5 = u_2 \times q^{5-2}$ d'où $243 = 9q^3$ soit $q^3 = \frac{243}{9} = 27$. Comme $3^3 = 27$ on en déduit que $q = 3$.

On a pour tout entier $n \geq 0$, $u_2 = u_0 \times q^2$ d'où $u_0 = \frac{u_2}{q^2} = \frac{9}{3^2} = 1$

2. Pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 \times 3^n$ soit $u_n = 3^n$.

3. On peut utiliser la **méthode 1.10** :

$$\begin{aligned} S &= u_3 + u_4 + \cdots + u_8 = u_3 \times \frac{1 - 3^{8-3+1}}{1 - 3} = 27 \times \frac{1 - 729}{-2} = 27 \times \frac{728}{2} \\ &= 9\,828 \end{aligned}$$

 La fonction $x \mapsto x^3$ étant strictement croissante, l'équation $x^3 = 27$ admet une seule solution, $x = 3$.



Exercice 1.19

On met en œuvre la **méthode 1.10**

1. Soit la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{6}u_n$ et $u_0 = -6$. La suite (u_n) est géométrique de raison $\sqrt{6}$ et on peut remarquer que S_1 est la somme de termes consécutifs de cette suite. Pour calculer S_1 , il faut donc déterminer le nombre de termes de cette somme, c'est-à-dire déterminer l'indice du dernier terme. Par conséquent, il faut trouver l'entier p tel que $u_p = -7\,776$.

Sachant que l'on a pour tout entier naturel n , $u_n = u_0(\sqrt{6})^n$, on a :

$$u_p = -7\,776 \Leftrightarrow -7\,776 = -6 \times (\sqrt{6})^p \Leftrightarrow (\sqrt{6})^p = 1\,296$$

Or, on sait que $6^4 = 1\,296$ et que $6 = (\sqrt{6})^2$ donc $(\sqrt{6})^8 = 1\,296$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_7 + u_8 = u_0 \frac{1 - (\sqrt{6})^9}{1 - \sqrt{6}} \\ &= -6 \times \frac{1 - (\sqrt{6})^8 \times \sqrt{6}}{1 - \sqrt{6}} = -6 \times \frac{1 - (\sqrt{6})^8 \times \sqrt{6}}{1 - \sqrt{6}} \times \frac{1 + \sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}} \\ &= \frac{-6}{1 - 6} \times (1 + \sqrt{6} - 1\,296\sqrt{6} - 1\,296 \times 6) \\ &= \frac{6}{5}(-7\,775 - 1\,295\sqrt{6}) = -9\,330 - 1\,554\sqrt{6} \end{aligned}$$

 La somme des termes consécutifs d'une suite de l'indice 0 à l'indice 8 compte 9 termes.

2. Soit la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -\frac{7}{8}u_n$ et $u_0 = -\frac{21}{16}$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $-\frac{7}{8}$ et on peut remarquer que S_2 est la somme de termes consécutifs de cette suite. Pour calculer S_2 , il faut donc déterminer le nombre de termes de cette somme, c'est-à-dire déterminer l'indice du dernier terme. Par conséquent, il faut trouver l'entier p tel que $u_p = \frac{847\,425\,747}{2\,147\,483\,648}$.

Sachant que l'on a pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \left(\frac{-7}{8}\right)^n$, on a :

$$u_p = \frac{847\,425\,747}{2\,147\,483\,648} \Leftrightarrow \frac{847\,425\,747}{2\,147\,483\,648} = -\frac{21}{16} \times \left(\frac{-7}{8}\right)^p \Leftrightarrow \left(\frac{-7}{8}\right)^p = -\frac{40\,353\,607}{134\,217\,728}$$

 La somme des termes consécutifs d'une suite de l'indice 0 à l'indice 9 compte 10 termes.

