

Christophe Daudin

2^{de}

1^{re}

T^{le}

LA LOGIQUE pour assurer en **MATHS** jusqu'au **Bac**



- ▶ Gagner en rigueur et en précision
- ▶ Devenir pro des raisonnements
- ▶ Comprendre les déductions mathématiques



LA **LOGIQUE** pour assurer
en **MATHS** jusqu'au **Bac**

LA **LOGIQUE** pour assurer en **MATHS** jusqu'au **Bac**

Christophe Daudin



ISBN 9782340-116252

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

« 100 % des gagnants ont tenté leur chance » était un célèbre slogan publicitaire du Loto dans les années 1990.

La véracité de cette affirmation est indiscutable mais laisse une impression de tromperie. En effet, il aurait été moins vendeur de révéler que si un joueur tentait sa chance, il avait environ une chance sur 14 millions de gagner le gros lot¹.

En juin 2024, à propos des élections législatives en France, un article de l'hebdomadaire le Nouvel Obs sous-titrait : « Il faut réunir la moitié des suffrages exprimés pour être élu député, condition nécessaire, mais pas suffisante. »

Condition nécessaire, condition suffisante, sont deux termes mathématiques souvent employés dans la presse écrite ou audiovisuelle. Que signifient-ils exactement ? Pourquoi le slogan du loto est-il efficace mais trompeur ?

Ces deux exemples nous montrent que la logique en mathématiques nous donne des clés de compréhension du discours argumentatif dans la vie courante, et constitue un outil important pour développer un esprit critique, y compris en dehors des domaines scientifiques.

C'est une des raisons qui nous ont convaincus que les mathématiques et les sciences en général, jusqu'à un certain niveau bien sûr, devraient être considérées comme faisant partie de la culture générale au même titre que les sciences humaines.

En mathématiques, démêler le vrai du faux est plus simple que dans la vie citoyenne. Pour l'essentiel, les mécanismes de déduction font consensus depuis des siècles, même dans des domaines très spécialisés. Ils permettent de produire des démonstrations vérifiables par les pairs. Les mathématiques proposent donc un très bon terrain de jeu pour s'exercer et progresser dans la pratique du discours argumentatif ainsi que dans la compréhension et l'utilisation rigoureuse des règles de la logique.

1 Le nombre de combinaisons possibles de 6 numéros différents choisis parmi 49 est égal à 13 983 816, pour une grille suivant les règles du jeu de cette époque.

Enfin, comme nous l'expliquerons en introduction, une bonne connaissance de la logique facilite les apprentissages mathématiques et la compréhension des subtilités de certaines démonstrations ou résolutions d'équations (qui sont aussi des démonstrations) et cela, jusqu'au bac et au-delà.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Florence Calmels, Laëtitia Lespinat, Nadège Stupar et Serge Dubois pour leur relecture minutieuse et leurs suggestions avisées, Luc pour son idée de cercle logique et Cathy pour sa patience.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	5
Chapitre 1 Proposition – Contre-exemple	9
1.1. Proposition – Propriété.....	10
1.2. Propositions avec quantificateur	13
1.3. Contre-exemple.....	16
1.4. Corrigés des exercices	17
Chapitre 2 Implications et équivalences	21
2.1. Implication.....	21
2.2. Équivalence.....	30
2.3. Négation d'une proposition	35
2.4. Implication contraposée	40
2.5. Corrigés des exercices	42
Chapitre 3 ET et OU	55
3.1. Le ET et le OU logiques	55
3.2. Utilisation du ET et du OU.....	60
3.3. Logique et langage des ensembles.....	63
3.4. Corrigés des exercices.....	64
Chapitre 4 Tables de vérités – Et la lumière fut !	67
4.1. Table de la négation.....	68
4.2. Tables du ET et du OU.....	69
4.3. Tables de l'implication et de l'équivalence.....	71
4.4. Corrigés des exercices	74
Chapitre 5 Quelques types de raisonnement rencontrés au lycée	79
5.1. Implication ou équivalence ?.....	79
5.2. Résolution d'équation et d'inéquation.....	86
5.3. Raisonnement par analyse-synthèse	94
5.4. Raisonnement par contraposée.....	100
5.5. Raisonnement par l'absurde	102
5.6. Raisonnement par disjonction de cas.....	106

5.7. Raisonnement par récurrence	110
5.8. Corrigés des exercices	115
Chapitre 6 Pour aller plus loin.....	129
6.1. Brève histoire de la logique.....	129
6.2. Qu'est-ce qu'une théorie axiomatique ?	134
6.3. Histoires de menteurs	143
6.4. Corrigés des exercices	145
6.5. Épilogue.....	150
 Bibliographie.....	 151
Glossaire	155

La logique est l'un des domaines fondamentaux des mathématiques, comme l'arithmétique ou la théorie des ensembles.

