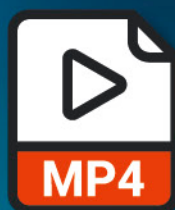


Yves Coudert
Guillaume Ferré

L'ESSENTIEL DE L'ANALYSE EN L1



Avec corrections commentées
d'exercices en **VIDÉOS**



L'essentiel de
l'ANALYSE
en **L1**

L'essentiel de l'**ANALYSE** en **L1**

Yves Coudert
Guillaume Ferré

Professeurs agrégés • Académie de Versailles (78)





Mode d'emploi

Téléchargement des fichiers **vidéo**

1. Créez un compte gratuitement sur la page d'accueil du site des éditions Ellipses : **www.editions-ellipses.fr**
2. Scannez ce QR Code pour accéder directement à l'ouvrage et ses fichiers vidéos (ou saisissez le titre de l'ouvrage / le nom de l'auteur dans la barre de recherche, puis cliquez sur la couverture du livre pour accéder à sa page de présentation générale).
3. Cliquez sur l'onglet « Vidéos » à côté de l'onglet « Description » sous la couverture du livre ou à côté de « lire le sommaire ». Vous pourrez soit regarder directement les vidéos, soit les télécharger pour les regarder hors ligne.



Des mêmes auteurs aux éditions Ellipses :

L'essentiel de l'algèbre en L1, 2025

Des maths au Grand Oral – 1^{re} et Terminale, 2023

ISBN 9782340-116191

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr



Avant-propos

Vous tenez entre les mains le petit frère de l'ouvrage « L'essentiel de l'algèbre en L1 » paru en juillet 2025 aux éditions Ellipses.

Comme son prédécesseur, nous avons pensé ce livre de telle sorte qu'il s'adresse à des apprenants avant tout : nous l'avons écrit et articulé pour qu'il vous apporte un complément concis et solide, vous permettant de renforcer vos connaissances et d'affûter vos réflexes sans vous faire perdre un temps précieux. Vous voyagerez donc cette fois-ci à travers l'essentiel de l'analyse de première année de licence en 8 chapitres et 112 exercices !

Le premier chapitre est consacré aux nombres réels et pose le cadre général dans lequel nous travaillerons tout au long de l'ouvrage. Les chapitres 2 à 6 traitent des fondamentaux incontournables (suites numériques, limites de fonctions, continuité et dérivation, fonctions usuelles) pour aborder les thèmes suivants. Dans le chapitre 6, nous étudions le comportement local des fonctions à travers la notion de développement limité. Le chapitre 7 présente les primitives et le calcul intégral qui constituent un noyau fondamental dans les connaissances exigibles en première année. Nous traitons enfin, dans le dernier chapitre, des équations différentielles linéaires du premier et du second ordre en présentant quelques applications concrètes dans différents domaines.

Pour chaque thème abordé, les rappels de cours proposés se veulent exhaustifs mais ne contiennent volontairement pas de démonstration des résultats annoncés pour ne pas alourdir le livre (nous vous laissons vous tourner vers votre professeur préféré si besoin !). Vous trouverez ensuite un ensemble d'exercices guidés, dont le niveau de difficulté est indiqué à l'aide d'étoiles, ciblant l'essentiel des connaissances et réflexes à acquérir, et accompagnés d'une correction rigoureuse et détaillée. Nous avons aussi fait le choix de compléter certains corrigés par une vidéo que vous trouverez sur le site des éditions Ellipses.

Nous vous souhaitons une bonne lecture et un très bon travail, et nous vous laissons avec ce conseil avisé de Winston Churchill :

« Agissez comme s'il était impossible d'échouer. »



Sommaire

Chapitre 1

Nombres réels	7
Exercices	15
Correction des exercices	17

Chapitre 2

Suites numériques	25
Exercices	48
Correction des exercices	53

Chapitre 3

Limites de fonctions	67
Exercices	90
Correction des exercices	93

Chapitre 4

Continuité et dérivation	109
Exercices	137
Correction des exercices	141

Chapitre 5

Fonctions usuelles	155
Exercices	166
Correction des exercices	168

Chapitre 6

Développements limités	179
Exercices	201
Correction des exercices	205

Chapitre 7

Intégration	223
Exercices	242
Correction des exercices	245

Chapitre 8

Équations différentielles	269
Exercices	283
Correction des exercices	287

Nombres réels

Dans ce chapitre nous allons aborder quelques propriétés de l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, rencontré sous différentes formes au lycée, en particulier en introduisant certains de ses sous-ensembles comme $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Cette étude plus fine de $\mathbb{R}$ est importante pour une meilleure compréhension des autres chapitres de cet ouvrage.

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Définition : Un **nombre réel** x peut être vu comme une collection de chiffres $a_0, \dots, a_m$ et $b_1, \dots, b_n, \dots$ tous compris entre 0 et 9, avec m un entier naturel et éventuellement une infinité de chiffres b_i . Dans cette écriture, on fait correspondre à cette collection le **développement décimal** suivant :

$$x = a_0 \dots a_m, b_1 \dots b_n \dots$$

Exemples :

1. Si x est un nombre décimal alors on peut écrire

$$x = a_0 \dots a_m, b_1 \dots b_n = \sum_{i=0}^m a_i 10^i + \sum_{j=1}^n b_j 10^{-j}.$$

Il s'agit bien d'un nombre réel.

2. Un nombre rationnel admet un développement décimal, c'est donc un réel.

Par exemple, $x = \frac{1}{3} = 0,333 \dots$

3. Le nombre π , défini comme le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, est un nombre réel où $a_0 = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = 4$, $b_3 = 1 \dots$ mais ce n'est pas un nombre rationnel et il est impossible de le définir rigoureusement par un développement décimal.

Remarques :

1. Pour la définition d'un nombre réel, nous avons pris comme référence la base 10 mais nous pourrions obtenir une définition équivalente avec une autre base de numérotation.



2. Il existe des constructions plus intrinsèques des nombres réels mais qui ne sont pas prévues dans le cadre de l'enseignement habituel en première année de licence.

