

MATHS

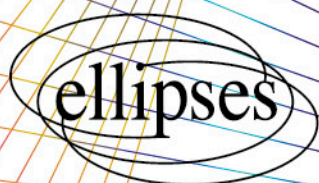
Cours approfondi
Exercices
Problèmes

5^e

2^e édition

**Nouveau
programme 2026**

Laurent Lemaire
Anne Paradas Arroyo



MATHS

Cours approfondi
Exercices
Problèmes

MATHS



Cours approfondi
Exercices
Problèmes



2^e édition

Laurent Lemaire

Enseignant au lycée Louis-le-Grand (Paris)

Anne Paradas Arroyo

Enseignante au lycée Louis-le-Grand (Paris)



ISBN 9782340-116009

Dépôt légal : juin 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Comme dans la première édition, l'objectif de ce livre est d'offrir à tous les collégiens un cours construit, rigoureux et détaillé. Il s'appuie sur le programme du cycle 4 publié au BO n° 10 du 5 mars 2026.

Le contenu de ce manuel a été testé ces dernières années au collège-lycée Henri-IV à Paris.

L'ordre des chapitres suit une progression cohérente et la structure de chaque chapitre est identique :

- **Le cours.**

Nous nous sommes attachés à présenter des énoncés rigoureux et à démontrer toutes les propositions avec des outils au programme du cycle 4.

Indispensables à la compréhension, de nombreux dessins illustrent les notions abordées.

Les **repères historiques**  ont pour objet de comprendre comment les concepts étudiés se sont développés. Le savoir mathématique est parfois une longue construction à travers le temps et est très rarement l'œuvre d'une seule personne, aussi nous avons principalement présenté l'histoire des notions introduites. À ce sujet, nous tenons à remercier chaleureusement Bertrand EYCHENNE pour ses conseils au cours de nos nombreux échanges, ils nous ont permis d'éviter certains écueils.

Enfin, il nous a semblé intéressant de préciser l'**étymologie**  du vocabulaire mathématique.

- **Les exercices.**

Nous avons souhaité varier les types d'exercices, ce livre en contient 421, tous corrigés. Certains, souvent regroupés en séries, sont mécaniques et permettent un entraînement aux techniques de calcul, d'autres sont plus orientés vers la recherche et la prise d'initiative. Leur niveau de difficulté est indiqué par des étoiles de ☆☆☆ à ☆☆☆. Un exercice n'est facile que pour celui qui l'a déjà résolu, c'est pourquoi il est nécessaire de prendre le temps de « sécher » et surtout de ne pas se précipiter vers la solution.

- **Des problèmes.**

Initialement construits comme des devoirs en temps libre, ils abordent des « classiques » de la culture mathématique en s'appuyant parfois sur des textes historiques. Leur niveau de difficulté n'est pas indiqué, mais ces problèmes sont tous corrigés à la fin du livre.

Nous nous sommes appuyés très souvent sur les documents d'accompagnement ÉdUSCOL résumant très efficacement la recherche en didactique des mathématiques, ainsi que sur les travaux des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) qui nous ont permis d'approfondir nos réflexions.

Ce livre peut remplacer un manuel scolaire utilisé en classe. Il peut aussi être mis à profit par des élèves désireux d'approfondir certaines notions, de développer une culture mathématique. Nous avons bien conscience que l'étude de ce livre nécessite un certain effort – comme tout apprentissage – mais nous sommes convaincus qu'il en résultera un plaisir à faire des mathématiques.

Bien que conçu avant tout pour des élèves, ce manuel peut également être utile aux candidats du Concours de Recrutement de Professeur des Écoles (CRPE) ou du Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré (CAPES).

Cette deuxième édition prend en compte un changement de programme dont la principale modification réside dans l'approche de la géométrie.

