# PSI
# PSI*

**Lionel Vidal**
Christophe Bernicot
Régis Bourdin
Ludovic Menguy
Vincent Parmentier
Alban Sauret
Nicolas Tancrez
Marc Venturi

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

# PHYSIQUE

- Méthodologie et objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Résolutions de problèmes, activités numériques
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Exercices-type oraux
- Corrigés détaillés et commentés

5e édition

ellipses

# Physique
# PSI/PSI*

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

# Physique PSI/PSI*

## 5e édition

ouvrage coordonné par

Lionel VIDAL
*Professeur au lycée Champollion (Grenoble)*

Christophe BERNICOT
*Professeur au lycée Dupuy de Lôme (Lorient)*

Régis BOURDIN
*Professeur au lycée Sainte-Marie (Caen)*

Ludovic MENGUY
*Professeur au lycée Montesquieu (Le Mans)*

Vincent PARMENTIER
*Professeur au lycée Pothier (Orléans)*

Alban SAURET
*Professeur à l'université de Californie (Santa Barbara, États-Unis)*

Nicolas TANCREZ
*Professeur au lycée Saint-Louis (Paris)*

Marc VENTURI
*Professeur au lycée Kléber (Strasbourg)*

Avec la contribution de

François-Xavier COQ
*Professeur au lycée Pothier (Orléans)*

Vincent FRATICELLI
*Professeur au lycée Pothier (Orléans)*

Jean-Lou REYNIER
*Professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)*

ellipses

COLLECTION
**PRÉPAS SCIENCES**

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

*Les notices culturelles « un scientifique » et « un peu d'histoire »*
*des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.*

*Un grand merci à Frédéric Barbosa pour sa relecture attentive.*

ISBN 9782340-116214

Dépôt légal : juillet 2026



www.editions-ellipses.fr

# Avant-propos

**Réussir en classes préparatoires** nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

**Le résumé de cours** est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

**La partie « méthodes »** vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

**La partie « vrai/faux »** permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

**Les exercices** sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Du nouveau dans cette édition :

- Une **note méthodologique** « Conseils pour les concours et utilisation du livre » en début d'ouvrage, vous aide à bien préparer les concours et les aborder dans les meilleures conditions.
- Dans chaque chapitre des **exercices, particulièrement adaptés aux épreuves orales**, repérés par un micro, vous entraînent à affronter avec succès les oraux.

Ainsi l'ouvrage de physique comme ceux de chimie, de maths et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

# Sommaire

# Conseils pour les concours et utilisation du livre

**La réussite aux concours** repose essentiellement sur l'appropriation des notions du programme consistant en un corpus de savoirs et savoir-faire. Le travail régulier est une clef essentielle à la réussite et le temps que vous y consacrez doit être utilisé efficacement pour produire les résultats attendus. Mais qu'entend-on par travail efficace ? Les conseils que vous trouverez dans le livre visent à vous donner les bases nécessaires pour vous construire votre méthode de travail, celle qui, adaptée à vos spécificités produira les meilleurs résultats.

Il est important de prendre conscience que les écrits et les oraux des concours demandent chacun une préparation spécifique de façon à **répondre aux attentes des jurys**. Ainsi, vous trouverez ci-après dans **« Conseils pour la préparation des écrits »** des **indications spécifiques** aux **écrits** (qui prévalent aussi en cours d'année pour les devoirs surveillés) ainsi qu'aux **oraux** (aussi utiles pour la préparation des colles).

Les conseils visant à la mise en place des qualités plus spécifiques aux oraux sont présentés dans « **Conseils pour la préparation des oraux** ». Il s'agit de vous donner les pistes nécessaires pour **compléter le travail de révision des écrits afin de répondre efficacement aux spécificités de l'épreuve orale**.

Certaines des qualités à développer pour la préparation des écrits sont aussi utiles aux oraux, les conseils qui s'y reportent sont consignés dans la partie **« Conseils pour la préparation des écrits »**.

## Conseils pour la préparation des écrits

Les sujets de concours sont généralement construits de façon progressive et visent à tester un ensemble de connaissances et de compétences ainsi que des qualités d'initiatives. **La maitrise** des fondamentaux du cours est le point le plus important pour les aborder sereinement. En effet, le **travail du cours** vise à développer la **capacité de transposition des savoirs et savoir-faire hors du contexte de premier apprentissage**. Cet apprentissage repose sur une démarche d'**appropriation** et de mise en relation d'éléments cognitifs connexes qui à terme donne accès à la capacité de **reformulation d'un énoncé en un cheminement logique qui vous fait sens**. Cette capacité est aussi utile pour s'approprier un sujet d'oral. C'est souvent ce point qui est **mis en défaut lorsque vous « ne voyez pas comment partir** ».

**Le résumé de cours** en début de chaque chapitre vous permettra de vérifier que vous n'avez rien laissé de côté.
Chaque élément **du cours** susceptible d'être « caché » derrière une question d'écrit ou d'oral renvoie **à une méthode** qui a pour objectif de vous aider à ancrer un ensemble de « micro-compétences » dont chacune est souvent présente dans les barèmes des jurys de concours. En effet, ces derniers s'attachent à évaluer, non pas un résultat, mais plutôt votre capacité à produire une démarche rigoureuse, s'appuyant sur toutes les hypothèses de modélisation utiles qui, reprises dans les étapes importantes du raisonnement, conduisent au résultat recherché. La bonne prise en compte de cette spécificité d'évaluation est une des conditions de votre réussite.
Un ensemble **d'exercices en rapport avec chaque méthode** a été formulé pour répondre spécifiquement à cet objectif. La correction est rédigée de façon détaillée et commentée. Chaque exercice comporte des **indications qui peuvent être ignorées** suivant le niveau de chacun. Les solutions sont rédigées et commentées de façon à ne rien cacher des étapes d'un raisonnement et font le **lien avec les fondamentaux du cours et des méthodes**.

Ces exercices sont précédés d'un ensemble de **vrai/faux** choisis pour vous permettre de **tester votre sens physique et votre recul**.
Les rapports de jury des épreuves (d'écrit comme d'oral) sont riches en enseignement et pointent en particulier **les erreurs récurrentes** faites par les candidat(es). Une sélection des erreurs les plus fréquentes accompagne chaque chapitre et vous permettra, en analysant l'erreur, non seulement de ne pas la refaire mais surtout d'affiner votre compréhension des objets et concepts physiques associés.

### Conseils pour la préparation des oraux

Les **exercices les plus specifiques à la préparation des oraux** sont repérés par l'icône . Ces exercices sont selectionnés soigneusement pour leur portée et sont souvent proposés afin de vous guider dans la démarche.
Certains exercices ou parties d'**exercices demandant plus d'initiative** sont repérés par un liseré gris encadrant le texte.
Les oraux de concours bien que présentant une grande variété de format (avec ou sans préparation, plus ou moins proche du cours ou demandant inventivité et prise d'initiative…) ont en commun un cahier des charges permettant d'**évaluer chaque candidat(e) au meilleur de ses possibilités**. Pour ce faire, les sujets, souvent progressifs, vont d'abord vous demander de mobiliser vos connaissances du cours et ses applications. Les réponses que vous apporterez devront être **explicitées en termes précis de façon à démontrer, au-delà des vos connaissances académiques**, votre **capacité à analyser les modèles sous-jacents** pour en traduire **les hypothèses**, dans le cadre de l'exercice.
Vous devez ainsi produire une **suite logico-déductive le plus souvent en langage mathématique** dont chaque étape doit être **argumentée en français** et **adressée directement au jury**. La bonne présentation d'un exercice demande ainsi de trouver

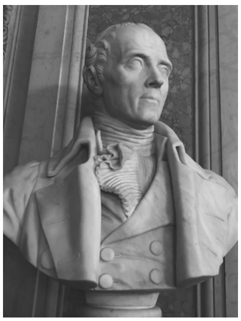
un équilibre entre **l'exploitation du tableau** et la **verbalisation des idées** sous-tendant la démarche ainsi que des **commentaires des résultats obtenus**.
En effet, les jurys regrettent bien souvent que les candidat(es) ayant obtenus un résultat passent à la suite sans prendre le temps de l'analyser physiquement (cette **valeur ajoutée est fortement appréciée** et vous permet en outre de détecter en temps réel une éventuelle erreur).
Ainsi, une même démonstration travaillée pour les écrits devra le plus souvent être reprise en vue des oraux en anticipant les commentaires qui pourront donner du sens à la démarche. **Ce savoir-faire ne s'improvise pas** et vous trouverez dans le livre de nombreux exemples de méthodes et exercices dont les corrections sont ponctuées de commentaires spécifiques vous permettant de mettre en place de bonnes habitudes.

Les auteurs vous souhaitent de prendre plaisir à l'utilisation régulière de ce livre qui contribuera à la réalisation de vos objectifs.

Chapitre 1

# Stabilité des systèmes linéaires

UN SCIENTIFIQUE



**Pierre-Simon Laplace** (1749-1827) est considéré comme un des plus grands mathématiciens et physiciens de la fin XVIIIe et du début XIXe siècle. Cependant, sa véritable passion fut l'astronomie. Ses travaux sur la gravitation universelle l'ont amené à étudier de nombreuses méthodes de calculs, en particulier dans le domaine des équations différentielles. Son nom reste attaché à la théorie du déterminisme suivant laquelle l'avenir du Monde est entièrement déterminé par son état actuel.

## Un peu d'histoire

Les équations différentielles jouent un rôle essentiel dans l'étude de la stabilité des systèmes linéaires. Cette notion est apparue à la fin du XVIIe siècle lorsque Newton et Leibniz ont introduit le calcul différentiel. Ceci a permis la résolution de problèmes dans tous les domaines de la physique.

De grands scientifiques, comme Euler et d'Alembert, ont contribué, tout au long du XVIIIe siècle, à résoudre des équations différentielles issues de modélisations d'une réalité physique. Deux savants français, passionné de mécanique céleste, Laplace et Lagrange, ont étudié l'un la stabilité du système solaire et l'autre l'existence de points de stabilité gravitationnelle sur les orbites des planètes. Ces techniques ont été utiles pour déterminer les orbites des satellites mais ont aussi trouvé un autre domaine d'application, l'étude de la stabilité de systèmes électriques.

## Objectifs

### Ce qu'il faut connaître

▷ Les critères caractérisant le fonctionnement linéaire d'un système

▷ La représentation spectrale d'un signal périodique et sa signification

▷ La signification de la fonction de transfert

▷ Les critères de stabilité d'un système linéaire

### Ce qu'il faut savoir faire

▷ Déterminer une fonction de transfert

▷ Identifier la nature d'un filtre à partir du schéma ou de la fonction de transfert

▷ Prévoir le signal de sortie ainsi que sa composition spectrale à partir de la fonction de transfert

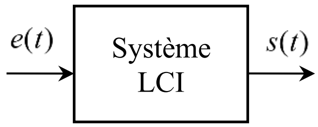
▷ Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel ou temporel

▷ Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

# ■■ Résumé de cours

## ■ Le système linéaire continu invariant

### ❑ Définitions




Soit un **système** (circuit électrique, machine, …) donnant à une entrée $e(t)$ une réponse $s(t)$ en sortie.

De manière générale, $e$ et $s$ peuvent être des grandeurs électriques, mécaniques, thermodynamiques… Par exemple $e(t)$ peut être le courant d'alimentation d'un moteur, et $s(t)$ la vitesse de rotation de ce moteur.

L'étude est ici limitée aux **systèmes linéaires, continus, invariants** :

→ **Linéaire** : si une entrée $e_1(t)$ donne une réponse en sortie $s_1(t)$ et une entrée $e_2(t)$ donne une réponse en sortie $s_2(t)$, alors une entrée $k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t)$ avec $k_1$ et $k_2$ constantes donnera une sortie $k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)$ ;

→ **Continu** : les grandeurs étudiées sont définies pour tout temps ;

→ **Invariant** : son comportement dans le temps reste inchangé ; si l'on reproduit une même entrée à deux instants différents, les réponses seront identiques (décalées de ce même temps).

### ❑ Propriété

Soit un signal d'entrée sinusoïdal permanent $e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Une propriété remarquable des systèmes linéaires (en régime permanent) est de donner nécessairement en sortie un signal également **sinusoïdal** et de **même pulsation** $\omega$ qui s'écrit donc $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi')$. On dit que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires.

Prévoir la réponse en sortie d'un système LCI se résume donc à rechercher $(s_0 / e_0)$ rapport des amplitudes, et $(\varphi' - \varphi)$ le déphasage.