3. Un nombre réel peut avoir des développements décimaux distincts. Par exemple, $1 = 0,999 \dots = \frac{9}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots \right)$.

Voir pour cela le chapitre 2 sur les sommes de termes des suites géométriques.

4. Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

5. Enfin, nous avons les inclusions bien connues $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. Opérations sur $\mathbb{R}$

Nous utiliserons dans cet ouvrage les opérations habituelles de calculs avec lesquelles on peut ajouter, soustraire, multiplier des nombres réels et diviser par un nombre réel différent de 0.

Propriétés : En particulier, pour tous réels a , b et c ,

- $a + b = b + a$ (On dit que l'addition est **commutative**) ;
- $0 + a = a$ (0 est l'**élément neutre** pour l'addition) ;
- $a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$ (Tout réel admet un **opposé**) ;
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ (On dit que l'addition est **associative**) ;
- $a \times b = b \times a$ (On dit que la multiplication est **commutative**) ;
- $1 \times a = a$ (1 est alors l'**élément neutre** pour la multiplication) ;
- $a \times b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{a}$ (Tout réel non nul admet un **inverse**) ;
- $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ (La multiplication est **associative**) ;
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (On dit que la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition) ;
- $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ (On dit que $\mathbb{R}$ est **intègre**).

3. Ordre sur $\mathbb{R}$

Dans tout ce qui suit, l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la relation d'ordre habituelle notée $\leq$. En particulier, on note $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nul et $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des réels négatifs ou nul.



On note également $\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des réels positifs non nuls et $\mathbb{R}^{-*}$ l'ensemble des réels négatifs non nuls.

Remarques :

1. Pour tous réels a et b , on note $a \leq b$ si et seulement si $b - a \in \mathbb{R}^+$. On dit alors que **a est inférieur ou égal à b** .

2. Pour tous réels a et b , on note $a < b$ si et seulement si $b - a \in \mathbb{R}^{+*}$. On dit alors que **a est strictement inférieur à b** .

3. On note $\max(a, b)$ le plus grand des deux réels a ou b , c'est-à-dire :

$$\max(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } a \leq b \\ a & \text{si } a > b \end{cases}.$$

4. On note $\min(a, b)$ le plus petit des deux réels a ou b , c'est-à-dire :

$$\min(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases}.$$

5. On note $|a| = \max(-a, a)$ la **valeur absolue** du réel a .

En particulier, pour tous réels a, a', b, b' et c ,

- $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$;
- Si $a < b$ et $a' < b'$ alors $a + a' < b + b'$;
- $a < b \Leftrightarrow -b < -a$;
- Si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$;
- Si $A \in \mathbb{R}^+$ alors il existe un entier naturel n tel que $n > A$;
Cette assertion est la **propriété d'Archimède** ;
- Si $a > 0$ et $A > 0$ alors il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $na > A$;
On dit alors que $\mathbb{R}$ est **archimédien** ;
- Si $a > 0$ alors, pour tout réel x , il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ka \leq x < (k+1)a$;
Pour $a = 1$, on obtient un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$.
L'entier k est alors appelé la **partie entière** de x et notée $E(x)$.
- Enfin, $|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ a & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$.

Exemples :

1. $|-1,2| = \max(-(-1,2) ; -1,2) = 1,2 = \max(-1,2 ; 1,2) = |1,2|$.

2. $E(-1,2) = -2$ car $-2 \leq -1,2 < -1$ et $E(1,2) = 1$ car $1 \leq 1,2 < 2$.



4. Parties de $\mathbb{R}$

4.1 Intervalles

Définitions : Soient a et b des réels tels que $a \leq b$.

- On note $[a, b]$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$. On dit alors que $[a, b]$ est un **intervalle fermé** et un **segment** de longueur $b - a$.
- Si $a < b$ alors $]a, b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$. On dit que $]a, b[$ est un **intervalle ouvert**.
- Si $a < b$ alors $]a, b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$. On dit que $]a, b]$ est un **intervalle semi-ouvert à gauche**.
- Si $a < b$ alors $[a, b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$. On dit que $[a, b[$ est un **intervalle semi-ouvert à droite**.
- On note $[a, +\infty[$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x$ et on note $] - \infty, a]$ l'ensemble des réels tels que $x \leq a$.
- On note $]a, +\infty[$ l'ensemble des réels x tels que $a < x$ et on note $] - \infty, a[$ l'ensemble des réels tels que $x < a$.
Ce sont des intervalles ouverts.
- Enfin, on note $] - \infty, +\infty[$ l'ensemble $\mathbb{R}$.

Propriétés :

- Pour tout réel a , $[a, a] = \{a\}$;
- Si $a < b$ alors le centre $c = \frac{a+b}{2} \in]a, b[$;
- Si I est un intervalle alors, pour tous $(x, y) \in I^2$ tels que $x \leq y$,

$$[x, y] \subset I ;$$

- Si I est un intervalle ouvert alors, pour tout $x \in I$, il existe un intervalle ouvert J de centre x tel que $J \subset I$;
- Dans tout intervalle ouvert non vide il y a une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombre irrationnels.

Exemple :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et s un réel tel que $0 < s < b - a$.

En notant $p = E\left(\frac{a}{s}\right)$ alors $p \leq \frac{a}{s} < p + 1$.

Donc $ps \leq a < ps + s \leq a + s < a + b - a = b$ et donc $a < (p + 1)s < b$.

Ainsi, il existe un entier $n = p + 1$ tel que $ns \in]a, b[$.



4.2 Majorant – Minorant

Définitions : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- A est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que $x \in A \Rightarrow x \leq M$.
Alors M est appelé un **majorant** de A .
- A est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que $x \in A \Rightarrow m \leq x$.
Alors m est appelé un **minorant** de A .
- A est dite **bornée** si A est majorée et minorée.