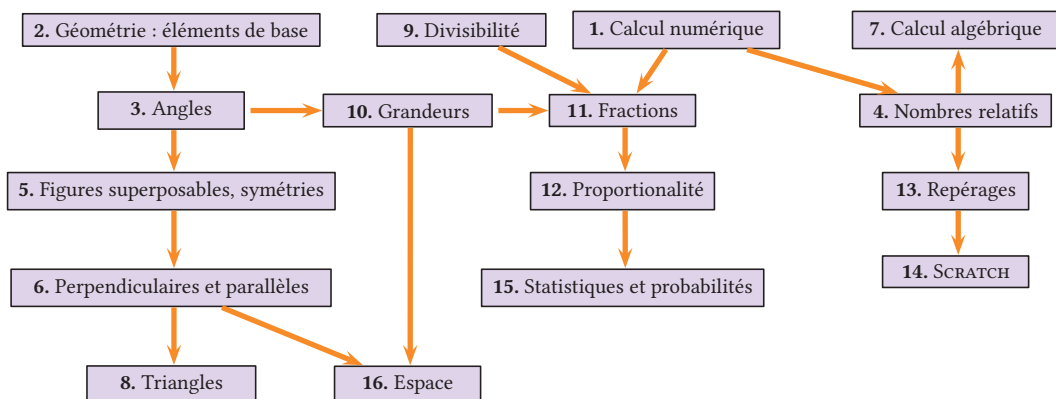
Le programme précédent partait des triangles égaux afin de démontrer les propriétés sur les triangles particuliers et sur les droites parallèles. Cette approche était présente au collège avant la réforme des « maths modernes » et nous vient d'EUCLIDE. Très intuitive, la notion des triangles égaux permettait de s'initier très progressivement à l'exercice de la **démonstration** sans utiliser de transformations – notion datant du 19^e siècle –. Avec cette approche, la symétrie centrale n'était donc pas une notion fondamentale. Dans ce nouveau programme, la logique est inversée et le demi-tour joue un rôle central dans les démonstrations. Avec ce changement de point de vue, l'organisation des chapitres ainsi que les démonstrations des propositions ont été modifiées.

La géométrie dans l'espace fait son retour avec la perspective cavalière et les prismes.

Le calcul numérique doit tenir, dans l'enseignement des mathématiques, une place de choix. Cependant, il est nécessaire de ne pas réduire le calcul à des recettes et de construire progressivement la notion de nombre. Les chapitres *Calcul numérique*, *Nombres relatifs* et *Fractions* permettent d'acquérir les techniques de base qui seront approfondies en classes de quatrième et de troisième. Une initiation au calcul littéral est abordée dans le chapitre *Calcul algébrique*. Nous avons maintenu le chapitre *Divisibilité* pour le vocabulaire, la culture et son utilité dans le calcul fractionnaire.

L'annexe traite du vocabulaire et des divers raisonnements utilisés en mathématiques, il n'est pas indispensable en première lecture.

L'ordre choisi pour les chapitres n'est qu'une proposition de progression. Néanmoins, il existe une interdépendance entre les chapitres, elle est résumée par le schéma suivant.



Les symboles utilisés dans les exercices :

- ☆☆, ☆☆, ☆☆☆, ☆☆☆ et ☆☆☆ indiquent le niveau des exercices;
-  demande de réaliser soigneusement une figure (sur feuille blanche par exemple);
-  demande de construire une figure avec un logiciel de construction géométrique (GEOGEBRA par exemple);
-  incite à ne pas utiliser la calculatrice contrairement à  qui nécessite la calculatrice;
-  signifie que l'exercice demande l'élaboration d'un programme SCRATCH.

Malgré notre lecture méticuleuse, il ne serait pas étonnant que des erreurs se soient glissées dans le texte. Nous remercions par avance nos lecteurs pour leurs remarques.

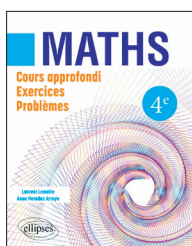
Table des matières

1	Calcul numérique.....	5
I	Vocabulaire.....	5
II	Enchaînement d'opérations.....	7
III	Distributivité.....	9
IV	Exercices.....	10
V	Problèmes.....	14
2	Géométrie : éléments de base	19
I	Point, segment, droite, demi-droite	19
II	Position relative de deux droites	21
III	Longueur d'un segment.....	22
IV	Cercle	23
V	Construction avec Geogebra	24
VI	Exercices.....	25
VII	Problèmes.....	28
3	Angles	31
I	Angle	31
II	Mesure d'un angle	34
III	Triangle.....	36
IV	Exercices.....	37
V	Problème	40
4	Nombres relatifs.....	41
I	Définition	42
II	Addition et soustraction de nombres relatifs	44
III	Comparaison des nombres relatifs.....	47
IV	Exercices.....	48
5	Figures superposables, symétries	53
I	Figures superposables.....	53
II	Demi-tour ou symétrie centrale.....	55
III	Réflexion ou symétrie axiale.....	57
IV	Exercices.....	62
V	Problème	66
6	Perpendiculaires et parallèles.....	67
I	Droites perpendiculaires	67
II	Distance d'un point à une droite.....	68
III	Droites parallèles.....	69
IV	Parallèles et sécantes.....	70
V	Exercices.....	72
VI	Problèmes.....	76