## ■ La fonction de transfert

### ❑ Fonction de transfert

Introduisons les notations complexes associées respectivement à $e(t)$ et $s(t)$ :

$\underline{e} = e_0 \exp\big(j(\omega t + \varphi)\big) = \underline{E} \exp(j\omega t)$ avec $\underline{E} = e_0 \exp(j\varphi)$ et

$\underline{s} = s_0 \exp\big(j(\omega t + \varphi')\big) = \underline{S} \exp(j\omega t)$ avec $\underline{S} = s_0 \exp(j\varphi')$.

La fonction de transfert est par définition : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = \dfrac{s_0}{e_0} e^{j(\varphi' - \varphi)}}$

⇨ **Méthode 1.1. Calcul de la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel**

Compte tenu de la propriété d'isomorphisme précédemment citée, pour déterminer, en régime permanent, le signal de sortie $s(t)$ réponse d'un signal $e(t)$ sinusoïdal, il suffit de connaître $\underline{H}$ à $\omega$ :

$\rightarrow$ le module de $\underline{H}$, appelé **gain**, donne $(s_0 / e_0)$ rapport des amplitudes ;

$\rightarrow$ l'argument de $\underline{H}$ donne $(\varphi' - \varphi)$, appelé **avance de phase** (ou déphasage) du signal de sortie sur le signal d'entrée.

Dans le domaine temporel, un signal d'entrée $e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi)$ donne donc une réponse $\boxed{s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi') = \left|\underline{H}\left(j\omega\right)\right| e_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \arg\left(\underline{H}\left(j\omega\right)\right)\right)}$.

⇨ **Méthode 1.6. Détermination du signal de sortie en régime établi**

### ❑ Systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$\rightarrow$ Dans le cas d'un circuit électronique associant par exemple des composants $R$, $L$ ou $C$, les relations liants tensions et courants peuvent s'écrire dans le domaine temporel sous forme d'équations différentielles linéaires : $u = Ri$, $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. En les combinant judicieusement à l'aide de la loi des mailles et de la loi des nœuds, il est toujours possible d'obtenir une équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant $s(t)$ à $e(t)$ de la forme :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_2 \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + \ldots + b_n \frac{\mathrm{d}^n s(t)}{\mathrm{d}t^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 e(t)}{\mathrm{d}t^2} + \ldots + a_m \frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}.$$

L'ordre du filtre est $n$ avec $n \geq m$. Nous nous limiterons à l'ordre 2 pour la suite.

⇨ **Méthode 1.2. Détermination directe de l'équation différentielle dans le domaine temporel**

$\rightarrow$ Utilisons maintenant les notations complexes (domaine fréquentiel). Remarquant que la dérivée temporelle de $\exp(j\omega t)$ est $j\omega \cdot \exp(j\omega t)$, l'équation différentielle se simplifie :

$b_0 \underline{s} + b_1 j\omega \underline{s} + b_2 \left(j\omega\right)^2 \underline{s} = a_0 \underline{e} + a_1 j\omega \underline{e} + a_2 \left(j\omega\right)^2 \underline{e}$ soit :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2}}.$$

La fonction de transfert se présente donc sous la forme d'une fraction rationnelle de $j\omega$.

### ❑ Notation de Laplace et transposition entre domaine temporel et domaine fréquentiel

On utilise la notation symbolique de Laplace $H(p)$, $p$ valant $j\omega$ dans le domaine fréquentiel, mais $p$ étant aussi l'opérateur $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$ dans le domaine temporel. Il est ainsi possible de passer facilement de la fonction de transfert à l'équation différentielle et réciproquement :

$$\boxed{H(p)=\frac{a_0+a_1 p+a_2 p^2}{b_0+b_1 p+b_2 p^2}} \Leftrightarrow \boxed{\left[b_0+b_1 p+b_2 p^2\right]\mathrm{s}(t)=\left[a_0+a_1 p+a_2 p^2\right]e(t)} \text{ avec } \boxed{p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$$

⇨ **Méthode 1.3. Détermination de l'équation différentielle dans le domaine temporel à partir de la fonction de transfert**

## ■ La stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

### ❑ Étude à partir de l'équation différentielle

Pour une entrée $e(t)$ donnée, la solution $s(t)$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $b_0 s(t)+b_1\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+b_2\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}=a_0 e(t)+a_1\frac{\mathrm{de}(t)}{\mathrm{d}t}+a_2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}(t)}{\mathrm{d}t^2}$ est la somme de :

→ une solution particulière $s_P(t)$ de l'équation complète ;

→ la solution générale $s_H(t)$ de l'équation homogène $b_0 s(t)+b_1\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+b_2\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}=0$.

**Un système est stable lorsque** : $\boxed{s_H(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0}$.

La réponse s(t) d'un système stable présente alors 2 phases :

→ au début, le régime transitoire est décrit par $s(t)=s_P(t)+s_H(t)$ ;

→ au bout d'un certain temps $s_H(t)\simeq 0$ : le régime permanent (ou établi) est atteint, et $s(t)=s_P(t)$. Le régime établi d'un système stable est décrit par la solution particulière.

Remarque

Pour un signal permanent en entrée $e(t)$ d'un système stable, on se contente de rechercher le signal **permanent** $s_P(t)$. La notion de filtre n'a de sens que pour les systèmes stables. Dans ce cas, il n'est pas utile d'expliciter le régime transitoire.

Par contre, dans le cas où $s_H(t)$ ne tend pas vers 0, **le régime permanent** $s_P(t)$ **n'est jamais atteint : le système est instable**.

C'est donc l'étude du régime transitoire qui permet de déterminer la stabilité d'un système.

→ Stabilité d'un système d'ordre 1

L'équation homogène s'écrit $b_0\,\mathrm{s}(t)+b_1 p\,\mathrm{s}(t)=0$ avec $\mathrm{p}=[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$, dont la solution est $s_H(t)=\mathrm{A}\exp(-b_0/b_1)$, qui tend vers 0 si et seulement si $b_0$ et $b_1$ sont de même signe.

→ Stabilité d'un système d'ordre 2

L'équation homogène s'écrit $\left[b_0+b_1 p+b_2 p^2\right]\mathrm{s}(t)=0$. On remarque que l'écriture avec les notations de Laplace donne directement l'équation caractéristique $b_0+b_1 p+b_2 p^2=0$. Il existe 3 types de solutions selon le signe du $\Delta_{EC}$ (régime apériodique, critique ou pseudo-périodique). Dans tous les cas, les termes en exponentiel doivent tendre vers 0 pour avoir stabilité. Mathématiquement, cela se traduit par la partie réelle des 2 solutions de l'équation caractéristique

qui doivent être négatives. On peut vérifier que c'est le cas si et seulement si $b_0$, $b_1$ et $b_2$ sont de même signe.
**En conclusion, un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients de l'équation différentielle homogène sont de même signe.**

⇨ **Méthode 1.9. Étude de la stabilité dans le domaine temporel**

### ❑ Étude à partir de la fonction de transfert

En revenant à la notation de Laplace $H(p) = \dfrac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$, on remarque que les coefficients de l'équation homogène apparaissent directement au dénominateur.
**Un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients $b_i$ du polynôme au dénominateur de $\underline{H}$ sont de même signe.**

Remarque

Dans le cas d'un circuit ne contenant que des éléments passifs, le système est nécessairement stable. La seule exception envisageable est le cas d'un circuit sans aucune résistance ($LC$ par exemple), qui est purement théorique. Hormis cette exception, il faut utiliser au moins un composant actif tel un ALI (voir chapitre suivant) pour apporter de l'énergie et déstabiliser le système.
Nous nous placerons dans le cas d'un système stable pour la suite du résumé de cours, et nous limiterons donc l'étude au régime permanent (ou établi).

⇨ **Méthode 1.8. Étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel à l'aide de la fonction de transfert**

## ■ Le signal périodique non sinusoïdal

### ❑ La décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

J. Fourier a déterminé que tout signal périodique de période $T_0$ peut se décomposer en une somme infinie de sinus et de cosinus, appelée série de Fourier :

$$\boxed{e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\,\omega_0 t + \varphi_n\right)} \text{ avec } \omega_0 = 2\pi / T_0 ,$$

qui peut aussi s'écrire $e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(n\omega_0 t\right) + b_n \sin\left(n\omega_0 t\right)\right)$.

$c_0$ est la **composante continue** (valeur moyenne du signal), $\omega_0$ est la pulsation la plus basse que l'on appelle **fondamentale**. Les termes de pulsation $\omega_n = n\,\omega_0$ sont les **harmoniques de rang** $n$ .

### ❑ Détermination du signal de sortie et notion de filtrage

Tout signal périodique $e(t)$ peut s'écrire sous forme de série de Fourier, et l'on sait déterminer la réponse en sortie pour chaque signal sinusoïdal placé en entrée. La série de Fourier du signal de sortie $s(t)$ est donc simplement la somme des réponses correspondant à chaque terme de la série de $e(t)$.

$$\begin{aligned} e(t) = {} & c_0 \\ & + c_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ & + c_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) \\ & + c_3 \cos(3\omega_0 t + \varphi_3) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

**Système**

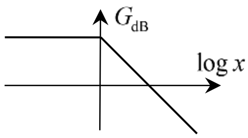
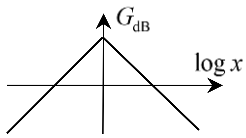
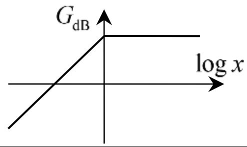
**LCI**

$$\begin{aligned} s(t) = {} & c_0 \left|\underline{H}(\omega = 0)\right| \\ & + c_1 \left|\underline{H}(\omega_0)\right| \cos\left(\omega_0 t + \varphi_1 + \arg\left(\underline{H}(\omega_0)\right)\right) \\ & + c_2 \left|\underline{H}(2\omega_0)\right| \cos\left(2\omega_0 t + \varphi_2 + \arg\left(\underline{H}(2\omega_0)\right)\right) \\ & + c_3 \left|\underline{H}(3\omega_0)\right| \cos\left(3\omega_0 t + \varphi_3 + \arg\left(\underline{H}(3\omega_0)\right)\right) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

⇨ **Méthode 1.6. Détermination du signal de sortie en régime établi**

### ❑ Modèles simples de filtres passifs

On se reportera à l'étude faite en première année. Seuls les principaux types de filtres d'ordre 1 et 2 sont rappelés ici. Notons $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite, et $Q$ le facteur de qualité.

| | Filtre passe-bas | Filtre passe-bande | Filtre passe-haut |
|---|---|---|---|
| Gabarit |  |  |  |
| Filtre d'ordre 1 | $H_0 \dfrac{1}{1 + jx}$ | N'existe pas | $H_0 \dfrac{jx}{1 + jx}$ |
| Filtre d'ordre 2 | $H_0 \dfrac{1}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$ | $H_0 \dfrac{j\dfrac{x}{Q}}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$ | $H_0 \dfrac{-x^2}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$ |

Dans le diagramme de Bode, les pentes des filtres d'ordre 1 ne peuvent pas dépasser ± 20 dB par décade, et les filtres d'ordre 2 ± 40 dB par décade.

# Méthodes

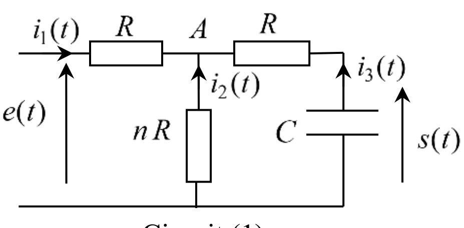
## Comment déterminer la relation entrée/sortie d'un filtre linéaire ?

### Méthode 1.1. Calcul de la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel

→ Il faut se placer dans le domaine fréquentiel et donc utiliser les impédances complexes.
On applique le pont diviseur de tension quand c'est possible pour obtenir des relations entre les tensions. Quand ce n'est pas possible (au moins 3 branches à un nœud), on applique la loi des nœuds exprimée en terme de potentiel (toutes les intensités sont remplacées par $\underline{u}/\underline{Z}$). Cela donne un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues. Il ne faut en aucun cas faire intervenir des courants dans les équations car cela ajoute des inconnues inutiles !
Ensuite, par substitution, éliminer les inconnues pour ne garder que $\underline{e}$ (entrée) et $\underline{s}$ (sortie). $\underline{s}/\underline{e}$ donne la fonction de transfert.
→ Dans le cas où l'équation différentielle entre $s(t)$ et $e(t)$ a déjà été préalablement déterminée, il suffit de la transposer dans le domaine fréquentiel en remplaçant l'opérateur $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$ par $p$, puis en déduire $s/e$.

⇨ Exercices 1.2 et 1.4

Calculons la fonction de transfert du circuit (1) dans le domaine fréquentiel.
Plaçons la masse ($v = 0$) sur le fil du bas, et notons $v_A$ le potentiel du nœud $A$.
Un pont diviseur de tension en sortie $s$ donne $\underline{s} = \dfrac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + R}\underline{v}_A$ (2), avec $\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}$.