Remarques :

1. Si M est un majorant de A alors tout réel $M' \geq M$ est également un majorant de la partie A . De même, si m est un minorant de A alors tout réel $m' \leq m$ est également un minorant de la partie A .
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, les intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$ sont tous bornés, a est un minorant et b est un majorant.
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, les intervalles $[a, +\infty[$ et $]a, +\infty[$ sont minorés par a et les intervalles $] - \infty, a]$ et $] - \infty, a[$ sont majorés par a .
4. Si M est un majorant de A et $M \in A$ alors M est le **maximum** de A . Il est noté $\max(A)$. De même, si m est un minorant de A et $m \in A$ alors m est le **minimum** de A . Il est noté $\min(A)$.

Exemples :

1. L'intervalle $[1, 2[$ est borné, 1 est un minorant ainsi que le minimum car $1 \in [1, 2[$. Le réel 2 est également un majorant mais ce n'est pas le maximum de l'intervalle car $2 \notin [1, 2[$.

2. L'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ est borné car $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0 est un minorant mais ce n'est pas le minimum de A car $0 \notin A$.

1 est un majorant et le maximum de A car $1 \in A$.

3. L'ensemble $A = \{n^2 - n, n \in \mathbb{N}\}$ est minoré par 0 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n^2 - n = n(n - 1) \geq 0$. Montrons que A n'est pas majoré.

Soit M un réel. Par la propriété d'Archimède, il existe un entier $n \geq 2$ tel que $n > M$. Or,

$$n^2 - 2n = n(n - 2) \geq 0 \Leftrightarrow n^2 - n \geq n > M$$



c'est-à-dire $n^2 - n \in A$ et $n^2 - n > M$ donc M n'est pas un majorant de A . Ainsi, A n'est pas majoré car aucun réel ne peut être un majorant.

4.3 Borne supérieure – Borne inférieure

Définitions : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Lorsqu'elle existe, on appelle **borne supérieure** de A le minimum des majorants de A . Elle est notée $\sup(A)$.
- Lorsqu'elle existe, on appelle **borne inférieure** de A le maximum des minorants de A . Elle est notée $\inf(A)$.

Théorème : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si la partie A est majorée alors elle admet une borne supérieure ;
- Si la partie A est minorée alors elle admet une borne inférieure.

Remarques :

$$1. M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > M - \varepsilon \end{cases}$$

$$2. m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < m + \varepsilon \end{cases}$$

Exemples :

$$1. \sup(]1,2]) = 2 \text{ et } \inf([1,2]) = 1.$$

$$2. \text{ Soit } A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}, \text{ dans ce cas } \sup(A) = \sqrt{2} \text{ et } \inf(A) = -\sqrt{2}.$$

En effet, $x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ donc $A = \mathbb{Q} \cap]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ est bornée.

4.4 Densité d'une partie dans $\mathbb{R}$

Définition : Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est **dense** dans $\mathbb{R}$ si A rencontre tout intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$.

Théorème :

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des nombres irrationnels, noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarques :

1. Si A est dense dans $\mathbb{R}$ alors A n'est pas un ensemble fini.
2. A est dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists d \in A \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec tels que $x < y$. Il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x < r < y.$$

Exemple : Soit n un entier naturel non nul. On considère également une partie A dense dans $\mathbb{R}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n éléments distincts de A . Montrons que $A' = A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, est une partie dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, on note $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cap]a, b[$ qui est un ensemble fini. Deux cas se présentent :

- Si $B \neq \emptyset$ alors on note $m = \min(B) \in B$. Comme $B \subset]a, b[$, on a donc $m > a$.
- Si $B = \emptyset$ alors on pose $m = b > a$ et on a, par densité de A , l'existence de $d \in A \cap]a, m[$.

Or, $d \in]a, b[$ et $d < m = \min(B)$ donc $d \notin B$ et on peut conclure que $d \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Finalement, $d \in A' = A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ce qui prouve bien la densité de A' dans $\mathbb{R}$.

4.5 Adhérence d'une partie dans $\mathbb{R}$

Définitions : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On dit qu'un réel a est **adhérent** à A dans $\mathbb{R}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad A \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\neq \emptyset.$$

L'**adhérence** de A dans $\mathbb{R}$, notée $\bar{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A .

Propriétés : Pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}$,

- $A \subset \bar{A}$ et $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$;
- A est dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{A} = \mathbb{R}$;
- $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$;
- Si $A \subset B$ alors $\bar{A} \subset \bar{B}$;
- $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$.



Remarques : Soit A une partie de $\mathbb{R}$, a et b sont des réels tels que $a < b$.

1. Si $A = \bar{A}$ alors on dit que A est une partie **fermée** de $\mathbb{R}$.
2. $\bar{A}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$. On peut dire également un **fermé** de $\mathbb{R}$.
3. Tous les intervalles fermés de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et $] - \infty, a]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
4. Le complémentaire d'un fermé dans $\mathbb{R}$ est appelé un **ouvert** de $\mathbb{R}$.
5. Tous les intervalles ouverts de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty[$ et $] - \infty, a[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
6. Les intervalles de la forme $]a, b]$ et $[a, b[$ ne sont ni fermés ni ouverts.
7. $\bar{\emptyset} = \emptyset = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ et $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \emptyset$.

Ainsi, $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont à la fois des fermés et des ouverts de $\mathbb{R}$.

Exemples :

1. Soit $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$. On a $A \cap B = \emptyset$, $\bar{A} = [0, 1]$ et $\bar{B} = [1, 2]$.

Par conséquent, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$ et $\overline{A \cap B} = \emptyset \neq \bar{A} \cap \bar{B}$.

2. $\overline{]1, +\infty[} = [1, +\infty[$ et $\overline{]-\infty, 2]} =]-\infty, 2]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

5. Distance sur $\mathbb{R}$

Définition : On note $d(x, y) = |x - y|$ la **distance** entre deux réels x et y .

Remarque : La notion de distance est en réalité plus générale mais elle fait intervenir la notion d'espace métrique qui n'est pas traitée en première année.

Cependant, on remarque que la distance définie plus haut est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant, pour tous réels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

- $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ (**Symétrie**) ;
- $d(x, y) = 0 \Rightarrow |x - y| = 0 \Rightarrow x = y$ (**Séparation**) ;
- $d(x, y) = |x - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$ (**Inégalité triangulaire**).