7	Calcul algébrique.....	79
I	Expression littérale	79
II	Formule	81
III	Identité	81
IV	Simplifications d'écriture	82
V	Équation	84
VI	Exemple récapitulatif.....	84
VII	Exercices	86
VIII	Problèmes.....	90
8	Triangles	93
I	Inégalités sur les longueurs.....	93
II	Médianes, hauteurs et bissectrices d'un triangle.....	95
III	Triangle isocèle, triangle équilatéral	96
IV	Triangle rectangle	98
V	Relations sur les angles.....	100
VI	Exercices	104
VII	Problème	108
9	Divisibilité	109
I	Multiple d'un entier naturel.....	109
II	Diviseur d'un entier naturel.....	111
III	Exercices	115
IV	Problèmes.....	118
10	Grandeurs et mesures	121
I	Notion de grandeur.....	121
II	Mesure d'une grandeur.....	124
III	Calcul de périmètres	127
IV	Calcul d'aires et de volumes.....	129
V	Exercices	133
VI	Problème	136
11	Fractions	137
I	Définition, égalité.....	137
II	Opérations avec des fractions	140
III	Exercices	143
12	Proportionnalité	147
I	Vocabulaire.....	147
II	Tableau de proportionnalité.....	150
III	Échelle, format.....	152
IV	Exercices	154
V	Problèmes.....	156
13	Repérages	159
I	Repérage sur un axe gradué.....	159
II	Repérage dans le plan	160
III	Représentation de la dépendance entre deux grandeurs.....	162
IV	Exercices	165
V	Problème	169

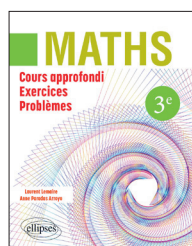
14 Dessiner avec SCRATCH	171
I Notion d'algorithme.....	171
II SCRATCH	172
III Dessiner avec SCRATCH.....	173
IV Répéter une instruction.....	176
V Blocs.....	176
VI Exercices	178
VII Problème	183
15 Statistiques et probabilités.....	185
I Définitions et vocabulaire des statistiques	185
II Représentations graphiques.....	186
III Paramètres statistiques.....	187
IV Notion de probabilité.....	189
V Exercices	193
VI Problème	197
16 Représentation dans l'espace	199
I Représentation des solides	199
II Polyèdre, prisme et cylindre	201
III Calcul de volumes.....	204
IV Exercices	206
V Problèmes.....	209
Annexe A : Règles en mathématiques.....	213
I Règles en mathématiques.....	213
II Égalité	217
III Exercices	219
IV Problème	222
17 Correction des exercices.....	223
I Calcul numérique	223
II Géométrie : éléments de base	226
III Angles.....	230
IV Nombres relatifs.....	233
V Figures superposables, symétries.....	236
VI Perpendiculaires et parallèles.....	241
VII Calcul algébrique.....	245
VIII Triangles	248
IX Divisibilité	253
X Grandeurs et mesures	256
XI Fractions	258
XII Proportionnalité.....	260
XIII Repérages	262
XIV Dessiner avec SCRATCH.....	266
XV Statistiques et probabilités.....	270
XVI Représentation dans l'espace	274
Annexe A : Règles en mathématiques.....	276

18 Réponses aux problèmes	279
I Calcul numérique	279
II Géométrie : éléments de base	281
III Angles	284
V Figures superposables, symétries	286
VI Perpendiculaires et parallèles	286
VII Calcul algébrique	288
VIII Triangles	291
IX Grandeurs et mesures	293
X Entiers : divisibilité	296
XII Proportionnalité	298
XIII Repérages	300
XIV Dessiner avec SCRATCH	303
XV Statistiques	304
XVI Représentation dans l'espace	306
Annexe A : Règles en mathématiques	308
Index	309



