

T^{le}

MATHS EXPERTES

Un tremplin vers le supérieur

- Rappels de cours
- Problèmes corrigés
- Anecdotes culturelles

Stéphane Poupon





MATHS EXPERTES

Un tremplin vers le supérieur

Stéphane Poupon



*À mon épouse, Marie-Noëlle, pour son soutien indéfectible.
À mes enfants, Léna, Marc et Claire, pour leur patience au quotidien.
Chacun, à sa façon, a cru en moi, et m'a invité à écrire ces pages.
Ce livre leur doit donc beaucoup.*

ISBN 9782340-116269

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Vous trouverez dans ce recueil divers thèmes permettant de réviser le programme de mathématiques expertes de terminale : nombres complexes, arithmétique, calculs matriciels...

Chaque thème est souvent précédé de brefs rappels de cours qui fournissent les éléments indispensables à connaître avant de commencer.

Les exercices retenus ont été proposés en devoir de recherche en classe et permettent de développer de nombreuses compétences. Ils apportent des éclairages scientifiques dans des contextes très différents. De nombreuses remarques culturelles situent ces contextes dans l'époque en présentant au passage quelques illustres mathématiciens...

Parmi ces exercices, certains sont bien entendu plus difficiles mais permettent de bien approfondir les notions du cours afin d'aborder les études supérieures dans de meilleures conditions.

Il faut toutefois garder à l'esprit qu'une simple lecture ne suffit pas, et qu'il faut porter une attention particulière aux énoncés puis prendre le temps de rechercher les réponses avant de lire les corrections proposées !

Achevons cet avant propos par une citation de Charles Caleb Colton :

*« L'étude des mathématiques est comme le Nil,
qui commence en modestie et finit en magnificence. »*

Bonne lecture et surtout savourez le plaisir de chercher... et de trouver !

Table des matières

Principes de logique et raisonnements	7
Chapitre 1 Forme algébrique des nombres complexes.....	11
1. Avant de commencer.....	11
2. Problèmes	16
A. Racines carrées d'un nombre complexe	16
B. Étude d'une application complexe.....	17
3. Corrigés des problèmes.....	18
Chapitre 2 Nombres complexes et applications géométriques.....	23
1. Problèmes	23
A. Un exercice classique	23
B. Complexes et géométrie, deuxième!.....	24
C. Complexes et géométrie, troisième!.....	25
2. Corrigés des problèmes.....	26
Chapitre 3 Arithmétique	35
1. Avant de commencer.....	35
2. Problèmes	38
A. Un petit exercice d'arithmétique	38
B. Recherche d'entiers désespérément	38
C. Simple et efficace	38
D. Une suite de multiples	39
3. Corrigés des problèmes.....	39
Chapitre 4 Calcul matriciel	45
1. Avant de commencer.....	47
2. Problèmes	50
A. Calcul des puissances d'une matrice carrée	50
B. Puissances d'une matrice carrée et applications.....	50
C. Une équation du type Pell-Fermat	52
D. Un système « proies-prédateurs » simplifié.....	54
E. Une suite de matrices « arithmético-géométrique »	56
F. Inverser une matrice 3×3	58
G. La suite de Fibonacci sous l'angle matriciel.....	59
3. Corrigés des problèmes.....	62
Chapitre 5 Problèmes diophantiens	87
1. Avant de commencer.....	87
2. Problèmes	90