Propriétés :

- Pour tout $\varepsilon > 0$,



$$d(x, y) < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < y - x < \varepsilon \Leftrightarrow y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[;$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$;
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$||y| - |x|| \leq |y - x| \quad \text{et} \quad |xy| = |x||y|.$$

Remarques :

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la distance de x à la partie A par $d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$.

2. Pour toute partie non vide $A \subset \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}.$$

3. Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$, on appelle **diamètre** de A le réel $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y), x \in A \text{ et } y \in A\}$.

4. Pour toutes parties A et B non vides incluses dans $\mathbb{R}$, on définit la distance de A à B par $d(A, B) = \inf\{d(x, y), x \in A \text{ et } y \in B\}$.

Exemple :

Soit x et a des réels avec $a \neq 0$.

$$|x - a| < |a| \Leftrightarrow x \in]a - |a|, a + |a|[\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } a > 0 \text{ alors } x \in]0, 2a[\\ \text{Si } a < 0 \text{ alors } x \in]2a, 0[\end{cases}$$

En particulier, on a $|x - a| < |a| \Rightarrow x \neq 0$ et x est du signe de a .



Exercices

Exercice 1.1 : Soient a et b des réels, montrer les deux résultats suivants :

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \quad \text{et} \quad \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

Exercice 1.2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x|x| - 1| = 3|x - 1| + 2$.

Exercice 1.3 : Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x < \sqrt{3}\} =]0, \sqrt{3}[$.

1. La partie A est-elle une partie majorée, minorée, bornée ? Si oui, quelle est sa borne supérieure, inférieure ?

2. Trouver une partie $B \subset \mathbb{R}$ contenant A et majorée mais non bornée.



3. Donner un exemple d'une partie $C \subset \mathbb{R}$ contenant A et minorée mais n'admettant pas de borne supérieure.

Exercice 1.4 : Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\sqrt{3}\}$. On pose $y = \frac{x+3}{x+1}$.

1. Montrer que $y \neq \sqrt{3}$.

2. Calculer $\frac{y-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$ puis en déduire l'inégalité $|y - \sqrt{3}| \leq |x - \sqrt{3}|$.

Exercice 1.5 : (*) Soient a et b deux entiers strictement positifs.

Montrer que, pour tout réel x , $E\left(\frac{x}{ab}\right) = E\left(\frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right)\right)$.

Exercice 1.6 : (*) Soient a et b deux réels strictement positifs.

Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures et inférieures.

1. $A = \{a + bn, n \in \mathbb{N}\}$;

2. $B = \{a + (-1)^n b, n \in \mathbb{N}\}$;

3. $C = \left\{a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.

Exercice 1.7 : (*) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b.$$

1. Démontrer que A est majorée et que B est minorée.

2. Démontrer que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 1.8 : (**) Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et tels que

$$(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \emptyset.$$

Démontrer que $I \cap J = \emptyset$.

Exercice 1.9 : (**) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle **frontière** de A , notée ∂A , l'ensemble défini par

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A}$$

où $\bar{A}$ désigne l'adhérence de A et $\mathbb{R} \setminus A$ le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $\partial \mathbb{R}$, $\partial \emptyset$, $\partial \mathbb{Q}$ et $\partial]0,1[$.

2. Montrer les trois résultats suivants :

$$\partial(\mathbb{R} \setminus A) = \partial A ;$$

$$A = \bar{A} \Leftrightarrow \partial A \subset A ;$$

$$A = \bar{A} \Rightarrow \partial(\partial A) = \partial A.$$

Exercice 1.10 : (**) Soient $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et x un réel strictement positif tels que $x^2 = ax + b$.

Montrer que $x \in \mathbb{N}$ ou $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



Exercice 1.11 : (**) **Vidéo 1.11.** Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.

On considère $B = \{|x - y|, x \in A \text{ et } y \in A\}$.

1. Justifier que la partie B est bien majorée.

2. On note $\text{diam}(A) = \sup(B)$ le diamètre de A .

Montrer que $\text{diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 1.12 : (**) Soient x et y des réels et A une partie de $\mathbb{R}$.

Montrer l'inégalité suivante :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|.$$

Correction des exercices

Exercice 1.1 : Soient a et b des réels. Comme souvent en présence de la valeur absolue, on distingue deux cas :

- Si $a \geq b$ alors $|a - b| = a - b \geq 0$ et

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a = \max(a, b)$$

$$\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - (a - b)) = b = \min(a, b).$$

- Si $a < b$ alors $|a - b| = -(a - b) = b - a > 0$ et

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + b - a) = b = \max(a, b)$$

$$\frac{1}{2}(a+b-|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b-(b-a)) = a = \min(a,b).$$

Exercice 1.2 : Notons (*) l'équation $|x|x| - 1| = 3|x - 1| + 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.

- Supposons $x < 0$

$$(*) \Leftrightarrow |-x^2 - 1| = 3(1 - x) + 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3 - 3x + 2$$

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0. \text{ On obtient donc une équation du second degré.}$$

$x_1 = 1$ est une racine évidente. De plus, $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -4$ nous donne $x_2 = -4$ comme seconde solution mais seul $x_2 = -4$ convient puisque $x < 0$.

- Supposons $x \in [0, 1[$

$$(*) \Leftrightarrow |x^2 - 1| = 3(1 - x) + 2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 3 - 3x + 2$$

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\text{Ici, } \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0.$$

Il n'y a donc pas de solution réelle à cette équation.

- Supposons $x \geq 1$

$$(*) \Leftrightarrow |x^2 - 1| = 3(x - 1) + 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3x - 3 + 2$$

$$(*) \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 3.$$

Seule la solution $x_2 = 3$ est possible car $x \geq 1$.

En conclusion, l'ensemble de solutions de l'équation est $S = \{-4, 3\}$.

Exercice 1.3 :

1. Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x < \sqrt{3}\} =]0, \sqrt{3}[$. A est une partie de $\mathbb{R}$ majorée par $\sqrt{3}$ et minorée par 0. Elle est donc bornée. Sa borne supérieure est $\sqrt{3}$ et sa borne inférieure est 0.