Sommaire du livre de la classe de quatrième (2^e édition) :

0. Règles en mathématiques
1. Nombres relatifs
2. Algorithmes et SCRATCH
3. Quadrilatères
4. Fractions
5. Équations du premier degré
6. Droites remarquables du triangle
7. Aires
8. Proportionnalité
9. Puissances entières
10. Calcul littéral : développement
11. Triangle rectangle
12. Calcul littéral : factorisation
13. Les types de nombres
14. Statistiques
15. Translations et frises
16. Géométrie dans l'espace
17. Probabilités



Sommaire du livre de la classe de troisième (2^e édition) :

0. Règles en mathématiques
1. Bases du calcul numérique
2. Algorithmes et SCRATCH
3. Bases du calcul algébrique
4. Équations
5. Arithmétique
6. Grandeurs et mesures
7. THALÈS et triangles semblables
8. Trigonométrie
9. Fonctions
10. Fonctions linéaires et affines
11. Pourcentages
12. Statistiques
13. Espaces et volumes
14. Vecteurs
15. Inéquations
16. Probabilités

Calcul numérique



Explication : Le mot **calcul** vient du latin *calculus* signifiant « caillou ».

Les Romains utilisaient des cailloux sur leurs abaquas. Le « calculator » est celui qui tient les comptes. Le mot **compter** vient du latin *computare* signifiant « énumérer ».



Repères historiques. La numération grecque ou romaine ne permet ni les multiplications ni les divisions. Pour faire des calculs, on utilise des abaquas (instrument de calcul à l'aide de cailloux ou de jetons).

En 772, des savants dont l'astronome Muhammad AL FAZARI traduisent ARYABHATA et BRAH-MAGUPTA et introduisent ainsi à Bagdad la numération décimale et l'usage du zéro.

En 1202, Leonardo FIBONACCI présente dans *Liber Abaci* le système décimal ainsi qu'une technique de multiplication. Au Moyen-Âge, l'habileté des calculateurs avec les abaquas et les bouliers empêche la diffusion du système décimal et des calculs écrits. Jusqu'en 1600, compter sur ses doigts était très répandu et certains traités (par exemple *Summa de arithmetica* de Luca PACIOLI) contenaient des explications sur le calcul digital.

En 1585, Simon STEVIN (1548–1620) propose dans *La Disme* une nouvelle écriture décimale des nombres qu'il manipule afin de faciliter les calculs. Le nombre $25 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{6}{1000}$ est noté par Simon STEVIN $25^{\textcircled{0}}3^{\textcircled{1}}4^{\textcircled{2}}6^{\textcircled{3}}$, en 1620 Joost BURGI simplifie cette notation en $25\textcircled{.}346$.

Marie CROUS (1620–?), maîtresse d'écriture et de calculs, publie en 1635 un ouvrage *Avis aux filles exerçant l'arithmétique sur les dixmes ou dixiemes du Sieur Stevin*, dans lequel elle sépare la partie décimale des entiers par un point et remplace par des zéros les unités décimales manquantes. Ainsi $3^{\textcircled{0}}2^{\textcircled{1}}4^{\textcircled{3}}$ devient 3.104.

I Vocabulaire

Définition Somme, différence

- Le résultat d'une addition s'appelle la **somme** et les nombres que l'on additionne entre eux sont appelés **termes** de la somme.
- Le résultat d'une soustraction s'appelle la **différence** et les nombres que l'on soustrait entre eux sont appelés **termes** de la différence.

La différence de deux nombres est le nombre qu'il faut ajouter à l'un pour obtenir l'autre



Exemple 1.

- La somme de 13 et de 7 est le résultat de l'addition $13 + 7$, c'est-à-dire 20. Les nombres 13 et 7 sont les termes de cette somme.
- La différence entre 7 et 4 est le résultat de la soustraction $7 - 4$, c'est-à-dire 3. Les nombres 7 et 4 sont les termes de cette différence.

3 est le nombre qu'il faut ajouter à 4 pour obtenir 7 autrement dit cette différence est le terme manquant dans l'addition à trou : $4 + \dots = 7$.



Explication : Le mot **addition** vient du latin *ad-da-re* signifiant « donner en plus ».