Circuit (1)

L'introduction d'un potentiel inconnu $\underline{v}_A$ oblige à rechercher une équation supplémentaire. Celle-ci est obtenue en appliquant la loi des nœuds exprimée avec les potentiels. $\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 = 0$ arrivant en $A$ s'écrit :

$$\frac{\underline{e} - \underline{v}_A}{R} + \frac{0 - \underline{v}_A}{nR} + \frac{\underline{s} - \underline{v}_A}{R} = 0 \text{ soit } \underline{v}_A = \frac{n}{2n+1}\left(\underline{e} + \underline{s}\right).$$

Le remplacement de $\underline{v}_A$ dans l'équation (2) donne $\underline{s} = \left(\dfrac{1/jC\omega}{R+1/jC\omega}\right)\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)\left(\underline{e}+\underline{s}\right)$. En multipliant numérateur et dénominateur par $\left(jC\omega\right)$, en remontant les dénominateurs dans le membre de gauche, et en séparant $\underline{s}$ et $\underline{e}$, il vient :

$$\left(2n+1+\left(2n+1\right)\left(1+jRC\omega\right)-n\right)\underline{s} = n\,\underline{e} \text{ soit } \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{n}{\left(n+1\right)+\left(2n+1\right)jRC\omega}}. \quad (3)$$

### ❑ Méthode 1.2. Détermination directe de l'équation différentielle dans le domaine temporel

Il faut écrire la loi des nœuds et la loi des mailles aux divers nœuds et mailles, en tachant de faire intervenir le moins d'inconnues possible. On utilise également les lois relatives à chaque dipôle entre $u(t)$ et $i(t)$. Il reste à combiner toutes ces équations pour ne garder qu'une équation différentielle à une seule inconnue $s(t)$.
Cette méthode est à proscrire dès que le circuit contient au moins 3 mailles, car il est parfois difficile de se sortir d'un système de plusieurs équations différentielles couplées à plusieurs inconnues ! Il sera alors préférable d'utiliser la méthode 1.3.

⇨ **Exercice 1.3**

Déterminons l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ dans le domaine temporel pour le même circuit (1).
→ La loi des nœuds en $A$ s'écrit $i_1+i_2+i_3=0$. Pour ne pas faire apparaître trop d'inconnues, il est souhaitable de remplacer toutes les intensités par des tensions, en utilisant les lois relatives aux dipôles : $i_1=\left(e-v_A\right)/R$, $i_2=\left(0-v_A\right)/\mathrm{n}R$ et $i_3=\left(s-v_A\right)/R=-C\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ ce qui donne $\dfrac{e(t)-v_A(t)}{R}+\dfrac{-v_A(t)}{nR}-C\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=0$ soit $\left(1+n\right)v_A(t)=n\,e(t)-n\,RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=0$. (4)
→ Il reste une inconnue en trop : $v_A(t)$. Nous pouvons maintenant exploiter la loi des mailles à une des 2 mailles présentes. La maille de droite donne : $v_A=s-Ri_3$ soit, en éliminant avec l'intensité avec $i_3=-C\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ : $v_A(t)=s(t)+RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$ (5).
→ Il n'est pas utile d'exploiter la maille de gauche, car les 2 équations (4) et (5) suffisent à éliminer $v_A(t)$ et obtenir une équation différentielle entre $s(t)$ et $e(t)$. $v_A(t)$ tiré de (5) et injecté dans (4) donne, après avoir séparé $s(t)$ et $e(t)$ dans 2 membres séparés :

$$\boxed{\left(n+1\right)s(t)+\left(2n+1\right)RC\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=n\,e(t)}.$$

### ❑ Méthode 1.3. Détermination de l'équation différentielle dans le domaine temporel à partir de la fonction de transfert

Il faut commencer d'abord par déterminer la fonction de transfert à l'aide de la méthode 1.1 : $H(p) = \dfrac{s}{e} = \dfrac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$. Les dénominateurs sont remontés dans le membre opposé sous la forme $\left[b_0 + b_1 p + b_2 p^2\right] s = \left[a_0 + a_1 p + a_2 p^2\right] e$ puis l'opérateur $p$ est remplacé par $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$ (transposition de la fonction de transfert opérationnelle dans le domaine temporel). L'équation différentielle obtenue est :

$$b_0\, s(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{d}t} + b_2 \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = a_0 e(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}\,e(t)}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2\, e(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

➩ **Exercices 1.2, 1.3 et 1.6**

Déterminons encore l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ dans le domaine temporel pour le circuit (1), mais en partant de la fonction de transfert obtenue dans le domaine fréquentiel par la méthode 1.1.

Avec les notations de Laplace : $H = \dfrac{s}{e} = \dfrac{n}{(n+1) + (2n+1) RC\, p}$, soit en remontant les dénominateurs dans les membres opposés : $\left[(n+1) + (2n+1) RC\, p\right] s = n\, e$. La transposition dans le domaine temporel revient simplement à remplacer $p$ par l'opérateur $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$ :

$$\boxed{(n+1) s(t) + (2n+1) RC \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = n\, e(t)}.$$

## ■ Comment déterminer la nature d'un filtre linéaire ?

### ❑ Méthode 1.4. Nature d'un filtre à partir du schéma

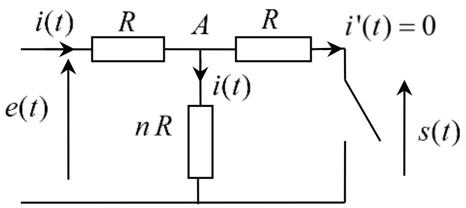
Se placer à basse fréquence, puis à haute fréquence, et remplacer dans chaque cas les bobines et condensateurs par leurs équivalents. Une impédance proche de 0 est équivalente à un fil (ou court-circuit), et une impédance très grande est équivalente à un interrupteur ouvert (le courant ne peut pas passer).
Il reste à retracer ainsi le schéma électrique équivalent dans chaque cas et en déduire la tension de sortie. Une tension de sortie nulle indique que les fréquences correspondantes sont coupées.

➩ **Exercice 1.2**

Considérons toujours le même filtre (1) et cherchons à donner sa nature sans calcul. Voici ci-dessous une synthèse des simplifications que l'on peut faire à BF et HF.

| | Basse fréquence $(\omega \to 0)$ | Haute fréquence $(\omega \to \infty)$ |
|---|---|---|
| $\lvert Z_C \rvert = \dfrac{1}{C\omega}$ | $\lvert Z_C \rvert \to \infty$ | $\lvert Z_C \rvert = 0$ |
| $\lvert Z_L \rvert = L\omega$ | $\lvert Z_L \rvert = 0$ | $\lvert Z_L \rvert \to \infty$ |

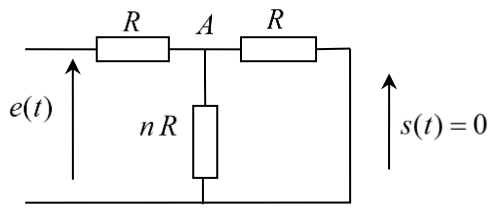
Schéma (1) simplifié à basse fréquence




Le condensateur empêche le courant $i'$ de passer donc $s = v_A$. De plus, le courant $i$ circulant dans $R$ (de gauche) et dans $nR$ est le même ce qui permet d'appliquer un pont diviseur de tension : $s = v_A = \dfrac{n}{n+1}e$. (6)

$\rightarrow$ $s \neq 0$ : les basses fréquences passent.

Schéma (1) simplifié à haute fréquence




Le condensateur laisse passer le courant à haute fréquence : il se comporte comme un fil (ou court-circuit). La tension $s$ à ses bornes est donc quasi nulle.

$\rightarrow$ $s \simeq 0$ : les hautes fréquences sont coupées.

Le circuit (1) laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences : il s'agit donc d'un filtre passe bas.

### ❑ Méthode 1.5. Nature d'un filtre à partir de la fonction de transfert

La fonction de transfert est écrite sous forme d'une fraction rationnelle avec un polynôme $N(p)$ au numérateur et $D(p)$ au dénominateur : $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$. Reste à rechercher un équivalent de $H(p)$ à basse fréquence puis à haute fréquence, qui est l'équivalent de $N(p)$ divisé par l'équivalent de $D(p)$.

$\rightarrow$ À basse fréquence, l'équivalent d'un polynôme est le terme de plus petit degré. L'équivalent de $H(p)$ est donc le terme de plus petit degré de $N(p)$ divisé par le terme de plus petit degré de $D(p)$. Reste à faire tendre $p \to 0$ à l'équivalent de $H(p)$ obtenu pour savoir si les basses fréquences passent.

$\rightarrow$ À haute fréquence, l'équivalent d'un polynôme est le terme de plus haut degré. L'équivalent de $H(p)$ est le terme de plus haut degré de $N(p)$ divisé par le terme de plus haut degré de $D(p)$. Reste à faire tendre $p \to \infty$ à l'équivalent de $H(p)$ obtenu pour savoir si les hautes fréquences passent.

⇨ **Exercice 1.4**

→ Considérons à nouveau le circuit (1) pour confirmer la nature de ce filtre.

À basse fréquence, on garde les plus petites puissances de p aussi bien au numérateur qu'au dénominateur :

$$H = \frac{n}{(n+1)+(2n+1)RC\,p} \sim \frac{n}{n+1}$$

À haute fréquence, on garde les plus grandes puissances de p aussi bien au numérateur qu'au dénominateur :

$$H = \frac{n}{(n+1)+(2n+1)RC\,p} \sim \frac{n}{(2n+1)RC\,p}$$

Les basses fréquences passent, et l'on retrouve le même signal de sortie (6) à BF que dans la méthode précédente. Les hautes fréquences donnent un équivalent en cte/$p$ qui tend vers 0 quand $p$ tend vers l'infini : les hautes fréquences sont coupées. C'est donc un filtre passe-bas.

→ Il y a un moyen très rapide de reconnaître un passe-bas, passe-bande ou passe-haut directement sur la fonction de transfert, à condition qu'elle ait été préalablement écrite sous forme de fraction rationnelle. Il faut écrire les polynômes en $p$ (ou $j\omega$) sous forme de puissance croissante $a + b\,p + c\,p^2$. La forme du gabarit du filtre donne les coefficients nuls.

| Passe bas | Passe bande | Passe haut |
|---|---|---|
| $H(p) = \dfrac{a + b\,p + \cancel{c}\,p^2}{a' + b'\,p + c'\,p^2}$ | $H(p) = \dfrac{\cancel{a} + b\,p + \cancel{c}\,p^2}{a' + b'\,p + c'\,p^2}$ | $H(p) = \dfrac{\cancel{a} + b\,p + c\,p^2}{a' + b'\,p + c'\,p^2}$ |
| $c = 0$ et $a \neq 0$<br>($b$ peut être nul ou non) | $a = 0$, $c = 0$<br>$b \neq 0$ | $a = 0$ et $c \neq 0$<br>($b$ peut être nul ou non) |

Cette méthode est applicable également aux filtres d'ordre 1 (passe-bas et passe-haut).
Appliqué au circuit (1), il est clair que c'est un filtre passe-bas.

## ■ Comment obtenir le signal de sortie d'un filtre ?

### ❑ Méthode 1.6. Détermination du signal de sortie en régime établi

Le régime établi est décrit par la solution particulière de l'équation différentielle. Dans le cas d'un signal $e(t)$ périodique, il serait vain de vouloir rechercher une solution particulière directement sur l'équation différentielle dans le domaine temporel car le second membre de l'équation différentielle est variable.

→ Rechercher tout d'abord la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ dans le domaine fréquentiel en suivant la méthode 1.1.

→ Cas $e(t)$ est sinusoïdal de la forme $e(t) = E_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$.

Le signal de sortie est également un signal sinusoïdal de même pulsation $s(t) = S_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi'\right)$ dont l'amplitude est donnée par $S_m = E_m \cdot \left|\underline{H}\left(\omega = \omega_0\right)\right|$ et le déphasage par $\varphi' = \varphi + \arg\left(\underline{H}\left(\omega = \omega_0\right)\right)$.

→ Cas $e(t)$ périodique mais non sinusoïdal, ou somme de sinus.

Il faut commencer par écrire la décomposition en série de Fourier de $e(t)$. Comme le filtre est linéaire, on pourra prendre chaque terme de la série individuellement pour rechercher le signal de sortie correspondant à chaque terme. $s(t)$ est la somme de tous ces termes.