A. Problème des pièces de monnaie de Frobenius	90
B. Un chiffrement affine	91
C. Le chiffre de Vigenère	93
D. Le chiffre de Hill	98
E. Problème des restes chinois	101
3. Corrigés des problèmes	102
Chapitre 6 Complexes et trigonométrie	119
1. Avant de commencer	119
2. Problèmes	124
A. Un exercice classique	124
B. Déterminer des valeurs trigonométriques	125
C. Un premier Q.C.M.	125
D. Un nombre irrationnel	127
E. Nombres complexes et pentagone régulier	128
F. Un deuxième Q.C.M.	130
G. Des complexes, des rotations et des matrices	132
H. Une spirale logarithmique	134
3. Corrigés des problèmes	135
Chapitre 7 Forme exponentielle des nombres complexes	163
1. Avant de commencer	163
2. Problèmes	165
A. Linéariser en vue du calcul intégral	165
B. Le noyau de Dirichlet	165
C. L'hendécagone régulier	167
3. Corrigés des problèmes	169
Chapitre 8 Autour des nombres premiers	179
1. Avant de commencer	179
2. Problèmes	183
A. Une preuve du petit théorème de Fermat	183
B. Les nombres de Fermat	185
C. Les nombres de Mersenne	187
D. La bataille de Hastings	189
E. Le « plein » de nombres premiers	190
3. Corrigés des problèmes	191
Chapitre 9 Graphes	207
1. Avant de commencer	207
2. Problèmes	214
A. Recherche d'une chaîne eulérienne	214
B. L'algorithme de Dijkstra	216
C. Étude d'une marche aléatoire à trois états	217
3. Corrigés des problèmes	218
Bibliographie et sitographie	228

Principes de logique et raisonnements

1. Propositions mathématiques

Définition :

Une proposition mathématique est un énoncé soit vrai, soit faux.

Exemples :

- « Si deux droites sont sécantes, alors elles sont perpendiculaires » est une proposition fausse.
- « Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 > 1$ » est une proposition fausse.
- « Si $x \geq 3$, alors $x + 2 \geq 5$ » est une proposition vraie.

Définitions : Soient P et Q deux propositions.

- On dit que P *implique* Q dans le cas où,
si P est vraie alors Q est vraie aussi ; on note alors $P \Rightarrow Q$.
- l'implication $Q \Rightarrow P$ est appelée *réiproque* de $P \Rightarrow Q$.
- On dit que P et Q sont *équivalentes*
lorsque P implique Q *et* Q implique P, on note alors $P \Leftrightarrow Q$.

Exemples :

- Soit ABC un triangle.

On note P la proposition « ABC est rectangle en A »

et Q la proposition « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».

On a $P \Rightarrow Q$ et cette implication est appelée théorème de Pythagore.

On a aussi $Q \Rightarrow P$, c'est la réciproque du théorème de Pythagore.

On a par conséquent : P et Q sont *équivalentes*, ce qui s'écrit $P \Leftrightarrow Q$.

C'est à dire ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

- Soient d et Δ deux droites.

On note P la proposition « d et Δ sont perpendiculaires »
et Q la proposition « d et Δ sont sécantes ».

On a $P \Rightarrow Q$ mais la réciproque, $Q \Rightarrow P$ est FAUSSE !

Les propositions P et Q ne sont donc pas équivalentes.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

On note P la proposition « $x^2 = 9$ » et Q la proposition « $x = 3$ ».

Les propositions P et Q ne sont donc pas équivalentes
(puisque -3 est aussi solution de l'équation $x^2 = 9$).

IL NE FAUT DONC PAS ECRIRE $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$.

☞ On retiendra que l'utilisation du symbole $\Leftrightarrow$ doit donc être réfléchie !

2. Quantificateurs

Définition :

Lorsqu'une proposition mathématique dépend d'un paramètre,
on peut utiliser deux types de quantificateurs :

– le quantificateur **universel** : « pour tout ».

« pour tout x » se note $\forall x$

– le quantificateur **existentiel** : « il existe ».

« il existe x » se note $\exists x$

Exemples :

- $\forall x, x^2 \geq 0$.

- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 9$.

3. Différents type de raisonnement

Raisonnement par déduction

Principe :

Le *raisonnement par déduction* est le raisonnement le plus courant. On part d'une hypothèse, on construit un raisonnement logique, puis on aboutit à la conclusion.

Raisonnement par utilisation d'un contre-exemple

Principe :

Pour démontrer qu'une proposition est fausse, il suffit souvent de trouver un cas particulier qui vient la contredire.