Le mot **plus** vient du préfixe latin *pluri* signifiant « plusieurs ».

Le mot **terme** vient du préfixe latin *terminus* signifiant « borne, limite » puis « somme à payer ».

Le mot **somme** vient du latin *summa* signifiant « total ».

Repères historiques. Nicolas CHUQUET, Luca PACIOLI et les mathématiciens du 16^e siècle utilise $\tilde{p}$ ou p pour « plus ». Le symbole actuel $+$ n'est apparu qu'à la fin du 16^e siècle et ne s'est imposé qu'au 19^e siècle.

Le symbole $+$ a connu différentes formes, par exemple René DESCARTES utilisait ✚ .



CHUQUET

On sait peu de choses de Nicolas CHUQUET (1445–1500) diplômé en médecine, il s'intéresse aux mathématiques et rédige un texte important d'arithmétique et d'algèbre : Le Triparty en la science des nombres. Il familiarise ses lecteurs aux nombres arabes, aux opérations arithmétiques et aux racines. Il introduit l'exposant pour noter les puissances.



Explication : Le mot **soustraction** vient du latin *subs-trahere* signifiant « tirer par dessous ».

Chez les Romains, le nombre à soustraire est le *numerus minendus* c'est-à-dire le nombre le plus petit d'où le mot français **moins** et le mot anglais minus.

Le mot **différence** vient du latin *differe* signifiant « être dissemblable ». Au cours des siècles, le résultat d'une soustraction a été désigné par d'autres noms : reste, résidu, excès, reliquat.



Repères historiques. Les Arabes au 12^e siècle utilisaient le mot *tarh* signifiant « retrancher, ôter ». Au Moyen-Âge, on parle de diminuer, de réduire et la soustraction est parfois appelée subduction.

Nicolas CHUQUET et Luca PACIOLI utilisent $\tilde{m}$ ou m pour « moins ». Le symbole actuel $-$ semble être une barre utilisée par les marchands pour séparer la tare du poids total de marchandise.



PACIOLI

Luca PACIOLI (1445–1517) est un mathématicien et père franciscain italien. Le principal apport de son œuvre est de rassembler et des connaissances de son époque dans divers domaines des mathématiques. Pour l'arithmétique et les résolutions d'équations, il s'inspire notamment de Leonardo FIBONNACCI et présente des méthodes destinées à l'usage des marchands au moment où le commerce se développe dans plusieurs cités de la péninsule italienne. Son apport principal concerne la simplification de certaines notations.

Définition **Produit, quotient**

- Le résultat d'une multiplication s'appelle le **produit** et les nombres que l'on multiplie entre eux sont appelés **facteurs** du produit.
- Le résultat d'une division s'appelle le **quotient**. Dans la division du nombre a par le nombre b (NON NUL), a s'appelle le dividende et b le diviseur.

Le quotient de deux nombres est le nombre par lequel il faut multiplier le diviseur pour obtenir le dividende.



Exemple 2.

- Le produit de 4 par 6 est le résultat de la multiplication 4×6 c'est-à-dire 24. Les nombres 4 et 6 sont les facteurs de ce produit.
- Le quotient de 12 par 5 est le résultat de la division $12 \div 5$ c'est-à-dire 2,4.
2,4 est le nombre par lequel il faut multiplier 5 pour obtenir 12 autrement dit ce quotient est le facteur manquant dans la multiplication à trou : $5 \times \dots = 12$.



Explication : Le mot **multiplication** vient du latin *multiplex* et *actio* signifiant « action de chercher le multiple » par analogie avec **duplication** (*duplex* et *actio*) qui signifie « action de chercher le double ».

Le mot **division** vient du latin *dis-videre* signifiant « voir en séparant ».



Repères historiques. En 1631, William OUGHTRED utilise le symbole $\times$. En 1698, Gottfried Wilhelm LEIBNIZ introduit le point $\cdot$ afin d'éviter la confusion avec la lettre x . À partir du 18^e siècle les deux symboles $\cdot$ et $\times$ sont les plus utilisés. Pour la division, le symbole $\div$ est employé par Johann RAHN en 1659 dans *Teutsche Algebra* et Gottfried Wilhelm LEIBNIZ propose : (en relation avec $\cdot$ pour la multiplication).