Avec une calculatrice, en écrivant les puissances successives de $-\frac{7}{8}$, on obtient

$$\left(-\frac{7}{8}\right)^9 = -\frac{40\,353\,607}{134\,217\,728} \text{ soit } p = 9. \text{ On peut donc écrire :}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_8 + u_9 = u_0 \frac{1 - \left(-\frac{7}{8}\right)^{10}}{1 - \left(-\frac{7}{8}\right)} = -\frac{21}{16} \frac{1 - \left(-\frac{7}{8}\right)^{10}}{1 - \left(-\frac{7}{8}\right)} \\ &= -\frac{21}{16} \frac{1 - \left(-\frac{7}{8}\right)^{10}}{\frac{15}{8}} = -\frac{7}{10} \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{10}\right) = -\frac{1\,107\,773\,205}{2\,147\,483\,648}. \end{aligned}$$

▲

Exercice 1.20

1. On a $w_1 = \frac{1}{2}w_0 + 1 = 3$, $w_2 = \frac{1}{2}w_1 + 1 = \frac{5}{2}$ et $w_3 = \frac{1}{2}w_2 + 1 = \frac{9}{4}$.
2. On constate que $w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$ donc la suite ne peut pas être arithmétique. Comme $\frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}$ donc la suite ne peut pas être géométrique.
3. On a $u_0 = w_0 - 2 = 2$, $u_1 = w_1 - 2 = 1$, $u_2 = w_2 - 2 = \frac{1}{2}$ et $u_3 = w_3 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$.
4. On constate que $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}$, on peut donc conjecturer que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
5. Pour démontrer cette conjecture, on revient à la définition. Soit $n \geq 0$ un entier naturel, on a :

$$u_{n+1} = w_{n+1} - 2 = \left(\frac{1}{2}w_n + 1\right) - 2 = \frac{1}{2}w_n - 1 = \frac{1}{2}(w_n - 2) = \frac{1}{2}u_n$$

Par définition, la suite (u_n) est bien géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

6. Pour tout entier naturel n , on a donc

$$u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

7. Pour tout entier naturel n , on a $u_n = w_n - 2$ soit $w_n = u_n + 2$ d'où :

$$w_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 = \frac{1}{2^{n-1}} + 2 = \frac{1 + 2^n}{2^{n-1}}$$

8. $w_{25} = \frac{1 + 2^{25}}{2^{24}} = \frac{33\,554\,433}{16\,777\,216}$.

▲

Chapitre 2

Second degré

D'un point de vue géométrique, les équations algébriques du premier degré correspondent à des problèmes d'intersection de droites ou de plans tandis que le second degré intervient naturellement dans le calcul d'aires.

D'un point de vue physique, les forces gravitationnelles étant inversement proportionnelles au carré de la distance, les trajectoires des planètes décrivent des courbes algébriques du deuxième degré, des ellipses.

■ Un mathématicien

Héron d'Alexandrie vécut au premier siècle de notre ère. Inventeur talentueux, il construisit de nombreuses machines mues par des mouvements de fluides. On lui doit aussi des découvertes en géométrie, en particulier sur des calculs d'aires et de volumes. Il a fourni en particulier la première méthode de calcul d'une racine carrée par la limite d'une suite et on lui doit la première formule de calcul des racines de certaines équations de second degré.

LE SAVIEZ-VOUS ?

On a retrouvé des tablettes d'argile babylonienne datant d'environ 2 000 ans avant Jésus-Christ sur lesquelles étaient résolues des équations du second degré. Plus près de nous, **Euclide** (300 av. J.-C.) a donné des résolutions géométriques de telles équations. Cependant, c'est un mathématicien arabe, **Al-Khwarizmi** qui fit le premier, au début du IX^e siècle, une étude exhaustive de la résolution des équations du second degré dans un ouvrage *Kitab al-jabr*. Ce fut la naissance de l'algèbre !

■ les incontournables

- Transformer un trinôme du second degré
 - ▶ pour obtenir sa forme canonique
 - ▶ pour le factoriser
- Résoudre des équations et des inéquations du second degré
 - ▶ en utilisant le discriminant
 - ▶ en établissant le signe d'un trinôme
- Démontrer
 - ▶ Cas général de résolution d'une équation du second degré

■ et plus si affinités

- Résoudre des équations polynomiales de degré supérieur
 - ▶ à l'aide d'une racine évidente
 - ▶ à l'aide d'une factorisation
- Utiliser la méthode de Héron pour l'approximation numérique des racines