2. $A \subset B = \{x \in \mathbb{R}, x < \sqrt{3}\} =]-\infty, \sqrt{3}[$. B est majorée par $\sqrt{3}$ mais elle n'admet pas de minorant.

3. $A \subset C = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} =]0, +\infty[$. C est minorée par 0 mais elle n'admet pas de borne supérieure.

Exercice 1.4 : Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\sqrt{3}\}$. On pose $y = \frac{x+3}{x+1}$.

1. Montrons que $y \neq \sqrt{3}$.

On peut écrire $y = \frac{x+3}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = x+3 \Leftrightarrow x(y-1) = 3-y$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $y = \sqrt{3}$.

Dans ce cas,

$$x(\sqrt{3}-1) = 3-\sqrt{3} \Leftrightarrow x(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$$

car $\sqrt{3}-1 \neq 0$. Nous obtenons une contradiction avec l'hypothèse $x \neq \sqrt{3}$.

Ainsi, on a bien $y \neq \sqrt{3}$.

2. Calculons.

$$\frac{y-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} = \frac{\frac{x+3}{x+1}-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} = \frac{\frac{x+3-\sqrt{3}x-\sqrt{3}}{x+1}}{x-\sqrt{3}} = \frac{x(1-\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(x+1)(x-\sqrt{3})}$$

puis

$$\frac{y-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x+1)(x-\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{3}}{x+1}.$$

Ainsi, on obtient $\left| \frac{y-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{1-\sqrt{3}}{x+1} \right| \leq |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1 \leq 1$.

En effet, $x+1 \geq 1$ donc $\frac{1}{x+1} \leq 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $1 < \sqrt{3} < 2$ car $1 < 3 < 4$ et on sait que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit donc l'inégalité demandée $|y-\sqrt{3}| \leq |x-\sqrt{3}|$.

Exercice 1.5 : Soient a et b des entiers strictement positifs. On souhaite montrer que, pour tout réel x , $E\left(\frac{x}{ab}\right) = E\left(\frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right)\right)$, procédons à l'aide de deux inégalités.

- D'une part, montrons que $E\left(\frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right)\right) \leq E\left(\frac{x}{ab}\right)$.

Par définition de la partie entière pour tout réel x , $E\left(\frac{x}{a}\right) \leq \frac{x}{a} < E\left(\frac{x}{a}\right) + 1$.

Or, $b > 0$ donc, en multipliant par $\frac{1}{b}$, on obtient $\frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right) \leq \frac{x}{ab} < \frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{b}$.

Par ailleurs, nous pouvons également écrire $E\left(\frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right)\right) \leq \frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right) \leq \frac{x}{ab}$

donc $E\left(\frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right)\right) \leq E\left(\frac{x}{ab}\right)$ puisque ces deux nombres sont des entiers.

- D'autre part, montrons que $E\left(\frac{x}{ab}\right) \leq E\left(\frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right)\right)$.

Pour tous $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $E(y) \leq y < E(y) + 1$ donc on peut écrire $nE(y) \leq ny < nE(y) + n$.

De la même façon, $E(ny) \leq ny < E(ny) + 1$ et, comme $nE(y)$ est un entier, on peut écrire $nE(y) \leq E(ny) \leq ny$ d'où $E(y) \leq \frac{1}{n}E(ny)$.

Pour finir, en posant $y = \frac{x}{ab}$ et $n = b$, on peut écrire $E\left(\frac{x}{ab}\right) \leq \frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right)$ et donc $E\left(\frac{x}{ab}\right) \leq E\left(\frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right)\right)$. Nous avons la deuxième inégalité.

Finalement, on obtient bien l'égalité demandée $E\left(\frac{x}{ab}\right) = E\left(\frac{1}{b}E\left(\frac{x}{a}\right)\right)$.

Exercice 1.6 :

1. Soient a et b des réels strictement positifs et $A = \{a + bn, n \in \mathbb{N}\}$.

Comme $b > 0$ et $n \geq 0$, on a $a + bn \geq a$ et, ainsi, A est minorée par $a \in A$.

Sa borne inférieure est donc $\inf(A) = \min(A) = a$.

Montrons que A n'est pas majorée. Supposons par l'absurde qu'il existe un majorant M . Comme $b > 0$ et $M \geq 0$ alors, et puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $nb > M$. Ainsi, $a + bn > M$ car $a > 0$, ce qui est absurde car M est, par hypothèse, un majorant de A .

2. Considérons à présent la partie $B = \{a + (-1)^n b, n \in \mathbb{N}\}$.

Si $n = 2p$ (n est pair) alors $a + (-1)^{2p} b = a + b$ et, si $n = 2p + 1$ (n est impair), alors $a + (-1)^{2p+1} b = a - b$.

Donc $B = \{a - b, a + b\}$ est un ensemble fini admettant $a - b$ comme minorant et $a + b$ comme majorant. Ainsi, $\sup(B) = \max(B) = a + b$ et $\inf(B) = \min(B) = a - b$.

3. Soit $C = \left\{ a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Nous avons $n \geq 1$ donc, par passage à l'inverse, $\frac{1}{n} \leq 1$. Comme $a > 0$ et $b > 0$, on a $a < a + \frac{b}{n} \leq a + b$ d'où a est un minorant et $a + b \in C$ est un majorant. On a donc $\sup(C) = \max(C) = a + b$.

Montrons que $\inf(C) = a$. Soit c un minorant de C , supposons par l'absurde que $c > a$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a + \frac{b}{n} \geq c \Leftrightarrow \frac{b}{n} \geq c - a > 0$.

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et puisque $b > 0$ on obtient

$\frac{n}{b} \leq \frac{1}{c-a} \Leftrightarrow n \leq \frac{b}{c-a}$. Or, $E\left(\frac{b}{c-a}\right) + 1 > \frac{b}{c-a}$, ce qui est donc absurde compte tenu que $E\left(\frac{b}{c-a}\right) + 1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Ainsi, on a bien $\inf(C) = \max\{c \in \mathbb{R}, c \text{ minorant de } C\} = a$.