Le mot « logique » vient du grec « logos » qui peut être traduit par « discours rationnel ».

Le terme « logique mathématique » désigne la discipline née au 19^e siècle qui étudie les mathématiques en tant que langage.

Mais c'est aussi une appellation courante pour nommer l'ensemble des définitions et propriétés qui sont à la base des notions et mécanismes déductifs que l'on retrouve dans tout texte mathématique, dès le collège, et qui sont l'objet de cet ouvrage.

La logique est la grammaire du raisonnement mathématique, en quelque sorte. Maîtriser ces notions et règles constitue donc un enjeu important pour la poursuite d'études au lycée et dans le supérieur.

Les concepteurs des programmes officiels en sont conscients puisqu'au lycée général ou technologique, la logique fait partie intégrante des programmes de mathématiques.

Dès la seconde par exemple, le programme contient le paragraphe suivant.

« Les élèves apprennent *en situation* à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle [...]. »

Toutefois on peut souligner la phrase « les élèves apprennent en situation » et remarquer qu'il est précisé que « l'apprentissage des

notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. »

Mais même une approche transversale nécessite de dédier un ou des moments significatifs, en classe, pour construire et consolider l'apprentissage des notions et mécanismes de la logique, utilisés tous les jours dans le cours de mathématiques. Faute de quoi, les termes cités par les programmes (quantificateur universel, implication, condition nécessaire, etc.) restent flous pour une majorité d'élèves et cela fait obstacle à une bonne compréhension de certains types de raisonnement, comme le raisonnement par récurrence par exemple.

Malheureusement, les programmes sont denses et il est rare qu'un professeur consacre une ou deux heures "hors série" à la logique. Notre expérience nous a montré que des séances à la veille de vacances scolaires sont propices à ces apprentissages, sans qu'il soit indispensable de les faire suivre d'une évaluation ciblée. Elles peuvent prendre la forme d'exercices portant spécifiquement sur la logique, suivis d'une courte synthèse sur les notions abordées. Ce sont des types d'activité que nous proposons dans ce texte.

Le but de cet ouvrage est donc d'explicitier les notions et règles de la logique en mathématiques mentionnées dans les programmes officiels de lycée, avec le plus de rigueur et de précision possible mais sans entrer dans le formalisme d'une axiomatisation ou du calcul propositionnel. Ce choix impose quelques approximations, mais permet de conserver un propos accessible à tout lycéen. Des exercices aideront le lecteur à s'approprier les concepts et les mécanismes en jeu dans la logique. Nous conseillons de les faire au fur et à mesure du texte. Nous nous autoriserons quelques incursions hors mathématiques, dans des raisonnements de la vie courante. Ces exemples donnent souvent un éclairage différent sur les notions abordées.

Ce texte se place globalement au niveau lycée et s'adresse :

- aux élèves de lycée, en particulier à ceux de spécialité mathématiques de première et terminale générale ;
- aux élèves de fin de collège souhaitant préciser certaines notions de logique qu'ils ont déjà rencontrées ;
- aux professeurs ou futurs professeurs de mathématiques ou de sciences de l'enseignement secondaire ;

- à toute personne ayant quelques souvenirs des mathématiques de collège et de lycée et désireuse d'approfondir ses connaissances en logique mathématique.

Le vocabulaire utilisé est celui spécifié dans les programmes officiels français de l'enseignement secondaire et en usage dans les établissements et manuels de ce niveau. Nous signalons les différences qui peuvent exister entre les termes de logique utilisés dans le secondaire et leurs équivalents en usage dans le supérieur ou la recherche.

Nous tentons d'être aussi rigoureux que possible mais n'exposons pas de démonstrations des "règles" de la logique. Une construction rigoureuse de la théorie de la logique mathématique sort du champ de ce livre. La bibliographie propose des pistes d'approfondissement pour les lectrices et lecteurs qui seraient restés sur leur faim.

En fin d'ouvrage, un glossaire récapitule les principaux termes employés.