⇨ **Exercices 1.1, 1.2, 1.4 et 1.5**

On cherche à fabriquer, au laboratoire de physique, un filtre moyenneur qui garde la composante continue et coupe la partie alternative du signal d'entrée suivant :

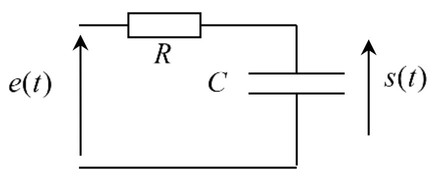
$$e(t) = 4 + 2\cos\left(\omega_0 t + 10^\circ\right) + 1{,}5\cos\left(2\omega_0 t + 45^\circ\right).$$

Les amplitudes sont en volt, et les déphasages en degré avec $\omega_0 = 500\,\text{rad/s} = 2{,}86.10^4\ °/\text{s}$.

On dispose pour cela des composants usuels d'un laboratoire de physique. Proposez un montage simple permettant de moyenner ce signal. Votre démarche devra être clairement argumentée qualitativement et quantitativement. Il conviendra en outre de proposer une démarche permettant de valider votre de choix.

Document support : un signal périodique à valeur moyenne non nulle peut s'écrire sous la forme : $e(t) = \langle e(t)\rangle + E(t)$, avec $\langle e(t)\rangle$ la valeur moyenne du signal et $E(t)$ la composante alternative du signal de valeur moyenne nulle (l'ondulation du signal), $E_{eff}$ étant sa valeur efficace. Le taux d'ondulation est donné par la relation suivante : $\tau = \dfrac{E_{eff}}{\langle e(t)\rangle}$. Le taux d'ondulation mesure le niveau d'ondulation d'un signal continu : Pour un signal continu $\tau = 0$.

Il nous faut trouver un filtre qui garde la composante continue et coupe le fondamental et les harmoniques, ici l'harmonique de range 2 $\omega = 2\omega_0$. Un simple filtre RC passe-bas est le premier à venir à l'esprit (le plus classique). Un tel filtre pourrait réaliser cette opération, à condition d'avoir une pulsation de coupure inférieure à la pulsation du fondamental.




La valeur moyenne de $e(t)$ à garder est $4\,\text{V}$ $\left(\omega = 0\right)$, le fondamental (à couper) est le terme $\omega = \omega_0$ et le terme $\omega = 2\omega_0$ est l'harmonique de rang 2.

Il nous faut à présent déterminer les valeurs de $R$ et de $C$ permettant de remplir le cahier des charges, c'est-à-dire telles que la pulsation de coupure à $-3\text{dB}$ $\omega_{\text{coup}}$ soit inférieure à $\omega_0$.



Méthodes

La première étape consiste donc à calculer la fonction de transfert.

Le pont diviseur de tension donne $\underline{s} = \dfrac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R}\underline{e} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}\underline{e}$ soit $\underline{H} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}$, de module (ou gain) $G = |\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ et d'argument $\varphi = -\arctan(RC\omega)$.

La pulsation de coupure à $-3\text{dB}$ étant $\omega_{coup} = 1/\text{RC}$, nous choisissons $R = 10\,\text{k}\Omega$ et $C = 1\,\mu\text{F}$ de sorte à avoir $\omega_{coup} = 100\,\text{rad/s} = 5{,}73.10^3\ °/\text{s}$ inférieure à $\omega_0$.

À présent il nous faut vérifier l'efficacité du filtre moyenneur, calculons pour cela le signal de sortie.

Amplitudes (volt)

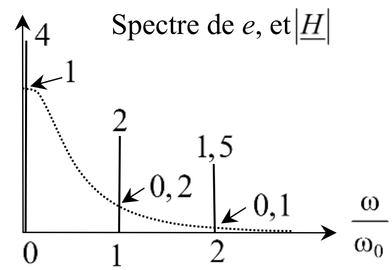
| | $\omega = 0$ | $\omega = \omega_0$ | $\omega = 2\omega_0$ |
|---|---|---|---|
| Entrée $e$ | 4 | 2 | 1,5 |
| $\lvert\underline{H}(\omega)\rvert$ | 1 | 0,20 | 0,10 |
| Sortie $s$ | 4 | 0,40 | 0,15 |

Phases (degré)

| | $\omega = \omega_0$ | $\omega = 2\omega_0$ |
|---|---|---|
| Entrée $e$ | 10 | 45 |
| $\arg(\underline{H}(\omega))$ | -79 | -84 |
| Sortie $s$ | -69 | -39 |

Le signal de sortie est donc : $e(t) = 4 + 0{,}40\cos(\omega_0 t - 69°) + 0{,}15\cos(2\omega_0 t - 39°)$.

Ce calcul sur les amplitudes s'effectue aisément si l'on superpose le spectre du signal d'entrée avec la représentation de $|\underline{H}|$ (en échelle linéaire) sur un même diagramme (voir figure ci-contre ; échelles différentes pour $e$ et $|\underline{H}|$).




Pour juger de l'efficacité du moyenneur on peut utiliser la notion de taux d'ondulation qui ici est de l'ordre de 10 %, ce qui en fait un moyenneur peu efficace. Il aurait fallu prendre un filtre d'ordre 2 pour un filtrage plus efficace, ou choisir une fréquence de coupure plus basse.

### ❑ Méthode 1.7. Détermination du signal de sortie en régime non établi

Pour décrire le régime transitoire de $s(t)$, il faut revenir à l'équation différentielle dans le domaine temporel, obtenue à l'aide des méthodes 1.2 ou 1.3.
La solution générale de l'équation différentielle est la somme de :
$\rightarrow$ la solution particulière (constante si le second membre est constant), qui décrit le régime établi ;
$\rightarrow$ la solution de l'équation homogène (solution de l'équation sans second membre).
Les constantes à déterminer (une pour un système d'ordre 1, 2 pour un système d'ordre 2) sont obtenues en traduisant la continuité de la tension aux bornes du condensateur ou la continuité du courant dans une bobine.

⇨ **Exercices 1.2, 1.3 et 1.6**

Étudions la réponse à un échelon de tension $E_0$ du circuit (1). Le condensateur était préalablement déchargé. L'équation différentielle déterminée en méthode 1.2. est :

$$(n+1)s(t)+(2n+1)RC\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=n\,E_0\,.$$

→ la solution particulière est $s_P=\dfrac{n}{n+1}E_0$ ;

→ la solution de l'équation homogène est $s_H=A\exp(-t/\tau)$ avec $\tau=\dfrac{2n+1}{n+1}RC$.

La solution générale est donc $s(\mathrm{t})=\dfrac{n}{n+1}E_0+A\exp(-t/\tau)$.

A est déterminé avec la condition de continuité de la tension aux bornes du condensateur. Celui-ci étant au préalable déchargé, la tension reste nulle à $t=0^+$, ce qui donne :

$$s(\mathrm{t}=0^+)=\frac{n}{n+1}E_0+A=0 \text{ soit } A=-\frac{n}{n+1}E_0\,.$$

Finalement : $\boxed{s(\mathrm{t})=\dfrac{n}{n+1}E_0\left(1-\exp(-t/\tau)\right)}$ pour $t>0$.

## ■ Comment déterminer la stabilité d'un système linéaire d'ordre 1 ou 2 ?

### ❑ Méthode 1.8. Étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel à l'aide de la fonction de transfert

La méthode se limite à l'ordre 1 ou 2.
Commencer par déterminer la fonction de transfert par la méthode 1.1. Mettre ensuite cette fonction de transfert sous forme de fraction rationnelle de $p$ (notation de Laplace) ou de $(j\omega)$. Relever les signes des coefficients du polynôme du dénominateur :
→ tous les coefficients sont de même signe : le système est stable ;
→ les coefficients ont des signes différents : le système est instable.

⇨ Exercice 1.6

**Exemple 1**
Étudions la stabilité du circuit (1) représenté en méthode 1.1.
La fonction de transfert a été obtenue en formule (3) :

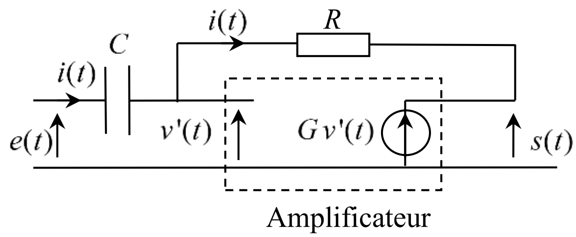
$$\underline{H}=\frac{n}{(n+1)+(2n+1)\,jRC\omega} \text{ soit } H=\frac{n}{(n+1)+(2n+1)RC\,p} \text{ en notation de Laplace.}$$

Les coefficients du polynôme au dénominateur sont $(n+1)>0$ et $(2n+1)RC>0$ tous deux positifs. Le système est stable.

Méthodes

**Exemple 2** : avec composant actif.

Considérons le montage ci-contre, constitué d'une résistance $R$, d'un condensateur de capacité $C$ et d'un amplificateur (en pointillés sur le schéma) d'impédance d'entrée infinie, de gain $G$ constant, et d'impédance de sortie nulle.




L'impédance d'entrée de l'amplificateur étant infinie, le courant circulant dans la résistance $R$ est le même que celui circulant dans le condensateur : $\dfrac{\underline{e}-\underline{v}'}{\underline{Z}_C}=\dfrac{\underline{v}'-\underline{s}}{R}$ soit $\underline{v}'=\dfrac{\underline{e}/\underline{Z}_C+\underline{s}/R}{1/R+1/\underline{Z}_C}=\dfrac{jRC\omega\,\underline{e}+\underline{s}}{1+jRC\omega}$.

Or $\underline{s}=G\underline{v}'$ donc $\underline{s}=G\dfrac{jRC\omega\,\underline{e}+\underline{s}}{1+jRC\omega}$ soit $\left(1+jRC\omega\right)\underline{s}=G\left(jRC\omega\,\underline{e}+\underline{s}\right)$ et donc finalement $\underline{H}=\dfrac{jGRC\omega}{\left(1-G\right)+jRC\omega}$ ou $\boxed{H=\dfrac{\left(GRC\right)p}{\left(1-G\right)+\left(RC\right)p}}$ en notation de Laplace.

Étudions les signes au dénominateur : $\left(RC\right)>0$ et $\left(1-G\right)>0 \Leftrightarrow G<1$.

→ Pour un gain trop important : $G>1$, le système est instable. Dans ce cas le régime transitoire fait tendre $s(t)$ vers l'infini. En pratique, la source $G\,v'$ va « saturer » car elle ne peut pas donner une tension infinie en sortie. Ce problème est abordé en détail dans le chapitre suivant.

→ Pour un gain plus faible : $G<1$, le système est stable.

Le cas intermédiaire $G=1$ est impossible à obtenir exactement expérimentalement.

## ❑ Méthode 1.9. Étude de la stabilité dans le domaine temporel

> Commencer par rechercher l'équation différentielle à l'aide des méthodes 1.2 ou 1.3.
> La stabilité est donnée par la solution de l'équation sans second membre : si elle diverge, le système est instable ; si elle converge vers 0, le système est stable.
> En pratique, il n'est pas nécessaire d'exprimer complètement la solution. Il suffit de rechercher les racines de l'équation caractéristique. Si la partie réelle est positive, la solution est instable (exponentielle divergente) ; si la partie réelle est négative, la solution est stable (exponentielle convergente).

⇨ **Exercice 1.6**

→ **Reprenons l'exemple 1**.

Étudions la stabilité du circuit (1) dans le domaine temporel maintenant. La méthode 1.2 a permis d'obtenir l'équation différentielle suivante : $\left(n+1\right)s(t)+\left(2n+1\right)RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=n\,e(t)$. L'équation sans second membre correspondante est : $\left(n+1\right)s(t)+\left(2n+1\right)RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=0$ de solution

$s_H(t) = A\exp(-t/\tau)$ avec $\tau = RC(2n+1)/(n-1)$. Cette solution tend vers 0 : le système est donc stable. En fait, tout système linéaire **passif** (composé de $R$, $L$ ou $C$, donc sans apport d'énergie) est stable.

→ **Reprenons l'exemple 2** avec amplificateur.

Le courant circulant dans le condensateur est le même que celui circulant dans la résistance $R$ :
$i = C\dfrac{\mathrm{d}(e-v')}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v'-s}{R}$. En multipliant cette égalité par $R$ et par $G$ et en remplaçant $Gv'$ par $s$, on a : $RC\dfrac{\mathrm{d}(Ge-s)}{\mathrm{d}t} = s - Gs$ soit $RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + (1-G)s(t) = RCG\dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$.

La solution de l'équation sans second membre est $s_H(t) = A\exp(t/\tau)$ avec $\tau = -\dfrac{RC}{1-G}$.

• La solution de l'ESSM tend vers 0 si $1-G>0$ soit $G<1$. Le système est alors stable. Cela correspond aux 2 coefficients de l'ESSM ($RC$ et $1-G$) tous deux de même signe.