Exercice 1.7 : Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b.$$

1. Démontrons que A est majorée et que B est minorée.

Comme $B \neq \emptyset$, il existe $b_0 \in B$ tel que, pour tout $a \in A$, $a \leq b_0$.

Ainsi, b_0 est un majorant de A .

De même, $A \neq \emptyset$ donc il existe $a_0 \in A$ tel que, pour tout $b \in B$, $a_0 \leq b$.

Ainsi, a_0 est un minorant de B .

2. Démontrons que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sup(A) > \inf(B)$. Considérons alors le réel $c = \frac{\sup(A) + \inf(B)}{2}$. On a alors $\inf(B) < c < \sup(A)$ et, en particulier, il existe des réels $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ tels que $a_0 > c > b_0$ ce qui est absurde compte tenu de l'hypothèse $a_0 \leq b_0$.

Exercice 1.8 : Soient I et J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ tels que

$$(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \emptyset.$$

Montrons que $I \cap J = \emptyset$. Supposons donc par l'absurde que $I \cap J \neq \emptyset$.

Soit $a \in I \cap J$.

- Comme $a \in I$ et que I est un intervalle ouvert, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset I$.
- Comme $a \in J$ et que J est un intervalle ouvert, il existe un réel $\varepsilon' > 0$ tel que $]a - \varepsilon', a + \varepsilon'[\subset J$.

Considérons $\varepsilon'' = \min(\varepsilon, \varepsilon') > 0$. On a $]a - \varepsilon'', a + \varepsilon''[\subset I \cap J$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe alors $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r \in]a - \varepsilon'', a + \varepsilon''[$. Nous avons donc $r \in (I \cap J) \cap \mathbb{Q} = (I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q})$ ce qui est absurde car $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$. Finalement, $I \cap J = \emptyset$.

Exercice 1.9 :

1. Déterminons $\partial\mathbb{R}$, $\partial\emptyset$, $\partial\mathbb{Q}$ et $\partial]0,1[$.

$$\partial\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}} = \mathbb{R} \cap \overline{\emptyset} = \mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset ;$$

$$\partial\emptyset = \overline{\emptyset} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \emptyset} = \emptyset \cap \overline{\mathbb{R}} = \emptyset \cap \mathbb{R} = \emptyset ; \quad \partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} ;$$

$$\partial]0,1[= \overline{]0,1[} \cap \overline{]0,1[\setminus]0,1[} = [0,1] \cap (]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[) = \{0,1\}.$$

2. Montrons les trois résultats demandés.

$$(a) \partial(\mathbb{R} \setminus A) = \overline{\mathbb{R} \setminus A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)} = \overline{\mathbb{R} \setminus A} \cap \bar{A} = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A} = \partial A.$$

$$(b) \text{ Si } \bar{A} = A \text{ alors } \partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A} = A \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A} \subset A.$$

Réciproquement, supposons $\partial A \subset A$.

Soit $a \in \bar{A}$, supposons par l'absurde que $a \in \mathbb{R} \setminus A \subset \overline{\mathbb{R} \setminus A}$.

Alors, $a \in \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A} \subset A$ ce qui est absurde car $A \cap \mathbb{R} \setminus A = \emptyset$ donc $a \in A$. Ceci nous donne $\bar{A} \subset A$ et on a bien entendu $A \subset \bar{A}$.

Par double inclusion, on obtient bien $\bar{A} = A$.

(c) Tout d'abord, remarquons que

$$\overline{\partial A} = \overline{\bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A}} \subset \bar{A} \cap \overline{\overline{\mathbb{R} \setminus A}} = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A} = \partial A.$$

Or, $\partial A \subset \overline{\partial A}$ donc, par double inclusion, $\overline{\partial A} = \partial A$.

$$\text{Il vient alors } \partial(\partial A) = \overline{\partial A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \partial A} = \partial A \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \partial A}.$$

Il suffit maintenant de montrer que $\partial A \subset \overline{\mathbb{R} \setminus \partial A}$. D'après la preuve du point précédent, $\bar{A} = A \Rightarrow \partial A \subset A$ et, en passant au complémentaire, on obtient $\mathbb{R} \setminus A \subset \mathbb{R} \setminus \partial A$ ce qui fournit $\partial A \subset \overline{\mathbb{R} \setminus A} \subset \overline{\mathbb{R} \setminus \partial A}$.

On a donc bien $A = \bar{A} \Rightarrow \partial(\partial A) = \partial A$.

Exercice 1.10 : Soient $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et x un réel strictement positif tels que $x^2 = ax + b$. Montrons que $x \in \mathbb{N}$ ou $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Supposons que $x \notin \mathbb{N}$ alors on a $x = E(x) + (x - E(x)) = n_0 + r_0$ avec $n_0 = E(x) \in \mathbb{N}$ et $r_0 = x - E(x) \in]0, 1[$.

On note $A = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, nx \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Soit $n \in A$, montrons que $nr_0 \in A$.

Tout d'abord, $nr_0 = n(x - n_0) = nx - nn_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et

$$nr_0x = n(x - n_0)x = nx^2 - nn_0x = n(ax + b) - nn_0x$$

$$nr_0x = nb + (a - n_0)nx \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ donc } nr_0 \in A.$$

En itérant, on obtient que $nr_0^k \in A$, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a alors une suite (nr_0^k) géométrique de raison r_0 constituée d'entiers naturels strictement positifs et strictement décroissante puisque $r_0 \in]0, 1[$.

Mais ceci est impossible et donc $A = \emptyset$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 1.11 :

Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ et $B = \{|x - y|, x \in A \text{ et } y \in A\}$.

1. Montrons que B est majorée.

En effet, comme $A \neq \emptyset$ est bornée, il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \forall y \in A, |x| \leq M \text{ et } |y| \leq M.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on peut écrire

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2M$$

donc B est majorée par $2M$.

2. On note $\text{diam}(A) = \sup(B)$ le diamètre de A .

Montrons que $\text{diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

On peut écrire, pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in A$,

$$\inf(A) \leq x \leq \sup(A) \text{ et } \inf(A) \leq y \leq \sup(A)$$

donc $-\sup(A) \leq -y \leq -\inf(A)$.