Les exercices marqués :

- d'un soleil (☀) contiennent des éléments de programme de niveau spécialité mathématiques de première au maximum ;
- de deux soleils (☀☀) contiennent des éléments de programme de spécialité mathématiques de terminale ;
- de trois soleils (☀☀☀) contiennent des éléments de programme de mathématiques expertes (terminale).

Les exercices sans marques contiennent des éléments de programme de niveau de seconde au maximum.

Il s'agit de niveaux de programme et non de niveaux de difficulté.

Proposition – Contre-exemple

Exemple 1.1

« Les pommiers sont en fleurs, c'est le printemps ! »

Exemple 1.2

« Si le quadrilatère MNOP est un losange, alors ses diagonales [MO] et [NP] sont perpendiculaires. »

Existe-t-il un lien entre ces deux exemples ? À première vue, cela ne semble pas évident.

Pourtant, dans le cadre de la logique mathématique, on peut observer que le premier exemple, tiré de la vie courante, est de même nature que le deuxième.

Réécrivons ce premier exemple sous la forme « si ... alors ... » ou « puisque... alors ... ».

On obtient : « Puisque les pommiers sont en fleurs, alors c'est le printemps. »

Ces deux exemples sont appelés « implications » en logique.

Observons que chacune d'elles est constituée de deux parties, l'une précédée par « si » et l'autre par « alors ». Chacune de ces parties est appelée « proposition ».

Commençons par définir cette notion.

1.1. Proposition – Propriété

Définition 1.1 – Proposition

En logique mathématique, on appelle proposition tout groupe de mots contenant au minimum un sujet, un verbe conjugué au présent de l'indicatif et éventuellement un complément, sous forme affirmative ou négative.

Pour la logique, cette phrase doit :

- a. avoir une signification mathématique ;
- b. être soit vraie, soit fausse (mais pas les deux en même temps), même si l'on n'est pas toujours capable de prouver si l'on se trouve dans le premier cas ou le second.

On dit que « Vrai » et « Faux » sont les deux valeurs de vérité possible pour une proposition.

Remarques 1.1

- Dans la littérature mathématique, le terme « énoncé » est également utilisé pour désigner une proposition logique. Ce mot n'a pas été retenu dans les programmes officiels de lycée, peut-être à cause de la confusion possible avec un énoncé d'exercice.
- On peut citer comme autres synonymes de « proposition » les mots « assertion » et « affirmation ».
- Les propositions peuvent contenir des symboles mathématiques qui remplacent des termes ou des groupes de mots.

Par exemple, « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » est bien une proposition. Elle peut se traduire en "français mathématique" par : pour tout nombre réel x , le carré de x est supérieur ou égal à 0.

Exemples 1.3

- a. « Le triangle ABC converge » n'est pas une proposition.

La phrase contient un sujet et un verbe, qui sont des termes mathématiques, sa syntaxe est correcte. Elle possède une certaine poésie, mais n'a pas de signification mathématique, à moins de définir au préalable une nouvelle notion, celle de triangle convergent.

- b. « Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux² » est une proposition.
Les spécialistes de la théorie des nombres pensent majoritairement que cette proposition est vraie, mais elle n'a pas encore été prouvée. C'est ce que l'on appelle une conjecture et dans ce cas précis, la célèbre conjecture des nombres premiers jumeaux. Elle deviendra un théorème si elle est démontrée.
- c. On considère un entier relatif n . « $2n^2 - 4n + 5$ est un nombre premier » n'est pas une proposition, car la valeur de vérité de cette phrase dépend de la valeur de n .
- d. « Il existe un entier relatif n tel que $2n^2 - 4n + 5$ est un nombre premier » est une proposition.
Elle a une signification mathématique et la valeur $n = 0$ prouve qu'elle est vraie.
- e. « Pour tout entier relatif n , $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 » est une proposition.
Elle a une signification mathématique et dans le cadre des programmes de la seconde ou de mathématiques expertes, on peut démontrer qu'elle est vraie.
Il s'agit donc d'une propriété.
- f. « $\sqrt{2}$ est-il un nombre rationnel ? » n'est pas une proposition car est à la forme interrogative.
- g. « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est une proposition, bien qu'elle soit fausse (programme de seconde).

Définition 1.2 – Propriété, théorème

Toute proposition que l'on sait vraie, ou qui peut être démontrée comme vraie, sera appelée « propriété » ou « théorème ». Nous revenons sur ces termes dans le glossaire en fin d'ouvrage.