Ce cas particulier est appelé un *contre-exemple*.

Raisonnement par l'absurde

Principe :

Le *raisonnement par l'absurde* consiste, à partir d'une proposition, à aboutir à une contradiction, c'est à dire à une proposition du type Q et (non Q).

Ainsi, pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on mène le raisonnement suivant :

on suppose que P est fausse, on obtient une contradiction.

Par conséquent, P est nécessairement vraie.

Raisonnement par contraposée

Principe :

On s'intéresse à l'implication $P \text{ vraie} \Rightarrow Q \text{ vraie}$.

Ceci peut s'énoncer de manière équivalente : $Q \text{ fausse} \Rightarrow P \text{ fausse}$.

Ce dernier énoncé est appelé *contraposé* du premier énoncé.

☞ Il est très important de comprendre qu'une proposition et sa contraposée sont équivalentes.

Si une proposition est vraie, sa contraposée est vraie également.

ATTENTION, à ne pas confondre la réciproque et la contraposée.

Raisonnement par disjonction de cas

Principe :

Lorsque la démonstration d'une propriété dépend de la valeur de x , il est parfois utile de faire une **disjonction de cas** :

on teste alors toutes les valeurs que peut prendre x .

Par exemple : séparer les cas où x est pair des cas où x est impair, ou séparer les cas où x est positif des cas où il est strictement négatif.

Raisonnement par récurrence

Principe :

Le **raisonnement par récurrence** s'utilise lorsque l'on cherche à démontrer qu'une proposition est vraie pour tout entier naturel n à partir d'un entier naturel donné.

Le **raisonnement par récurrence** est un type de raisonnement qui s'appuie sur des principes logiques définis par le mathématicien italien Giuseppe PEANO qui en a posé les fondations vers 1888.

- Bien comprendre que la rédaction passe par trois phases : **initialisation, hérédité et conclusion**.
- L'hérédité est fondamentale : **on suppose** que la propriété est vraie pour **un** entier et on cherche à démontrer qu'alors cette propriété se « transmet » à l'entier suivant.
- La conclusion permet de globaliser :
initialisation + hérédité = propriété vraie **pour tous** les entiers.

Raisonnement par double inclusion

C'est un raisonnement qui consiste à prouver que deux ensembles sont « égaux ».

Principe : Soient E et F deux ensembles.

Pour prouver l'égalité $E = F$, on raisonne par **double inclusion** :

- Pour $e \in E$, on démontre $e \in F$, ce qui prouve l'inclusion $E \subset F$
- Pour $f \in F$, on démontre $f \in E$, ce qui prouve l'inclusion $F \subset E$

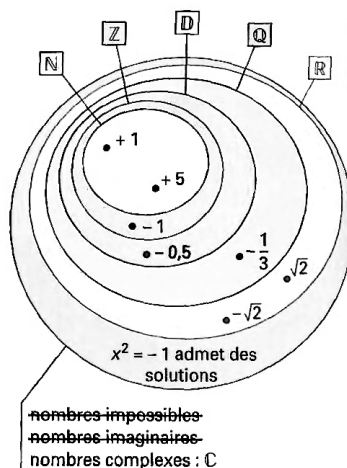
Remarque : on peut parfois raisonner directement par équivalence :
 $x \in E \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in F$.

Forme algébrique des nombres complexes

1. Avant de commencer

Au XVI^e siècle, les italiens Gerolamo Cardano, Niccolo Fontana et Scipione Del Ferro rivalisent pour résoudre les équations polynomiales de degré 3, dont une 1^{ère} preuve sera publiée en 1545. En 1560, Rafaele Bombelli montre que les formules de Cardano et Tartaglia ne s'appliquent pas car elles font intervenir la racine carrée d'un nombre négatif.

En 1572, il propose la notation « $\sqrt{-1}$ » pour lever ces problèmes. En 1777, le suisse Leonhard Euler introduit la notation i (comme imaginaire) pour apporter une rigueur manquante...