• La solution de l'ESSM tend vers $\pm\infty$ si $1-G<0$ soit $G>1$. Le système est alors instable. Cela correspond aux coefficients de l'ESSM ($RC$ et $1-G$) de signes différents.

Cette méthode est plus calculatoire que la méthode 1.8, mais a l'avantage d'être applicable également dans d'autres domaines que l'électronique, comme en mécanique par exemple.

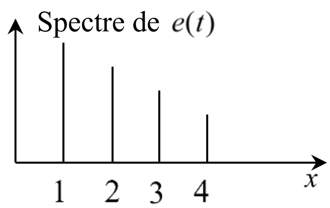
## Vrai/Faux

| | | Vrai | Faux |
|---|---|---|---|
| **1.** | Nous obtenons un signal en sortie du système LCI $s(t)$ jugé trop faible. Suffit-il d'augmenter $e(t)$ d'un facteur 10 pour avoir un signal $s(t)$ 10 fois plus important ? | ☐ | ☐ |
| **2.** | En sortie de l'alternateur d'une éolienne, la tension produite est sinusoïdale de 600 V et 200 Hz. Il est possible de concevoir un convertisseur linéaire pour ensuite injecter la tension sur le réseau électrique à 230 V et 50 Hz. | ☐ | ☐ |
| **3.** | Un signal sinusoïdal en entrée $e(t)$ d'un système linéaire donne nécessairement un signal sinusoïdal de même fréquence en sortie, mais d'amplitude différente et déphasé. | ☐ | ☐ |
| **4.** | Un signal carré en entrée $e(t)$ d'un système linéaire donne nécessairement un signal carré en sortie de même période, mais d'amplitude différente et déphasé. | ☐ | ☐ |
| **5.** | Il y a exactement les mêmes raies dans le spectre du signal de sortie que dans le spectre du signal d'entrée. | ☐ | ☐ |
| **6.** | Pour obtenir la hauteur des raies $\omega_i$ du spectre en amplitude du signal de sortie, il suffit de connaître celles du signal d'entrée et de multiplier, pour chacune, leur hauteur respective par $\left\|\underline{H}(\omega = \omega_i)\right\|$. | ☐ | ☐ |
| **7.** | Soit un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. Un signal $e(t) = E\cos(\omega_0 t)$ placé à son entrée donne en sortie une réponse $s(t) = \underline{H}(j\omega_0)E\cos(\omega_0 t)$. | ☐ | ☐ |
| **8.** | Un filtre intégrateur a une fonction de transfert de la forme $H(p) = \dfrac{H_0}{p}$. | ☐ | ☐ |
| **9.** | Pour pouvoir transposer une fonction de transfert du domaine fréquentiel au domaine temporel, il faut obligatoirement utiliser des signaux sinusoïdaux. | ☐ | ☐ |
| **10.** | La solution particulière de l'équation différentielle d'un système linéaire donne le régime établi vers lequel $s(t)$ va converger au bout d'un certain temps. | ☐ | ☐ |

# Énoncé des exercices

## Exercice 1.1. Linéarité et caractéristique d'un filtre

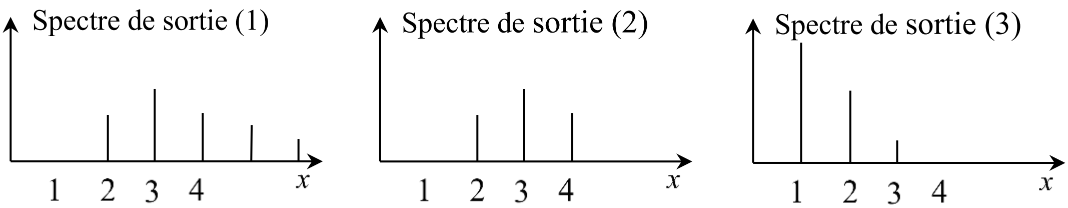
On envoie en entrée de différents filtres le signal $e(t)$ dont le spectre en amplitude est représenté en figure ci-contre. On note $x = f / f_0$ avec $f_0 = 1\,\text{kHz}$.




On obtient en sortie des filtres (1), (2) et (3) un signal $s(t)$ dont les spectres en amplitude sont donnés en figure ci-dessous.

**1.** Quel est (ou quels sont) le(s) filtre(s) non linéaire(s) ?

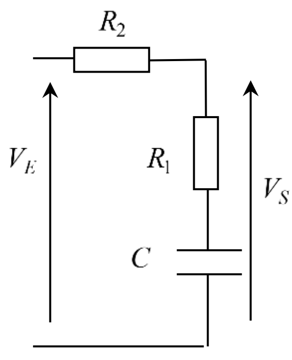
**2.** Caractérisez les filtres linéaires, et donnez un ordre de grandeur de leurs fréquences de coupure.




*D'après oraux Banque PT*

## Exercice 1.2. Étude d'un filtre

Considérons le circuit ci-contre, composé d'un condensateur de capacité $C = 10\,\text{nF}$ et de deux résistances $R_1 = 10\,\text{k}\Omega$ et $R_2 = 90\,\text{k}\Omega$.




**1.** Déterminer le rapport d'amplitude $\left|\underline{V}_S / \underline{V}_E\right|$ à basse fréquence et haute fréquence en raisonnant directement sur le schéma.

**2.** Déterminer $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E}$ sous la forme $\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$.

**3.** Donner le diagramme de Bode asymptotique en amplitude à partir des deux fonctions de transfert du 1er ordre.

**4.** Déterminer la pulsation de coupure à $-3$ dB.

**5.** Donner l'équation différentielle de $V_S(t)$ en fonction de $V_E(t)$.

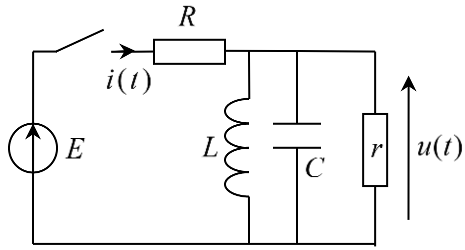
**6.** On place un signal d'entrée $V_E(t) = A\cos^2(\omega t)$ avec $A = 1\,\text{V}$ et $\omega = 5.10^4$ rad/s. Déterminer le signal de sortie.

**7.** On place maintenant en entrée un échelon de tension unitaire à $t = 0$ : $V_E(t > 0) = A$. On précise que toutes les tensions étaient nulles avant $t = 0$, et que le condensateur était déchargé. Déterminer le signal de sortie. Tracez l'allure de $V_S(t)$.

*D'après Banque PT*

### ❑ Exercice 1.3. Étude temporelle d'un circuit électrique

On considère le circuit électrique ci-contre. Avant de fermer l'interrupteur, toutes les tensions et toutes les intensités étaient nulles.




1. Rappeler la définition d'un générateur idéal de tension.

À $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

2. En notant $u(t)$ la tension aux bornes de la résistance $r$, déterminer toutes les tensions et les intensités initiales du circuit à $t = 0^+$.
3. Reprendre l'étude précédente en déterminant les valeurs des intensités et de la tension aux bornes de la bobine, du condensateur et des résistances au bout d'un temps très long.
4. Déterminer l'équation différentielle régissant la valeur de $u(t)$ dans le circuit. Quelle condition doit satisfaire $R$, $r$, $L$ et $C$ pour obtenir un régime pseudopériodique ?

*D'après Concours Commun Polytechnique*

### ❑ Exercice 1.4. Action d'un filtre d'ordre 2 sur divers signaux

On considère un quadripôle électronique linéaire ayant la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H} = \frac{j\dfrac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}} \qquad \text{où} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

1. Quelle est la nature du filtre ?
2. Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour $Q = 10$.
3. Donner un exemple de circuit permettant d'obtenir ce filtre. Exprimer $Q$ et $\omega_0$ en fonction des valeurs des composants choisis.
4. Donner la réponse $s(t)$ en sortie pour un signal d'entrée $e(t) = E_0 \cos^2(\frac{\omega_0}{2} t)$.
5. Donner l'allure de la réponse en sortie pour une entrée en créneau $+E_0 / -E_0$ avec $\omega \gg \omega_0$ et $Q$ petit.
6. Même question pour un créneau en entrée avec $\omega = \omega_0$ et $Q >> 1$.

*D'après concours Centrale-Supélec*

### ❑ Exercice 1.5. Filtrage d'un signal sonore

Pour analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore (analyse des phonèmes du langage par exemple), on utilise un transducteur (microphone) qui convertit le signal en une tension $v_e$, puis un filtre passe-bande qui extrait les composantes sinusoïdales de $v_e$ de fréquences voisines d'une fréquence $f_0$ donnée.

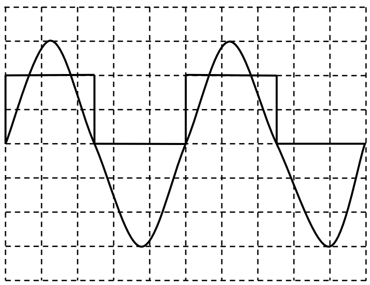
On note $v_s$ la tension de sortie du filtre. Le filtre est un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit : $\underline{F}(j\omega) = \dfrac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \dfrac{F_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

On se propose de déterminer les caractéristiques $F_0$, $Q$ et $\omega_0$ du filtre à partir des oscillogrammes obtenus en régime périodique pour une tension d'entrée $v_e$ rectangulaire pour deux valeurs de fréquences.

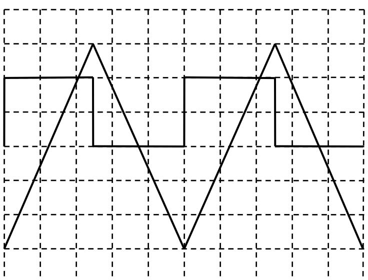
On rappelle la décomposition en série de Fourier de $v_e(t)$ dans le cas où $v_e(t)$ est périodique de période $T$ avec :

$\rightarrow$ pour $0 \le t \le T/2$ : $v_e(t) = V_0$ ; $\rightarrow$ pour $T/2 \le t \le T$ : $v_e(t) = 0$ :

$$v_e(t) = V_0\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left(\left(2k+1\right)\omega_1 t\right)\right) \text{ avec } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$



Première expérience



Deuxième expérience

**Première expérience** (oscillogramme ci-contre) :

$\rightarrow$ voies 1 et 2 en position DC

$\rightarrow$ base de temps : $50\ \mu s$ par carreau

$\rightarrow$ voie 1 (rectangle) : $0{,}5$ V par carreau

$\rightarrow$ voie 2 : 2 V par carreau

Dans cette expérience :

$\rightarrow$ la tension $v_s$ obtenue est quasi sinusoïdale ;

$\rightarrow$ si on augmente la fréquence de $v_e$ par rapport à la valeur correspondant à cet oscillogramme, on constate que l'amplitude de $v_s$ diminue ;

$\rightarrow$ si, par rapport à cette même fréquence, on diminue légèrement la fréquence de $v_e$, on constate que l'amplitude de $v_s$ diminue également.

**Deuxième expérience** (oscillogramme ci-contre) :

$\rightarrow$ voies 1 et 2 en position DC

$\rightarrow$ base de temps : $5\ \mu s$ par carreau

$\rightarrow$ voie 1 (rectangle) : 2 V par carreau

$\rightarrow$ voie 2 : $0{,}2$ V par carreau

Dans ce qui suit, on ne demande pas de calculs d'incertitudes, mais les mesures devront être faites avec soin (tous les résultats devront être obtenus avec une incertitude relative inférieure à 10 %).

**1.** Pourquoi, dans chaque expérience, la tension de sortie $v_s$ ne comporte-t-elle pas de composante continue contrairement à la tension d'entrée $v_e$ ?

**2.** **Première expérience :** pourquoi peut-on obtenir une tension de sortie $v_s$ quasi sinusoïdale alors que la tension d'entrée est rectangulaire ?

**3.** Déduire de l'oscillogramme de la première expérience et du commentaire qui l'accompagne :

**a)** la pulsation $\omega_0$,

**b)** la valeur de $F_0$.

**4. Dans la deuxième expérience**, $v_s$ est triangulaire alors que $v_e$ est rectangulaire. Le filtre a un comportement intégrateur.

**a)** Donner l'expression approchée de $\underline{F}(j\omega)$ dans le domaine de fréquence correspondant à la deuxième expérience.

**b)** En utilisant l'oscillogramme de la deuxième expérience, déterminer, en justifiant précisément la méthode utilisée, le rapport $F_0\omega_0/Q$ (on se souviendra – voir question 1 – que la composante continue de $v_e$ n'est pas intégrée).