2 On appelle nombres premiers jumeaux deux nombres impairs consécutifs et premiers. Exemples : 3 et 5 sont premiers jumeaux, mais 7 et 9 ne le sont pas car 9 n'est pas premier, ni 13 et 17 car ce ne sont pas des nombres impairs consécutifs.

Exercice 1.1

Déterminer si les textes suivants sont des propositions de logique mathématique.

- a. Le triangle PIC est isocèle en P.
- b. Le cercle C de centre O et de rayon 1,5.
- c. Si un triangle THA est rectangle en H, alors $TA^2 = TH^2 + HA^2$.
- d. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- e. Les carottes sont cuites.
- f. Les entiers naturels sont positifs.
- g. Tous les entiers impairs sont-ils divisibles par 3 ?
- h. Les sanglots longs des violons de l'automne.
- i. $3x^2 - x + 1$.
- j. $0,5x^2 + x + 0,4 \geq 0$, où x est un nombre réel.
- k. Il existe un nombre réel x tel que : $0,5x^2 + x + 0,4 \geq 0$.
- l. Pour tout nombre réel x : $0,5x^2 + x + 0,4 \geq 0$.

Remarque 1.2 – Un autre usage du terme « proposition »

Au-delà du lycée, la communauté mathématique utilise parfois le terme « proposition » pour désigner une propriété ou un théorème. Ce qui peut prêter à confusion.

Dans cet ouvrage, nous nous en tiendrons aux programmes officiels et aux usages en vigueur au collège et au lycée. Toute proposition vraie sera appelée propriété ou théorème.

1.2. Propositions avec quantificateur

Dans les exemples précédents, nous avons rencontré des propositions qui mettent en jeu des constantes ou des variables. Ces deux mots, constantes et variables, désignent ici des objets mathématiques de types divers tels que des nombres, des points, des droites, des vecteurs, des fonctions, des ensembles, etc. Chaque constante possède une valeur unique, alors qu'une variable peut prendre plusieurs valeurs et est souvent notée à l'aide d'une lettre.

Dans l'exemple « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel », $\sqrt{2}$ est une constante.

Alors que dans : « pour tout nombre réel x , $0,5x^2 + x + 0,4 \geq 0$ », x est une variable.

Pour que des propositions contenant une ou plusieurs variables aient une valeur de vérité (Vrai ou Faux), elles doivent débiter par un quantificateur. Il en existe de deux types : universel ou existentiel.

Avant de les définir, nous avons besoin d'introduire une proposition un peu particulière, le prédicat.

Définition 1.3 – Prédicat

Une proposition sans quantificateur explicite ou implicite et dont la valeur de vérité dépend d'une ou plusieurs variables, n'est pas vraiment une proposition. En effet, elle peut être vraie ou fausse selon les valeurs de la variable. On l'appelle un prédicat.

Ce terme n'étant pas au programme du lycée, nous le remplacerons si besoin par « proposition », par abus de langage. Cela est sans conséquence sur la bonne compréhension du contenu de cet ouvrage.

Exemple 1.4

« $2x + 1 = 0,5x - 8$ » est un prédicat.

Sa valeur de vérité dépend de la valeur de la variable x . Ici, ce prédicat est faux pour tous les réels x , sauf un.

D'une façon générale, les équations et inéquations sont des prédicats dont les variables sont les inconnues ou des paramètres (rare au lycée).

Définition 1.4 – Quantificateur universel

Certaines propositions commencent par « pour tout » ou « pour tous » ou « quel que soit ».

« Pour tout » est appelé quantificateur universel et peut être remplacé par le symbole $\forall$, qui est un A à l'envers comme dans l'anglais « All ».

Le quantificateur est suivi du nom d'une (ou plusieurs) variable, du verbe conjugué « appartient » et d'un ensemble dans lequel la variable prend ses valeurs. La partie quantification est suivie d'une proposition dont la valeur de vérité dépend de la variable (il s'agit donc en réalité d'un prédicat).

Exemple 1.5

La proposition P « les entiers naturels sont positifs » peut s'écrire :

« $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ », où le symbole $\in$ se lit « appartient » et $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

« $\forall n \in \mathbb{N}$ » est la quantification, suivie de la proposition $Q(n)$, « $n \geq 0$ ».

Le tout forme la proposition P, qui est vraie si $Q(n)$ est vraie pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$ et qui est fausse s'il existe au moins un contre-exemple, un entier naturel $n < 0$ (ce qui n'est pas le cas ici, bien sûr).