$\mathbb{C}$ est un ensemble contenant $\mathbb{R}$

ainsi qu'un nombre imaginaire noté i tel que $i^2 = -1$.

$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication.

Pour ces opérations, les règles de calcul (priorités, distributivité, ...) sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

1. Forme algébrique d'un nombre complexe :

Définitions :

Un nombre complexe peut toujours s'écrire sous la forme

$z = a + i b$, avec a et b réels.

Cette écriture est appelée *forme algébrique* du nombre complexe z .

Le réel a est appelé *partie réelle* de z , et noté $\text{Re}(z)$.

Le réel b est appelé *partie imaginaire* de z , et noté $\text{Im}(z)$.

Un complexe est *imaginaire pur* lorsque sa partie réelle est nulle.

Propriétés :

- $a + i b = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$.
- z est réel $\iff \text{Im}(z) = 0$.
- z est imaginaire pur $\iff \text{Re}(z) = 0$.
- $z = z' \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$

Remarque : 0 peut donc être considéré comme un nombre réel

et un imaginaire pur car $0 = 0 + i \times 0$.

2. Conjugué d'un nombre complexe :

Définition :

Soit $z = a + i b$, on définit le *conjugué* de z par $\bar{z} = a - i b$.

Remarque : $\overline{(\bar{z})} = z$

Propriétés :

- Soit $z = a + i b$ alors $z \bar{z} = a^2 + b^2$.
- $z + \bar{z} = 2 \text{Re}(z)$.
- $z - \bar{z} = 2 i \text{Im}(z)$.
- z est réel $\iff z = \bar{z}$.
- z est imaginaire pur $\iff z = -\bar{z}$.

Remarques :

Le nombre $z\bar{z}$ est un réel positif ou nul !

Il permet de définir l'inverse d'un nombre complexe non nul :

$$\text{En effet : } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Dans toute la suite, z et z' désignent deux nombres complexes.

Propriétés : Opérations et conjugaison

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ dont on déduit, (par récurrence) :
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ dont on déduit naturellement : $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$.

Résolution de l'équation générale de degré 2 à coefficients réels :**Théorème :**

Soit (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c **réels**, et $a \neq 0$.

Le discriminant de cette équation est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions **réelles** distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une solution **réelle** double :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ alors (E) admet deux solutions **complexes conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

3. Module et argument d'un nombre complexe



Remarque culturelle

Caspar Wessel (1745-1818), mathématicien danois et norvégien, sera le premier à interpréter les nombres complexes sous forme géométrique, en 1797.

C'est néanmoins le suisse Jean-Robert Argand qui proposera une représentation géométrique de ces nombres dans un essai publié en 1806.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

L'axe $(O; \vec{u})$ est *l'axe des réels*

et l'axe $(O; \vec{v})$ est *l'axe des imaginaires purs*.

A tout point M de coordonnées $(a; b)$ du plan, on associe le complexe z_M de **forme algébrique** $z = a + i b$.

Réciproquement, à tout complexe $z = a + i b$, on peut associer le point $M(z)$ de coordonnées $(a; b)$ du plan.

Dans ces conditions, on dit que z est *l'affixe* du point M et que M est *l'image* de z .

On a alors : $\overrightarrow{OM} = a \vec{u} + b \vec{v}$,

de sorte que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont également $(a; b)$.

Dans ces conditions, on dit aussi que z est *l'affixe* du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et on écrit $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M = a + i b$.

Propriétés :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- Soit I le milieu de $[AB]$ on a : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- $z_k \overrightarrow{w} = k z_{\overrightarrow{w}}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$.
- $z_{\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$.

Définitions :

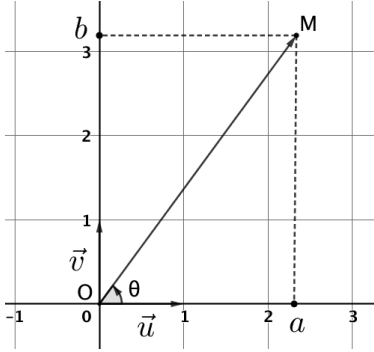
On appelle **module** de z , noté $|z|$, la distance OM .