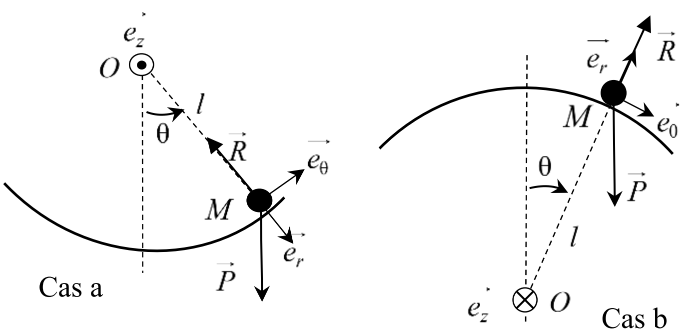
En déduire la valeur de $Q$.

*D'après Concours Commun Polytechnique*

## ❑ Exercice 1.6. Stabilité d'un système linéaire en mécanique et en électronique

**1. Mécanique**

Une particule $M$ supposée ponctuelle de masse $m$ se déplace dans le creux d'une calotte de glace de forme circulaire de centre $O$ de rayon de courbure $l$ (cas a), puis sur le sommet d'une calotte de glace de forme circulaire de centre $O$ de rayon $l$ (cas b). On suppose qu'il n'y a pas de frottement solide, mais simplement un faible frottement de type fluide $-\alpha\vec{v}(M)$, et que le déplacement se limite au plan perpendiculaire à $\vec{e}_z$. On note $\Re$ le référentiel supposé galiléen lié aux calottes.




**a)** Déterminer l'équation du mouvement de M pour de petits angles $\theta$ dans les deux cas. Comparer les signes des coefficients dans les 2 équations différentielles.

**b)** Déduire des équations précédentes la position d'équilibre relative à chaque situation.

**c)** Que se passe-t-il si l'on écarte très légèrement la masse de sa position d'équilibre ? Donner la forme des solutions sans chercher à expliciter les constantes d'intégration. Discuter de la stabilité.

**2.** **Électricité**

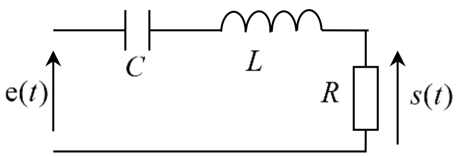
Considérons un circuit $R\ L\ C$ (cas a'), avec $R$ petite (faible amortissement) et $s(t)$ la tension aux bornes de $R$, et un circuit $R\ L\ C$ avec amplificateur de gain $G = 2$ (cas b').

**a)** Établir l'équation différentielle reliant $e$ et $s$ dans les deux cas. Les simplifier pour $e(t) = 0$ (régime libre). Comparer les signes des coefficients dans les 2 équations différentielles. Peut-on faire une analogie avec l'étude mécanique précédente ?

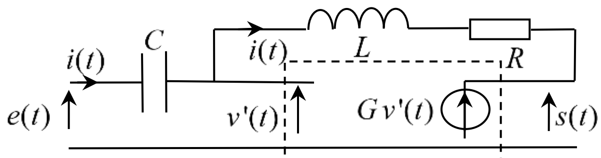
**b)** En déduire le « régime établi » dans les 2 cas.

**c)** Que se passe-t-il si une légère perturbation écarte le signal de sortie de son régime établi ? Donner la forme des solutions sans chercher à expliciter les constantes d'intégration. Discuter de la stabilité.

**3.** Commenter et comparez les résultats obtenus dans les 2 situations (mécanique et électrique).




Cas a'




Cas b' Amplificateur

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 1.1.* Un filtre linéaire ne fait pas apparaître de nouvelles fréquences.
*Exercice 1.2.* Question 1 : utiliser un pont diviseur de tension. Question 2 : si $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$ alors $G_{\text{dB}} = G_{\text{dB1}} + G_{\text{dB2}}$.
*Exercice 1.3.* Question 3 : au bout d'un temps très long, le régime est établi. Or $E = \text{cte}$ donc tous les signaux sont constants.
*Exercice 1.4.* Question 3 : *R, L* et *C* placés en série permettent de réaliser les principaux filtres d'ordre 2. Question 5 : chercher l'équivalent de $\underline{H}$ à hautes fréquences pour connaître son comportement.
*Exercice 1.6.* Appliquer le théorème du moment cinétique.

# ■■ Corrigé des vrai/faux

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vrai | faux | vrai | faux | faux | vrai | faux | vrai | faux | faux |

**1.** Oui… en théorie (!), car c'est la définition même d'un système linéaire. Mais il convient en pratique de se méfier des effets non linéaires apparaissant souvent à niveau plus élevé (distorsion de la source, saturation du signal dans certains composants,…).
**2.** Un convertisseur **linéaire** peut modifier la tension et l'abaisser de 600 V à 230 V, mais ne peut pas modifier la fréquence. On doit donc avoir recours à des éléments non linéaires. En pratique, la tension est redressée en tension continue, puis un onduleur la transforme en tension sinusoïdale de fréquence adaptée.
**4.** Bien que le signal carré en entrée puisse se décomposer en série de Fourier, chaque terme de la série de Fourier sera affecté différemment par le filtre linéaire : les termes de la série seront plus ou moins atténués, plus ou moins déphasés. La série de Fourier en sortie a donc toutes les chances de ne pas être celle d'un carré !
**5.** Il est vrai qu'un système linéaire ne peut pas faire apparaître de nouvelles raies, mais par contre il peut en faire disparaître.
**7.** Il ne faut pas mélanger écritures réelles et complexes !
**10.** Un système instable a une solution qui diverge de la solution particulière.

### ❑ Les erreurs classiques

→ Ne pas savoir distinguer un filtre linéaire d'un système non linéaire.
→ Ne pas savoir trouver rapidement (sans calculs) les caractéristiques d'un filtre.
→ Multiplier les inconnues dans le calcul de la fonction de transfert.
→ Mélanger les écritures réelles et complexes : il faut choisir entre domaine temporel (réels) et fréquentiel (complexes) !
→ Ne pas savoir résoudre une équation différentielle à coefficients constants avec second membre constant.
→ Vouloir systématiquement résoudre l'équation différentielle pour obtenir le signal de sortie. Si l'entrée $e(t)$ est périodique, il est préférable de raisonner dans le domaine fréquentiel !

# Corrigé des exercices

## Exercice 1.1

**1.** Le sinus est une fonction isomorphe des filtres linéaires. Cela signifie qu'un filtre linéaire ne peut pas faire apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre.
Le filtre (1) comporte 2 raies supplémentaires à 5 et $6\,\text{kHz}$. Il est donc non linéaire.

Par contre, les filtres (2) et (3) semblent linéaires.

> ✎ *Un filtre linéaire ne peut pas faire apparaître de nouvelles raies, mais à l'inverse, il peut en faire disparaître : c'est le principe du filtrage.*

**2.** Le filtre (2) supprime la raie 1, atténue un peu la raie 2, et garde inchangées les raies 3 et 4. Il s'agit d'un passe haut dont la fréquence de coupure est voisine de $2\,\text{kHz}$. Il pourrait aussi s'agir d'un passe-bande dont la bande passante est $\left[2\,\text{kHz} - f_{\text{coup2}}\right]$ avec $f_{\text{coup2}} > 4\,\text{kHz}$.

Le filtre (3) garde intactes les raies 1 et 2, atténue la raie 3, et supprime la raie 4. C'est un filtre passe bas de fréquence de coupure voisine de $3\,\text{kHz}$.

➪ *Méthode 1.6*

## Exercice 1.2

**1.** $\rightarrow$ À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Le courant ne peut donc pas circuler, donc la tension aux bornes de $R_2$ est nulle, soit $V_E = V_S$. $\left|\underline{H}\right|_{\text{BF}} = 1$ soit $G_{\text{dB BF}} = 0$.

$\rightarrow$ À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil. Un pont diviseur de tension entre $R_1$ et $R_2$ donne , soit $V_S = R_1 / \left(R_1 + R_2\right) V_E$.

$\left|\underline{H}\right|_{\text{HF}} = 1/10$ soit $G_{\text{dB HF}} = -20$.

➪ *Méthode 1.4*

**2.** Un pont diviseur de tension donne $\dfrac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = \dfrac{\underline{Z}_C + R_1}{\underline{Z}_C + R_1 + R_2} = \dfrac{1/jC\omega + R_1}{1/jC\omega + R_1 + R_2}$.

Après multiplication du numérateur et du dénominateur par $jC\omega$, il vient :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1 + jR_1C\omega}{1 + j\left(R_1 + R_2\right)C\omega} = H_0\frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}}.$$

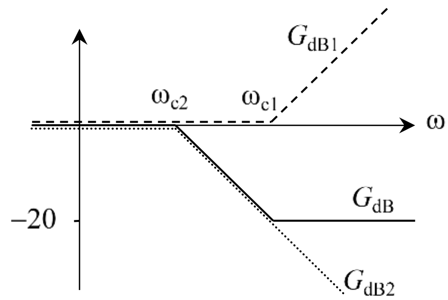
avec $H_0 = 1$, $\tau_1 = R_1C = 10^{-4}\,\text{s}$ et $\tau_2 = \left(R_1 + R_2\right)C = 10^{-3}\,\text{s}$.

➪ *Méthode 1.1*

**3.** La fonction de transfert s'écrit $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$ avec $\underline{H}_1 = 1 + j\omega\tau_1$ et $\underline{H}_2 = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau_2}$.

Corrigé

$\rightarrow$ $\underline{H}_2$ correspond à un filtre passe bas classique du 1[er] ordre de pulsation de coupure :
$\omega_{c2} = 1/\tau_2 = 10^3$ rad/s .
$\rightarrow$ $\underline{H}'_1 = 1/\underline{H}_1$ correspond également à un filtre passe bas du 1[er] ordre de pulsation de coupure : $\omega_{c1} = 1/\tau_1 = 10^4$ rad/s .




Or
$G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 20\log|(1/\underline{H}'_1)\cdot\underline{H}_2| = 20\log|\underline{H}_2| - 20\log|\underline{H}'_1| = G_{dB2} - G'_{dB1}$.
Il suffit de tracer les diagrammes de Bode des filtres $G_{dB1}$ (avec $G_{dB1} = -G'_{dB1}$) et $G_{dB2}$ et de les additionner.

**4.** La pulsation de coupure à $-3\text{dB}$ est donnée par $|\underline{H}_c| = |\underline{H}|_{\max}/\sqrt{2}$. Ici $|\underline{H}|_{\max} = 1$ correspond au gain statique. $|\underline{H}_c| = 1/\sqrt{2}$ donne $\dfrac{1+\omega_c^2\tau_1^2}{1+\omega_c^2\tau_2^2} = \dfrac{1}{2}$ en mettant l'égalité au carré, soit : $2 + 2\omega_c^2\tau_1^2 = 1 + \omega_c^2\tau_2^2$ et donc $(\tau_2^2 - 2\tau_1^2)\omega_c^2 = 1$, qui n'existe que si $\tau_2 > \tau_1$, ce qui est vérifié ici.

Dans ce cas : $\boxed{\omega_c = \dfrac{1}{\sqrt{\tau_2^2 - 2\tau_1^2}} = 1{,}01.10^3 \text{ rad/s}}$.

Cette pulsation de coupure correspond quasiment à celle du filtre passe bas $\underline{H}_2$ .

**5.** La fonction de transfert déterminée à la question 1. s'écrit en notation de Laplace : $H = \dfrac{V_S}{V_E} = \dfrac{1+\tau_1 p}{1+\tau_2 p}$ soit $[1+\tau_2 p]V_S = [1+\tau_1 p]V_E$. La transposition dans le domaine temporel donne : $\boxed{\tau_2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_S(t) + V_S(t) = \tau_1 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_E(t) + V_E(t)}$.

⇨ *Méthode 1.3*

✐ *Il est possible également de déterminer l'équation différentielle à partir de la loi des mailles, sans partir de $H$ . Toutefois, il est généralement plus rapide de transposer la fonction de transfert, surtout quand elle a été déjà calculée dans la question précédente !*

**6.** Le signal d'entrée est périodique. Nous recherchons donc le signal de sortie en régime établi, à partir de la fonction de transfert.

⇨ *Méthode 1.6*

💣 *Il serait vain de vouloir partir de l'équation différentielle pour rechercher la solution $V_S(t)$ ! En effet, seule la solution particulière est recherchée (régime établi). Or le second membre est variable donc la solution particulière est difficile à trouver sur l'équation différentielle !*

Commençons par décomposer en série de Fourier le signal d'entrée $e(t)$ ce qui se fait simplement en linéarisant le carré du cosinus : $e(t) = A\cos^2(\omega t) = \mathrm{A}/2 + \mathrm{A}/2\cos(2\omega t)$.
La série de Fourier contient donc 2 termes :
→ A/2 est la composante continue, correspondant à $\omega = 0$. Or $|\underline{H}(\omega = 0)| = 1$, donc la composante continue du signal de sortie est $A/2 \cdot 1 = A/2$.
→ $\mathrm{A}/2\cos(2\omega t)$ est une composante alternative de pulsation $\omega' = 2\omega = 10^5\,\mathrm{rad/s}$.
$|\underline{H}(\omega')| = \dfrac{\sqrt{1+\omega'^2\tau_1^2}}{\sqrt{1+\omega'^2\tau_2^2}} = 0{,}10$ et $\mathrm{Arg}(\underline{H}) = \arctan(\omega'\tau_1) - \arctan(\omega'\tau_2) = -0{,}09\,\mathrm{rad}$.
La composante alternative du signal est donc $0{,}1 \cdot \mathrm{A}/2\cos(2\omega t - 0{,}09)$.