Remarque 1.3 – Quantificateur aucun

Le pronom « aucun » est également un quantificateur universel, plus rarement employé en mathématiques.

Par exemple, la proposition « tous les entiers naturels sont positifs » peut être remplacée par la proposition : « aucun entier naturel n'est strictement négatif ».

On peut aussi écrire : « il n'existe pas d'entier naturel strictement négatif », avec la même signification.

Définition 1.5 – Proposition universelle

Dans le cadre de cet ouvrage, nous appelons « proposition universelle » toute proposition qui débute par un quantificateur universel.

Exercice 1.2

Les propositions suivantes sont des propositions universelles dans lesquelles le quantificateur est implicite.

Les réécrire à l'aide d'un quantificateur universel.

- Les opposés des nombres positifs sont négatifs.
- Dans le plan (ou dans l'espace), deux points sont toujours alignés.
- Si x est un nombre réel tel que $x < 0$, alors $\sqrt{x^2} = -x$.

Définition 1.6 – Quantificateur existentiel

Certaines propositions commencent par « il existe ».

« Il existe » est appelé quantificateur existentiel. Il peut être remplacé par le symbole $\exists$ (lettre E à l'envers).

Comme le quantificateur universel, le quantificateur existentiel est suivi du nom d'une ou plusieurs variables, du verbe conjugué « appartient » et d'un ensemble dans lequel la variable prend ses valeurs.

Exemple 1.6

« $\exists x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0,5x - 8$ » est une proposition.

Question facultative : cette proposition est-elle vraie ou fausse ?

Exemple 1.7

Considérons deux nombres entiers non nuls a et b et $\mathcal{D}$ l'ensemble de leurs diviseurs communs.

La proposition « il existe un diviseur commun à a et b plus grand que tous les autres » peut s'écrire « $\exists d \in \mathcal{D}, \forall c \in \mathcal{D}, d \geq c$ »³.

Sans les symboles, elle se lit : « il existe un entier d de l'ensemble $\mathcal{D}$ tel que, pour tout entier c de l'ensemble $\mathcal{D}$, $d \geq c$ ».

Remarque 1.4 – Attention à l'ordre des quantificateurs

L'exemple précédent contient un quantificateur existentiel suivi d'un quantificateur universel. Que se passe-t-il si on les permute ?

Cela donne : « $\forall c \in \mathcal{D}, \exists d \in \mathcal{D}, d \geq c$ ».

La signification mathématique de la proposition a complètement changé.

Sans les symboles, elle se lit : « pour tout entier c de l'ensemble $\mathcal{D}$, il existe un entier d de l'ensemble $\mathcal{D}$ tel que $d \geq c$ ».

Ici, la valeur de l'entier d dépend de celle de c alors que dans la première proposition, la valeur de d est la même pour tous les entiers c de l'ensemble $\mathcal{D}$.

Cette deuxième proposition est vraie (il suffit de prendre $d = c$), mais n'a aucun intérêt mathématique.

Définition 1.7 – Proposition existentielle

Dans le cadre de cet ouvrage, nous appelons « proposition existentielle » toute proposition qui débute par un quantificateur existentiel.

3 Cette propriété mène à la définition du pgcd de a et b .

1.3. Contre-exemple

Définition 1.8 – Contre-exemple

Pour démontrer qu'une proposition débutant par un quantificateur universel est fausse, il suffit de citer un cas pour lequel elle est fausse. Un tel cas est appelé un contre-exemple de la proposition.

Par exemple la proposition « Tous les entiers impairs sont divisibles par 3 », est fausse car 5 est un entier impair et n'est pas divisible par 3.

Le nombre 5 est un contre-exemple de cette proposition.

Remarque 1.5

Dans l'exemple précédent, on peut observer que la proposition « Tous les entiers impairs sont divisibles par 3 » est fausse, non pas parce que « aucun entier impair n'est divisible par 3 », mais car « il existe au moins un entier impair non divisible par 3 ».

Nous en reparlerons dans la section « 2.3 La négation en logique mathématique », page 35.

Exercice 1.3

Déterminer si les propositions mathématiques suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

- Les entiers naturels sont positifs.
- Tous les entiers qui se terminent par 4 sont divisibles par 4.
- Pour tout entier relatif n , si n est pair, alors n^2 est divisible par 4.
- Pour tout nombre réel x : $0,5x^2+x+0,4 \geq 0$.