Un **argument** du complexe non nul z , noté $\arg z$,

est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Si θ est une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$,

toute autre mesure sera de la forme $\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.



$$\text{Si } z = a + ib, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{et donc } |z|^2 = z \bar{z}.$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

$$\text{et } \sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

$$\text{Ainsi : } z = a + ib = \cos \theta \times |z| + i \sin \theta \times |z| = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Remarques :

$$|z| = 0 \text{ équivaut à } z = 0.$$

L'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ n'est défini qu'à condition que $z \neq 0$.

Propriétés :

- $z \in \mathbb{R}^* \iff \arg z \equiv 0 \pmod{\pi}$ et plus précisément :

$$\begin{cases} z \text{ réel strictement positif} \iff \arg z \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ z \text{ réel strictement négatif} \iff \arg z \equiv \pi \pmod{2\pi} \end{cases}$$

- z imaginaire pur non nul $\iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$
et plus précisément :

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(z) > 0 \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ \operatorname{Im}(z) < 0 \iff \arg z \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

2. Problèmes

A. Racines carrées d'un nombre complexe

On cherche à résoudre des équations du type $z^2 = a$, où $a \in \mathbb{C}$, c'est à dire à déterminer des « racines carrées » du complexe a .

On évitera d'utiliser la notation $\sqrt{a}$ lorsque a n'est pas réel, car la racine carrée n'est pas une fonction dans $\mathbb{C}$...

1. Dans cette question, on choisit $a = 9 + 40i$.
 - a. Vérifier que $z = 5 + 4i$ est une racine carrée de a .
 - b. $\overline{5 + 4i}$ est-il racine carrée de a ?
2. On se propose dans cette question de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 = -5 + 12i$.
A cet effet, on pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - a. Déterminer la valeur exacte du module de z .
 - b. Démontrer que si z est solution de (E) alors

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}.$$
 - c. Résoudre le système précédent.
(on pourra montrer que les deux premières équations conduisent à 4 couples solutions, la troisième équation permettant d'éliminer deux de ces couples...)
 - d. En déduire si z est solution de (E) alors :

$$\begin{cases} \text{soit } z = 2 + 3i \\ \text{soit } z = -2 - 3i \end{cases}.$$
 - e. Vérifier que les deux nombres complexes précédents sont effectivement solutions de l'équation (E).
3. En suivant la même démarche, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 = 16 - 30i$.



Remarque culturelle

Le symbole $\sqrt{}$ est parfaitement défini pour les réels positifs.

En effet, si x est un réel positif, il existe deux réels opposés dont le carré vaut x (un seul si x est nul).

Et parmi ces deux réels, l'un d'entre eux **seulement** est positif.

Celui-ci fait référence lorsque l'on parle de **la** racine carrée de x .

En ce qui concerne les complexes, la situation initiale est la même :

si z est un complexe, il existe deux complexes opposés dont le carré vaut z (un seul si z est nul).

Néanmoins, on ne peut pas privilégier l'un par rapport à l'autre !

Contrairement aux réels, parler de complexe positif n'a aucun sens...

B. Étude d'une application complexe

Dans ce problème, on s'intéresse à l'application f qui, au complexe $z \neq -i$, associe le complexe $f(z) = \frac{1+iz}{z+i}$.

Partie A

1. a. Déterminer les formes algébriques de $f(0)$, de $f(2)$ et de $f(-3)$.
 b. Vérifier que les résultats précédents sont de module égal à 1.
2. a. Déterminer la forme algébrique de $f(1-2i)$.
 b. Le résultat précédent est-il un complexe de module égal à 1 ?
3. Déterminer la forme algébrique du complexe a tel que $f(a) = 1-i$.
4. Un complexe z est **invariant** par l'application f lorsque $f(z) = z$.
 Déterminer les invariants de f .

Partie B

Soit k un nombre réel.