Par somme, $\inf(A) - \sup(A) \leq x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$

donc $-(\sup(A) - \inf(A)) \leq x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$

et ceci nous donne $|x - y| \leq \sup(A) - \inf(A)$.

Donc $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B et $\text{diam}(A) \leq \sup(A) - \inf(A)$.

On veut maintenant montrer que $\text{diam}(A) \geq \sup(A) - \inf(A)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe un réel $x_0 \in A$ tel que $x_0 \geq \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$

et un réel $y_0 \in A$ tel que $y_0 \leq \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$.

On a alors $|x_0 - y_0| \geq x_0 - y_0 \geq \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$.

On a ainsi construit $b = |x_0 - y_0| \in B$ tel que $b > \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$.

Comme ce résultat est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on peut en déduire l'inégalité

$$\text{diam}(A) = \sup(B) \geq \sup(A) - \inf(A).$$

Nous pouvons donc conclure, à l'aide d'une double inégalité, le résultat

$$\text{diam}(A) = \sup(B) = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 1.12 : Soient x et y des réels et A une partie de $\mathbb{R}$. Montrons que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la distance de x et y à A , il existe des réels x_1 et y_1 dans A tels que $|x - x_1| \leq d(x, A) + \varepsilon$ et $|y - y_1| \leq d(y, A) + \varepsilon$.

D'après l'inégalité triangulaire,

$$|x - y_1| \leq |x - y| + |y - y_1| \leq |x - y| + d(y, A) + \varepsilon.$$

Or, $d(x, A) \leq |x - y_1|$ donc $d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y| + \varepsilon$.

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et, ainsi, $d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|$.

Si l'on échange les rôles de x et y , on a

$$d(y, A) - d(x, A) \leq |y - x| = |x - y|$$

et donc la conclusion $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.

Suites numériques

De nombreux résultats sur les suites numériques ont déjà été abordés au lycée. Ce chapitre va nous permettre de traiter des notions primordiales en analyse. Dans cette partie, K désignera l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Les propriétés principales de ce dernier sont étudiées dans le chapitre 5 du tome « L'essentiel de l'algèbre en L1 ».

1. Généralités sur les suites

1.1 Définitions

Définitions : Une **suite** est une application u de $A \subset \mathbb{N}$ et à valeurs dans K .

Pour tout $n \in A$, $u(n)$ est un **terme** de la suite noté u_n .

La suite u se note $(u_n)_{n \in A}$ et, plus simplement, (u_n) si $A = \mathbb{N}$.

Au lycée, on sait qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ peut être définie de manière **explicite** à partir d'un certain rang n_0 lorsqu'il existe une fonction f définie sur $[n_0, +\infty[$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = f(n)$.

Elle peut être également définie par **récurrence** à partir d'un certain rang n_0 lorsque, par exemple, il existe une fonction f définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$ (On dit que I est **stable** par f) et
$$\begin{cases} u_{n_0} \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Exemples :

1. Pour $K = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $u_n = \frac{1}{n}$, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres réels définie de manière explicite à partir de $n_0 = 1$ et dont le premier terme est $u_1 = \frac{1}{1} = 1$.

2. Pour $K = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{N}$ et $z_n = i^n$, la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres complexes définie de manière explicite et de premier terme $z_0 = i^0 = 1$.

En particulier, $z_1 = i$, $z_2 = i^2 = -1$, $z_3 = i^3 = -i$ et $z_4 = i^4 = 1$.



3. Pour $K = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{N}$, on peut définir une suite (u_n) par récurrence avec la fonction $f: x \mapsto x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 + 1 \end{cases}$.

4. Pour $K = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{N}$, on peut aussi définir une suite par récurrence dite d'ordre 2. Par exemple, voici la **suite de Fibonacci** $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

En particulier, $u_2 = u_1 + u_0 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$ et $u_5 = 5$.

1.2 Monotonie d'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définitions : Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite **monotone** lorsque, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n$ est de signe constant.

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite **croissante** pour $n \geq n_0$;
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite **décroissante** pour $n \geq n_0$;
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$ alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite **constante** pour $n \geq n_0$.

Remarques :

1. Supposons $(u_n)_{n \geq n_0}$ est définie de manière explicite à l'aide d'une fonction f définie sur $[n_0, +\infty[$ par $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$.

Dans ce cas, si f est monotone alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ possède la même monotonie.

2. Considérons $(u_n)_{n \geq n_0}$ définie par récurrence à l'aide d'une fonction f monotone sur un intervalle I stable par celle-ci par une relation du type

$$\begin{cases} u_{n_0} \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- Si $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$ alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ et f possèdent la même monotonie ;
- Si $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$ alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ et f ont des monotonies contraires ;
- Si $u_{n_0+1} = u_{n_0}$ alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante.

Méthodes : Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, on retiendra les techniques suivantes.

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \geq n_0$. Lorsque le signe de cette expression est constant à partir d'un certain rang n_1 , on peut alors conclure qu'à partir de n_1 la suite est croissante si l'expression est positive, décroissante si elle est négative, constante si elle est nulle.



- Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est définie de manière explicite par $u_n = f(n)$ et que f est monotone sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$ alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ possède la même monotonie que f .
- Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est définie par récurrence, à l'aide d'une fonction f monotone sur un intervalle I stable par f , par une relation du type $\begin{cases} u_{n_0} \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ possède la même monotonie que celle de f si $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$ et sont de monotonies contraires sinon.

Exemples :

1. Considérons $u_n = \frac{1}{n} = f(n)$. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante car la fonction inverse f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante.

2. La suite (u_n) définie par récurrence à l'aide de la fonction $f: x \mapsto x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 + 1 \end{cases}$ est croissante sur $\mathbb{N}$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$.

On pourrait également justifier la croissance de (u_n) en remarquant que f est croissante sur $[1, +\infty[$, intervalle stable par f , et que l'on a

$$u_1 = f(u_0) = u_0^2 + 1 = 2 \geq u_0.$$

1.3 Suites majorées, minorées et bornées

Définitions : Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite à valeurs dans $K = \mathbb{R}$.