Le signal de sortie est la somme de ces composantes : $\boxed{V_S(t) = \dfrac{A}{2} + \dfrac{A}{20}\cos(2\omega t - 0{,}09)}$.

**7.** Partons de l'équation différentielle obtenue dans la question 4. Pour $t > 0$, $V_E(t) = A$ constante donc l'équation différentielle se simplifie : $\tau_2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_S(t) + V_S(t) = A$.

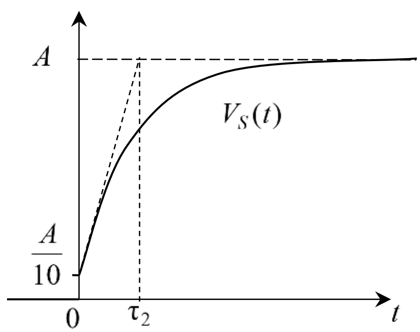
⇨ *Méthode 1.7*

La solution particulière est $V_{S\mathrm{p}} = A$ et la solution de l'équation homogène est $V_{S\mathrm{h}} = \alpha\exp(-t/\tau_2)$. La solution générale est donc $V_S = A + \alpha\exp(-t/\tau_2)$ avec $\alpha$ une constante à déterminer à l'aide de la condition initiale.

✎ *Pour un système d'ordre 1, il y a 1 constante à déterminer, et 1 condition initiale ; pour un système d'ordre 2, il y aurait 2 constantes à déterminer à l'aide de 2 conditions initiales.*

La condition initiale est donnée par la continuité de la tension aux bornes du condensateur, soit $U_C(t = 0^+) = 0$. Or $V_E(t = 0^+) = A$, qui se partage donc entre $R_1$ et $R_2$ selon un pont diviseur de tension :
$V_S(0^+) = U_C(0^+) + U_{R_1}(0^+) = 0 + R_1/(R_1 + R_2)A$.
Cette condition appliquée à la solution générale donne $A + \alpha = R_1/(R_1 + R_2)A$ soit $\alpha = -AR_2/(R_1 + R_2)$.

Finalement : $\boxed{V_S(t) = A\left(1 - \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\exp(-t/\tau_2)\right)}$




💣 *Ne pas conclure hâtivement que la tension $V_S(t)$ est continue donc nulle à $t = 0^+$ à cause de la présence du condensateur : le condensateur impose la continuité de la tension à ses bornes uniquement !*

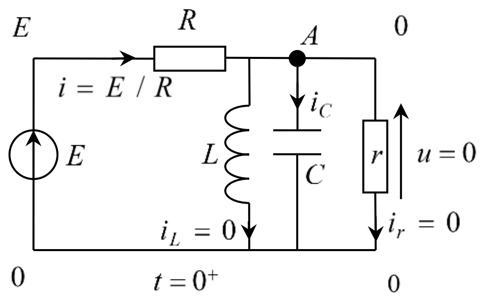
Corrigé

✐ *Le régime établi est la solution particulière. Comme la tension d'entrée est constante, donc statique, la tension du régime établi est donnée par* $A \cdot \left|H(\omega=0)\right| = A$.

## Exercice 1.3

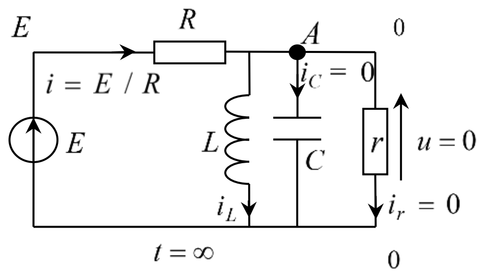
**1.** Un générateur de tension est, par définition, un dipôle actif qui maintient entre ses bornes une tension indépendante du courant qu'il débite.

**2.** Choisissons de noter 0 le potentiel de la ligne en bas du montage. Le condensateur impose la continuité de la tension à ses bornes donc $u(0^+) = 0$, soit $V_A(0^+) = 0$. La tension $u$ est la même aux bornes de $r$, $L$ et $C$, et $i_r(0^+) = u(0^+)/r = 0$. La tension aux bornes de $R$ est $E$, ce qui implique $i(0^+) = E/R$ dans $R$. D'autre part, la bobine impose la continuité du courant donc $i_L(0^+) = 0$.




Enfin, la loi des nœuds appliquée en $A$ à $t = 0^+$ donne $i_C(0^+) = i(0^+) - i_r(0^+) - i_L(0^+) = E/R$.

**3.** Au bout d'un temps très long, le régime établi est atteint. Pour un signal d'entrée constant, le régime établi correspond à une constante : toutes les tensions et intensités sont constantes. Or $u = u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ avec $i_L$ constant donc $u(\infty) = 0$ et par conséquent $i_r(\infty) = u(\infty)/r = 0$ soit $V_A(\infty) = 0$. La tension aux bornes de $R$ est $E$, ce qui implique $i(\infty) = E/R$ dans $R$.




D'autre part $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ avec $u$ constant donc $i_C(\infty) = 0$.

Enfin, la loi des nœuds appliquée en $A$ à $t = \infty$ donne $i_L(\infty) = i(\infty) - i_r(\infty) - i_C(\infty) = E/R$.

**4.** Il est possible de déterminer directement l'équation différentielle en partant de la loi des nœuds en A dans le domaine temporel : $i = i_L + i_C + i_r$. (1)

➪ *Méthode 1.2*

Or $i = (E-u)/R$, $i_L = 1/L\displaystyle\int u(t)dt$, $i_C = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ et $i_r = u/r$.

En remplaçant les intensités dans la loi des nœuds (1) et en dérivant temporellement l'équation obtenue pour fait disparaître l'intégrale dans $i_L$, il vient $\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}(E-u)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{L}u + C\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ soit en multipliant par $L$ et sachant que $E$ est constante : $\boxed{LC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + L\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 0}$.

L'autre méthode consiste à se placer dans le domaine fréquentiel et déterminer la fonction de transfert.

➪ *Méthode 1.3*

Notons $Z_{\text{eq}}$ l'impédance équivalente à l'association $r \,//\, C \,//\, L$. Un pont diviseur de tension donne $\dfrac{u}{E} = \dfrac{Z_{\text{eq}}}{Z_{\text{eq}} + R} = \dfrac{1}{1 + R\dfrac{1}{Z_{\text{eq}}}}$ avec $\dfrac{1}{Z_{\text{eq}}} = \dfrac{1}{L\,p} + C\,p + \dfrac{1}{r}$ en notation de Laplace, soit

$$\frac{u}{E} = \frac{1}{1 + R\left(\dfrac{1}{L\,p} + C\,p + \dfrac{1}{r}\right)} = \frac{L\,p}{R + \left(1 + \dfrac{R}{r}\right)L\,p + RLC\,p^2}. \quad (1)$$

> *Ne pas chercher à calculer $Z_{\text{eq}}$ directement avant d'appliquer le pont diviseur de tension, ce qui serait très lourd en calculs ! Quand il y a plusieurs impédances en parallèle, il faut faire apparaître $1/Z_{\text{eq}}$ dans l'expression de H, puis remplacer $1/Z_{\text{eq}}$ par la somme des admittances.*

Transposons la fonction de transfert (1) dans le domaine temporel :

$$\left[R + \left(1 + \frac{R}{r}\right)L\,p + RLC\,p^2\right]u = \left[L\,p\right]E,$$

ce qui donne avec $E$ constante et en divisant par $R$ : $\boxed{LC\dfrac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}\right)L\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0}$.

Pour obtenir un régime pseudo-périodique, il faut $\Delta_{\text{équation caractéristique}} < 0$.

L'équation caractéristique étant $LC\,p^2 + \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}\right)L\,p + 1 = 0$, la condition à satisfaire est $\Delta_{\text{EC}} = \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}\right)^2 L^2 - 4LC < 0$, soit $\boxed{\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}\right) < 2\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$.

> ✐ *L'équation caractéristique est simplement le polynôme au dénominateur de la fonction de transfert.*

## Exercice 1.4

**1.** Le filtre est un passe bande, car il n'y a pas de terme de degré 0 ni de degré 2 dans le polynôme du numérateur.

➪ *Méthode 1.5*

$$\underline{H} = \frac{j\dfrac{x}{Q}}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$$

Ce résultat se retrouve sur les équivalents basse et haute fréquence :

$\rightarrow$ à BF, $\underline{H} \sim \dfrac{j\,x/Q}{1} = j\dfrac{x}{Q}$ et $|\underline{H}| \xrightarrow{x \to 0} 0$

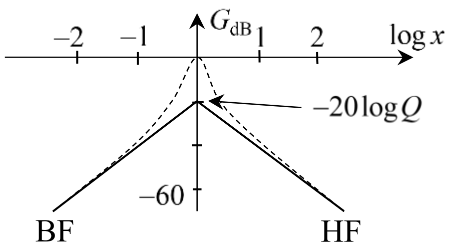
$\rightarrow$ à HF, $\underline{H} \sim \dfrac{jx/Q}{-x^2} = -j\dfrac{1}{Qx}$ et $|\underline{H}| \xrightarrow{x\to\infty} 0$.

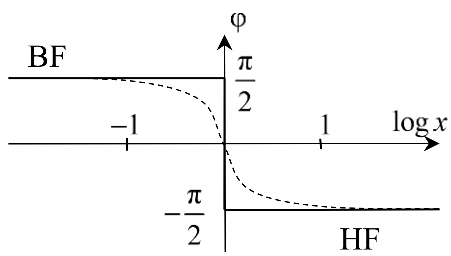
**2.** À partir des équivalents sont déduites les asymptotes des diagrammes de Bode :

| | Équivalent | $G_{dB} = 20\log\|\underline{H}\|$ | $\varphi = \arg(\underline{H})$ |
|---|---|---|---|
| BF | $\underline{H} \sim j\dfrac{x}{Q}$ | $G_{dB\,BF} = 20\log x - 20\log Q$ | $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ |
| HF | $\underline{H} \sim -j\dfrac{1}{Qx}$ | $G_{dB\,HF} = -20\log x - 20\log Q$ | $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ |

*Il est beaucoup plus simple d'écrire d'abord les équivalents de $\underline{H}$, puis ensuite d'en déduire les asymptotes, plutôt que de commencer par exprimer le gain et la phase sur $\underline{H}$ puis d'essayer de les simplifier ensuite.*

Remarquons que $\underline{H}(x=1)=1$ (indépendant de $Q$) donc la courbe réelle (en pointillés sur le diagramme) passe par $G_{dB}(x=1)=0$ et $\varphi(x=1)=0$.



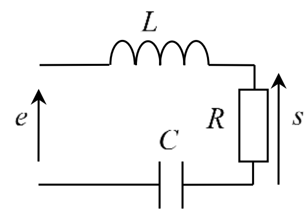




**3.** Un circuit $R\ L\ C$ permet la réalisation d'un passe-bande : la tension de sortie $s$ est prise aux bornes de $R$.

➩ *Méthode 1.1*

Appliquons un pont diviseur de tension aux bornes de $R$ :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{R}{R + jL\omega + 1/jC\omega} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}.$$




En identifiant avec la forme de la fonction de transfert proposée, il vient : $\dfrac{1}{\omega_0 Q} = RC$ et $\dfrac{1}{\omega_0^2} = LC$ soit :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

**4.** Le signal d'entrée est périodique. Commençons par le décomposer en série de Fourier, ce qui s'obtient simplement en linéarisant le carré :

$$e(t) = E_0 \cos^2\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) = \frac{E_0}{2}\left(1 + \cos(\omega_0 t)\right).$$

➩ *Méthode 1.6*

→ Le premier terme de la série est la composante continue $E_0/2$. Elle est multipliée en sortie par $|\underline{H}(x=0)|$. Or $|\underline{H}(x=0)|=0$ : il n'y a donc plus de composante continue en sortie.

→ Le terme suivant de la série est $(E_0/2)\cos(\omega_0 t)$. La pulsation $\omega=\omega_0$ correspond à $x=1$. Or nous avons vu à la question 2 que $|\underline{H}(x=1)|=1$ et $\varphi(x=1)=0$. Cette composante de la série a son amplitude conservée et n'est pas déphasée.
Le signal de sortie est donc $s(t)=(E_0/2)\cos(\omega_0 t)$.