1. Montrer que $f(k) = \frac{2k}{k^2+1} + i \frac{k^2-1}{k^2+1}$.
2. En déduire que, quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $|f(k)| = 1$.
3. Dans un repère orthonormé du plan, on note $x_k = \frac{2k}{k^2+1}$, $y_k = \frac{k^2-1}{k^2+1}$
 et M_k le point de coordonnées $(x_k; y_k)$.
 Lorsque k décrit l'ensemble $\mathbb{R}$, les points M_k appartiennent
 à un ensemble géométrique particulier. Lequel ?

3. Corrigés des problèmes

A. Problème 1 : Racines carrées d'un nombre complexe

1. Dans cette question, on choisit $a = 9 + 40i$.

a. Vérifier que $z = 5 + 4i$ est une racine carrée de a .

On calcule : $(5 + 4i)^2 = 25 + 40i - 16 = 9 + 40i$.

$z = 5 + 4i$ est une racine carrée de a .

b. $\overline{5 + 4i}$ est-il racine carrée de a ?

$\overline{5 + 4i}^2 = \overline{(5 + 4i)^2} = \overline{9 + 40i} = 9 - 40i$.

$\overline{5 + 4i}$ n'est pas une racine carrée de a .

2. On se propose dans cette question de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 = -5 + 12i$.

A cet effet, on pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a. Déterminer la valeur exacte du module de z .

Commençons par calculer le module de z^2 .

$$|z^2| = |-5 + 12i| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13,$$

sans oublier que $|z^2| = |z|^2$.

On en déduit, puisque $|z|$ est un réel positif,

$$\text{que } |z| = \sqrt{13}.$$

b. Démontrer que si z est solution de (E) alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}.$$

Supposons que z soit solution de (E).

Alors $(x + iy)^2 = -5 + 12i$ d'où $x^2 - y^2 + 2ixy = -5 + 12i$.

En identifiant parties réelles et imaginaires, : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$

Comme de plus $|z|^2 = 13$, on en déduit $x^2 + y^2 = 13$.

Et par conséquent : si z est solution de (E) alors $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}.$

c. Résoudre le système précédent.

En additionnant les deux premières équations du système précédent,

on a $2x^2 = 8$ soit $x^2 = 4$ et donc $x = 2$ ou $x = -2$.

On en déduit aisément que $y^2 = 9$ et donc que $y = 3$ ou $y = -3$.

les deux premières équations conduisent ainsi à 4 couples solutions : $(2; 3)$, $(2; -3)$, $(-2; 3)$ et $(-2; -3)$.

La dernière équation impose à x et y d'être de même signe, puisque leur produit est positif.

On en déduit que seuls deux couples sont solutions du système : $(2; 3)$ et $(-2; -3)$.

d. En déduire si z est solution de (E) alors $\begin{cases} \text{soit } z = 2 + 3i \\ \text{soit } z = -2 - 3i \end{cases}$.

C'est une simple traduction du résultat précédent puisque, par exemple, lorsque $x = 2$ et $y = 3$, cela signifie que le complexe $2 + 3i$ est solution...

e. Vérifier que les deux nombres complexes précédents sont effectivement solutions de l'équation (E) .

Simple vérification : $(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$

et aussi $(-2 - 3i)^2 = -5 + 12i$

3. En suivant la même démarche que précédemment, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 = 16 - 30i$.

$$(x + iy)^2 = 16 - 30i \text{ d'où } x^2 - y^2 + 2ixy = 16 - 30i.$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on a donc : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ xy = -15 \end{cases}$

$$\text{De plus } |z^2| = |16 - 30i| = \sqrt{16^2 + (-30)^2} = \sqrt{1156} = 34.$$

$$\text{d'où } |z|^2 = x^2 + y^2 = 34.$$

Si z est solution de $z^2 = 16 - 30i$ alors $\begin{cases} x^2 - y^2 = -16 \\ x^2 + y^2 = 34 \\ xy = -15 \end{cases}$.