- $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **majorée** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel M tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq M.$$

M est alors appelé un **majorant** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

- $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **minorée** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel m tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq m.$$

m est alors appelé un **minorant** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

- $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Remarques :

1. Si M est un majorant de $(u_n)_{n \geq n_0}$ alors tout réel $M' \geq M$ est également un majorant de $(u_n)_{n \geq n_0}$.
2. Si m est un minorant de $(u_n)_{n \geq n_0}$ alors tout réel $m' \leq m$ est également un minorant de $(u_n)_{n \geq n_0}$.
3. Si une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée alors il existe un réel $M > 0$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq M.$$

4. Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ croissante est minorée par son premier terme u_{n_0} .
5. Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ décroissante est majorée par son premier terme u_{n_0} .
6. Pour $K = \mathbb{C}$, on dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée lorsque la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ est bornée, où $|u_n|$ désigne le module du nombre complexe u_n .

Exemples :

1. Considérons $u_n = \frac{1}{n} = f(n)$. $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite bornée car, pour tout $n \geq 1$, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ c'est-à-dire $0 < u_n \leq 1$.

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite minorée par 0 et majorée par 1.

2. Pour $K = \mathbb{C}$, posons $z_n = i^n$. La suite $(z_n)_{n \geq 0}$ est bornée car

$$\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| = |i|^n = 1.$$

3. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence, à l'aide de $f: x \mapsto x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$, par la relation

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

est minorée par 1 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

1.4 Suites arithmétiques

Définition : Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à valeurs dans K est dite **arithmétique** lorsque, pour un u_{n_0} donné, il existe $r \in K$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$



La constante r est appelée la **raison** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Théorème – Définition :

- Une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq n_0}$ de raison r admet une **forme explicite** (on dit aussi **terme général**) définie, pour tout $n \geq n_0$, par

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r.$$
- Si $K = \mathbb{R}$ alors la monotonie de $(u_n)_{n \geq n_0}$ dépend du signe de r .
 - Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante pour $n \geq n_0$;
 - Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante pour $n \geq n_0$;
 - Si $r = 0$ alors (u_n) est constante pour $n \geq n_0$.
- Pour toute suite arithmétique $(u_n)_{n \geq n_0}$ de raison r , la somme des premiers termes consécutifs est donnée par la formule :

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n = (n - n_0 + 1) \frac{u_{n_0} + u_n}{2}$$

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n = (n - n_0 + 1) \left(u_{n_0} + \frac{(n - n_0)r}{2} \right).$$

Exemples :

1. Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_5 = 10$ et $u_{15} = 3$. Pour déterminer sa forme explicite, on va d'abord déterminer sa raison r en écrivant $u_{15} = u_5 + (15 - 5)r \Leftrightarrow 3 - 10 = 10r \Leftrightarrow r = -\frac{7}{10} = -0,7$.

Ainsi, $u_n = u_5 + (n - 5)r = 10 - 0,7(n - 5) = 13,5 - 0,7n$.

Comme $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante et majorée par $u_0 = 13,5$.

2. Soit m un entier naturel donné. On se demande à quelles conditions, pour un premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$ fixé, il existe une suite arithmétique (u_n) de raison $r \in \mathbb{C}$ vérifiant l'équation suivante :

$$(E_m): u_0 + u_1 + \cdots + u_m = m.$$

Nous avons alors

$$(E_m): (m + 1) \left(u_0 + \frac{mr}{2} \right) = m \Leftrightarrow \frac{r}{2} m(m + 1) = m - (m + 1)u_0.$$

- Si $m \neq 0$ alors $r = \frac{2(m - (m+1)u_0)}{m(m+1)}$. Il existe donc une unique suite arithmétique vérifiant (E_m) .
- Si $m = 0$ et $u_0 = 0$ alors toutes les suites arithmétiques de premier terme nul vérifient l'équation (E_0) .



- Enfin, si $m = 0$ et $u_0 \neq 0$ alors il n'existe aucune suite arithmétique de premier terme non nul vérifiant l'équation (E_0) .

1.5 Suites géométriques

Définition : Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à valeurs dans K est dite **géométrique** lorsque, pour un u_{n_0} donné, il existe $q \in K$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = qu_n.$$

La constante q est appelée la **raison** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Théorème – Définition :

- Une suite géométrique $(u_n)_{n \geq n_0}$ de raison q admet une **forme explicite** (on dit aussi **terme général**) définie, pour tout $n \geq n_0$, par

$$u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}.$$

- Si $K = \mathbb{R}$ alors la monotonie de $(u_n)_{n \geq n_0}$ dépend de q et de u_{n_0} .
 - Si $q > 1$ et $u_{n_0} > 0$ alors (u_n) est croissante pour $n \geq n_0$;
 - Si $q > 1$ et $u_{n_0} < 0$ alors (u_n) est décroissante pour $n \geq n_0$;
 - Si $q = 1$ alors (u_n) est constante et égale à u_{n_0} pour $n \geq n_0$;
 - Si $0 < q < 1$ et $u_{n_0} > 0$ (resp. $u_{n_0} < 0$) alors (u_n) est décroissante (resp. croissante) pour $n \geq n_0$;
 - Si $q = 0$ alors (u_n) est constante et nulle pour $n \geq n_0 + 1$;
 - Si $q < 0$ alors (u_n) n'est pas monotone pour $n \geq n_0$;
 - Si $u_{n_0} = 0$ alors (u_n) est nulle pour $n \geq n_0$.
- Pour toute suite géométrique $(u_n)_{n \geq n_0}$ de raison q , la somme des premiers termes consécutifs est donnée par la formule :

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n = u_{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q}.$$

Exemples :

1. Soit (u_n) une suite géométrique à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose que $u_2 = i$ et $u_4 = -i$.

Alors, $u_4 = u_2 \times q^{4-2} \Leftrightarrow -i = iq^2 \Leftrightarrow q^2 = -1 \Leftrightarrow q = i$ ou $q = -i$.

- Si $q = i$ alors $u_n = u_2 \times q^{n-2} = i \times i^{n-2} = i^{n-1}$.