**5.** À haute fréquence $\omega >> \omega_0$, on a $\underline{H} \sim -j\dfrac{1}{Qx}=\dfrac{1}{p}\dfrac{\omega_0}{Q}$. La fonction de transfert est en $1/p$ : c'est un intégrateur. L'intégration d'un signal créneau $+E_0/-E_0$ donne un signal triangulaire. La condition $Q$ petit est nécessaire pour ne pas avoir un signal trop faible en amplitude en sortie, ce qui pourrait se produire car $x>>1$.

**6.** Il faudrait théoriquement décomposer le signal en série de Fourier et calculer la sortie correspondant à chaque terme. Le signal créneau étant périodique, les pulsations des termes de la série sont des multiples entiers de $\omega_0$. Or l'énoncé spécifie que $Q>>1$, ce qui veut dire que le passe-bande est très sélectif et ne garde que les pulsations très proches de $x=1$ soit dans notre cas uniquement $\omega=\omega_0$. Seule la pulsation fondamentale du créneau passe, donc le signal de sortie est quasi sinusoïdal.

## Exercice 1.5

**1.** Le filtre passe-bande ne laisse pas passer la composante continue : $|\underline{H}(\omega=0)|=0$.

**2.** Si le signal de sortie est quasi sinusoïdal, c'est que le filtre ne laisse passer qu'une seule composante du spectre du signal d'entrée. Or la période du sinus obtenu est la même que celui du carré : la seule composante conservée du carré est donc le fondamental.

**3. a)** La pulsation passante du passe-bande est $\omega_0$, qui correspond à la pulsation du sinus de sortie de la première expérience. On mesure à l'oscilloscope 5 carreaux de $50\,\mu s$ soit $T_0=250\,\mu s$ , ce qui donne $\boxed{\omega_0=2\pi/T_0=2{,}5.10^4 \text{ rad/s}}$.

**b)** La composante fondamentale du carré a une amplitude de $2V_0/\pi$ d'après la décomposition en série de Fourier donnée par l'énoncé. L'amplitude de cette composante de pulsation $\omega_0$ est multipliée par $|\underline{F}(j\omega=j\omega_0)|=F_0$ d'après l'expression de la fonction de transfert. L'amplitude du signal sinusoïdal de sortie est donc $(2V_0/\pi)\cdot F_0$.

⇨ *Méthode 1.6*

La lecture des amplitudes des signaux de l'expérience 1 donne 2 carreaux pour $V_0$ soit $V_0=1$ V et 3 carreaux pour le sinus de sortie soit $(2V_0/\pi)\cdot F_0=6$ V.

On en déduit : $\boxed{F_0=\dfrac{6\pi}{2V_0}=9{,}4}$. La bande passante est amplifiée.

Corrigé

**4. a)** Dans la deuxième expérience, la période a été divisée par 10 (voir base de temps) et donc les pulsations multipliées par 10. On peut considérer que $\omega >> \omega_0$ et rechercher un équivalent de $\underline{F}$ : $\underline{F}(j\omega) \approx \dfrac{F_0}{jQ\omega/\omega_0} = \dfrac{1}{j\omega}\dfrac{F_0\omega_0}{Q}$ ou (en notation de Laplace) $\dfrac{v_s}{v_e} = \dfrac{1}{p}\dfrac{F_0\omega_0}{Q}$ qui se comporte donc comme un intégrateur, ce que l'énoncé confirme.

**b)** La transposition de la fonction de transfert dans le domaine temporel donne $v_s(t) = \dfrac{F_0\omega_0}{Q}\displaystyle\int_0^t v'_e(t')\mathrm{d}t'$. $v'_e$ est la fonction $v_e$ dont on a enlevé la composante continue qui est filtrée (éliminée), donc $v'_e = V_0/2$ pendant la première demi-période. Il vient $v_s(t) = \dfrac{F_0\omega_0}{Q}\dfrac{V_0}{2}t + \text{cte}$ pour $0 \le t \le T/2$. La pente est $\dfrac{F_0\omega_0}{Q}\dfrac{V_0}{2}$ et se lit à l'oscilloscope : montée en tension de 6 carreaux ($1{,}2\,\text{V}$) en une durée de 2,5 carreaux ($12{,}5\,\mu\text{s}$), soit une pente de $1{,}2/12{,}5 = 0{,}096\,\text{V}/\mu\text{s}$. En conclusion $\boxed{Q = \dfrac{F_0\,\omega_0\,V_0}{2\times\text{pente}} = 1{,}22}$.

## Exercice 1.6

**1. a)** Le problème est similaire au pendule pesant simple. Pour le détail des calculs, on pourra se reporter à la méthode 2 du chapitre « Moment cinétique » Prépas sciences 1re année.

→ Pour le cas a) : les forces appliquées sont le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\left(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$, la réaction du support (analogue à la tension du fil du pendule) $\vec{R} = -R\,\vec{e}_r$ et le frottement du type fluide $\vec{F} = -\alpha\vec{v}(M) = -\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Le théorème du moment cinétique appliqué à $M$ par rapport à $O$ est : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_0(M)_\Re}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{P}\right) + \vec{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{T}\right) + \vec{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{F}\right)$ avec $\vec{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{P}\right) = -mgl\sin\theta\,\vec{e}_z$, $\vec{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{T}\right) = \vec{0}$ et $\vec{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{F}\right) = -\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_z$ et $\vec{L}_0(M)_\Re = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$. Le TMC donne donc l'équation différentielle $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - \alpha l\dot{\theta}$. Pour de petits angles, $\sin\theta \approx \theta$ soit $\boxed{ml\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + mg\theta = 0}$. (a)

→ Pour le cas b) : le poids est $\vec{P} = m\vec{g} = mg\left(-\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$, la réaction $\vec{R} = R\,\vec{e}_r$, le frottement $\vec{F} = -\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et l'on a toujours $\vec{L}_0(M)_\Re = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$. Les moments sont alors $\vec{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{P}\right) = mgl\sin\theta\,\vec{e}_z$, $\vec{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{T}\right) = \vec{0}$ et $\vec{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{F}\right) = -\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_z$ et le TMC donne l'équation différentielle : $\boxed{ml\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} - mg\theta = 0}$ (b).

→ (a) : 3 coefficients constants de même signe (positifs) ;
→ (b) : coefficients de signes différents.

✎ *Le cours nous permettrait déjà à ce stade de conclure que (a) est un système stable (mêmes signes) et (b) un système instable (signes différents).*

**b)** À l'équilibre, il y a $\ddot{\theta}=0$ et $\dot{\theta}=0$ donc $mg\theta_{\text{eq}}=0$ soit $\boxed{\theta_{\text{eq}}=0}$ dans les 2 cas. La position d'équilibre correspond à la solution particulière des équations différentielles.

**c)** → L'équation caractéristique de (a) est $mlr^2+\alpha r+mg=0$ et $\Delta_{\text{EC}}=\alpha^2-4m^2gl<0$ car $\alpha$ petit. Les racines de l'EC sont donc $r=\dfrac{-\alpha\pm j\sqrt{-\Delta}}{2ml}$.

La forme de la solution est donc $\theta(t)=A\exp\left(-\dfrac{\alpha}{2ml}t\right)\cos\left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2ml}t+\varphi\right)$. On remarque que $\theta(t)\xrightarrow{t\to\infty}0$. Si l'on écarte légèrement la masse de sa position d'équilibre, elle y revient au bout d'un certain temps. L'équilibre est donc stable.

→ L'équation caractéristique de (b) est $mlr^2+\alpha r-mg=0$ et $\Delta_{\text{EC}}=\alpha^2+4m^2gl>0$. Les racines de l'EC sont donc $r_\pm=\dfrac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4m^2gl}}{2ml}$. Comme $\sqrt{\alpha^2+4m^2gl}>\alpha$, il y a une racine réelle positive $r_+$ et une racine négative réelle négative $r_-$.

La forme de la solution est donc $\theta(t)=A\exp(r_+t)+B\exp(r_-t)$. On remarque que $\theta(t)\xrightarrow{t\to\infty}\pm\infty$ à cause de $\exp(r_+t)$. Si l'on écarte très légèrement la masse (même de manière infime !), $A$ devient non nulle et la masse s'éloigne de la position d'équilibre. L'équilibre est donc instable.

⇨ *Méthode 1.9*

✎ *Si $\alpha$ n'avait pas été petit, les solutions auraient été exponentielles décroissantes au lieu de sinusoïdales pour le cas (a), mais cela n'aurait rien changé à la stabilité : seul le signe des coefficients joue sur la stabilité !*

**2. a)** Calculons la fonction de transfert $\underline{s}/\underline{e}$ pour la transposer ensuite en équation différentielle dans le domaine temporel.

⇨ *Méthode 1.3*

→ Dans le cas (a'), en appliquant un pont diviseur de tension :

$$\boxed{H=\frac{s}{e}=\frac{R}{R+Lp+1/Cp}=\frac{RCp}{1+RCp+LCp^2}}.\quad\text{(a')}$$

Transposons dans le domaine temporel : $\left[1+RCp+LCp^2\right]s=\left[RCp\right]e$ soit en régime libre :

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s(t)+RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)+s(t)=0}.\quad\text{(a')}$$

→ Dans le cas (b'), la loi d'Ohm aux bornes de ($L$ série $R$) s'écrit : $v'-\text{s}=(R+Lp)i$, et la loi d'Ohm aux bornes de $Z_C$ s'écrit : $e-v'=(1/Cp)i$.

✐ *Il s'agit du même courant i dans $C$ et dans $L$ et $R$ car l'impédance d'entrée de l'amplificateur est infinie.*

En combinant les 2 lois d'Ohm pour éliminer i, il vient : $v'-s=(R+L\,p)C\,p(e-v')$ soit, en multipliant l'égalité par $G$ : $G(v'-s)=(R+L\,p)C\,pG(e-v')$. Or $s=Gv'$ donc $s(1-G)=(RC\,p+LC\,p^2)(Ge-s)$. En séparant *s* et *e*, on en déduit :

$$\boxed{H=\frac{s}{e}=\frac{G\left(RC\,p+LC\,p^2\right)\,p^2}{(1-G)+RC\,p+LC\,p^2}}. \quad \text{(b')}$$

Transposons dans le domaine temporel :

$\left[(1-G)+RC\,p+LC\,p^2\right]s=\left[G\left(RC\,p+LC\,p^2\right)\right]e$ soit avec $G=2$ et en régime libre :

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s(t)+RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)-s(t)=0}. \quad \text{(b')}$$

✐ *À ce stade, on peut déjà conclure que (a') est un système stable (3 mêmes signes au dénominateur de H) et (b') un système instable (signes différents au dénominateur de H pour $G=2$ )*

➪ *Méthode 1.8*

**b)** Le régime établi correspond à la solution particulière des équations différentielles, soit ici dans les 2 cas : $s_P=0$. C'est la valeur que prend la sortie *s* au bout d'un temps très long.

**c)** → L'équation différentielle (a') est similaire à celle de (a) en mécanique. L'équation caractéristique pour (a') est $LC\,r^2+RC\,r+1=0$, qui est le dénominateur de $H(p)$ !

La solution est $s(t)=A\exp\left(-\dfrac{R}{2L}t\right)\cos\left(\dfrac{\sqrt{-\Delta_{EC}}}{2LC}t+\varphi\right)$ avec $\Delta_{\mathrm{EC}}=(RC)^2-4LC<0$ car $R$ petit : $s(t)\xrightarrow{t\to\infty}0$. Si une perturbation écarte *s* de son régime établi, le signal de sortie y retourne : le système est stable.

→ L'équation différentielle (b') est similaire à celle de (b) en mécanique. L'équation caractéristique pour (b') est $LC\,r^2+RC\,r-1=0$, qui est le dénominateur de $H(p)$.

La solution est $\mathrm{s}(t)=A\exp(r_+t)+B\exp(r_-t)$ avec $r_\pm=\dfrac{-RC\pm\sqrt{(RC)^2+4LC}}{2LC}$. Comme $r_+>0$ : $s(t)\xrightarrow{t\to\infty}\pm\infty$ (si $A\neq 0$ ). La moindre perturbation va rendre *A* non nulle (même de manière infime) : *s* diverge alors et s'éloigne de sa position d'équilibre. Le système est instable.

➪ *Méthode 1.9*

**3.** La solution particulière donne la position d'équilibre (mécanique) ou le régime établi (électricité). Toutefois, le système tend vers cette solution uniquement si le système est stable !

✐ *En électricité, c'est l'introduction d'un composant actif (amplificateur) qui peut déstabiliser le système : c'est l'objet du chapitre suivant.*