Ce système se résout de la même manière que précédemment.

On obtient également deux couples solutions : $(5; -3)$ et $(-5; 3)$.

$z^2 = 16 - 30i$ admet deux solutions : $5 - 3i$ et $-5 + 3i$.

B. Problème 2 : Étude d'une application complexe**Partie A**

1. a. Déterminer les formes algébriques de $f(0)$, de $f(2)$ et de $f(-3)$.

On trouve facilement : $f(0) = -i$, $f(2) = \frac{4+3i}{5}$ et $f(-3) = \frac{-3+4i}{5}$.

- b. Vérifier que les trois résultats précédents sont des complexes de module égal à 1.

Vérification simple...

2. a. Déterminer la forme algébrique de $f(1-2i)$.

$$f(1-2i) = \frac{1+i(1-2i)}{1-2i+i} = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i.$$

- b. Le résultat précédent est-il un complexe de module égal à 1 ?

$$|1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}.$$

$1+2i$ n'est pas un complexe de module 1.

3. Déterminer la forme algébrique du complexe a tel que $f(a) = 1-i$.

On résout l'équation $f(a) = 1-i$.

$$\begin{aligned} f(a) = 1-i &\iff \frac{1+ia}{a+i} = 1-i \\ &\iff 1+ia = (a+i)(1-i) \\ &\iff 1+ia = a-i a+i+1 \\ &\iff a(2i-1) = i \\ &\iff a = \frac{i}{2i-1} \\ &\iff a = \frac{i(-2i-1)}{(-1)^2+2^2} \\ &\iff a = \frac{2-i}{5} \end{aligned}$$

La forme algébrique du complexe a tel que $f(a) = 1-i$ est $\frac{2-i}{5}$.

4. Déterminer les invariants de f .

On résout l'équation $f(z) = z$.

$$\begin{aligned}
 f(z) = z &\iff \frac{1+iz}{z+i} = z \\
 &\iff 1+iz = (z+i)z \\
 &\iff 1+iz = z^2 + iz \\
 &\iff z^2 = 1 \\
 &\iff z = 1 \text{ ou } z = -1
 \end{aligned}$$

Les invariants de l'application f sont 1 et -1 .

Partie B

Soit k un nombre réel.

1. Montrer que $f(k) = \frac{2k}{k^2+1} + i \frac{k^2-1}{k^2+1}$.

$$f(k) = \frac{1+ik}{k+i} = \frac{(1+ik)(k-i)}{k^2+1} = \frac{2k}{k^2+1} + i \frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

2. En déduire que, quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $|f(k)| = 1$.

$$\text{En effet : } |f(k)| = \left| \frac{1+ik}{k+i} \right| = \frac{|1+ik|}{|k+i|} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

(en utilisant les propriétés sur les calculs de modules).

$$\begin{aligned}
 \text{Ou } |f(k)| &= \left| \frac{2k}{k^2+1} + i \frac{k^2-1}{k^2+1} \right| \\
 &= \sqrt{\left(\frac{2k}{k^2+1} \right)^2 + \left(\frac{k^2-1}{k^2+1} \right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{4k^2 + k^4 - 2k^2 + 1}{(k^2+1)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(k^2+1)^2}{(k^2+1)^2}} = 1.
 \end{aligned}$$

Ainsi tout réel k a une image par f dont le module vaut 1.

(Ce qui est cohérent avec la première question de la partie A.)

3. Dans un repère orthonormé du plan,

on note $x_k = \frac{2k}{k^2 + 1}$, $y_k = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$
 et M_k le point de coordonnées $(x_k; y_k)$.

Lorsque k décrit l'ensemble $\mathbb{R}$, les points M_k appartiennent à un ensemble géométrique particulier. Lequel ?

D'après la question précédente : $|f(k)|^2 = x_k^2 + y_k^2 = 1$.

Ceci correspond à l'équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon 1.

Lorsque k décrit l'ensemble $\mathbb{R}$, les points M_k appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.