II Enchaînement d'opérations

Proposition Calcul ne comportant QUE des $+$, $-$ ou QUE des $\times$, $\div$

Règle 1 Dans une succession de calculs ne comportant que des additions et des soustractions, on effectue les calculs de gauche à droite.

Règle 2 Dans une succession de calculs ne comportant que des multiplications et des divisions, on effectue les calculs de gauche à droite.



Exemple 3.

- Calculer $A = 11 - 7 + 5 - 1$.
 $A = 11 - 7 + 5 - 1$ la suite de calculs ne comporte que des additions et des soustractions, on applique **R1** (règle 1);
 $= 4 + 5 - 1$ on calcule $11 - 7 = 4$ et on applique **R1**;
 $= 9 - 1$ on calcule $4 + 5 = 9$ et on applique **R1**.
 $= 8$
- Calculer $B = 35 \div 7 \times 6 \div 2$.
 $B = 35 \div 7 \times 6 \div 2$ la suite de calculs ne comporte que des multiplications et des divisions, on applique **R2** (règle 2);
 $= 5 \times 6 \div 2$ on calcule $35 \div 7 = 5$ et on applique **R2**;
 $= 30 \div 2$ on calcule $5 \times 6 = 30$ et on applique **R2**.
 $= 15$

Remarque : S'il n'y a QUE des additions, on peut effectuer les opérations dans n'importe quel ordre : le résultat est le même. Cette propriété est également vraie s'il n'y a QUE des multiplications.

Il faut alors organiser astucieusement les calculs.



Exemple 4.

- Calculer $A = 3 + 4 + 17 + 26$.
 La succession de calculs ne comporte que des additions, nous pouvons donc regrouper les termes astucieusement pour « simplifier » les calculs.

$$A = 3 + 4 + 17 + 26 = 20 + 30 = 50.$$

- Calculer $B = 2 \times 3 \times 7 \times 5$.
 La succession de calculs ne comporte que des multiplications, nous pouvons donc regrouper les facteurs astucieusement pour « simplifier » les calculs.

$$A = 2 \times 3 \times 7 \times 5 = 10 \times 21 = 210.$$

Proposition Règles de priorité pour un calcul SANS parenthèses

Règle 3 Dans une succession de calculs sans parenthèses, on effectue les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions.

On dit que les multiplications et les divisions sont **prioritaires** sur les additions et les soustractions.

 Exemple 5. Calculer $A = 3 \times 4 + 1 - 30 \div 6$.

$$\begin{aligned}
 A &= 3 \times 4 + 1 - 30 \div 6 && \text{la succession de calculs comporte plusieurs opérations, on repère les multiplications et divisions et on applique R3 (règle 3);} \\
 &= 12 + 1 - 5 && \text{il ne reste plus que des additions et soustractions;} \\
 &= 12 + 1 - 5 && \text{on applique R1;} \\
 &= 13 - 5 && \text{on calcule } 12 + 1 = 13 \text{ et on applique R1.} \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

Proposition Règles de priorité pour un calcul AVEC parenthèses

Règle 4 Dans une succession d'opérations comportant des parenthèses, on calcule d'abord les expressions entre parenthèses; si les parenthèses sont imbriquées, on commence par les parenthèses les plus « intérieures ».

Remarque : Il peut être intéressant de bien identifier les parenthèses correspondantes.

 Exemple 6.

- Calculer $A = (3 \times 4 - 8) \times (7 - 2)$.

$$\begin{aligned}
 A &= (3 \times 4 - 8) \times (7 - 2) && \text{la succession de calculs comporte des parenthèses on applique R4 (règle 4) et on calcule chacune des expressions entre parenthèses;} \\
 &= (3 \times 4 - 8) \times (7 - 2) && \text{dans ces expressions il n'y a plus de parenthèses donc on applique les règles R1, R2 et R3.} \\
 &= (12 - 8) \times 5 \\
 &= 4 \times 5 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

- Calculer $B = 35 - [(7 + 5) \times 2]$.

$$\begin{aligned}
 B &= 35 - [(7 + 5) \times 2] && \text{la succession de calculs comporte des parenthèses (ou crochets) on applique R4 (règle 4) et on calcule l'expression entre crochets;} \\
 &= 35 - [(7 + 5) \times 2] && \text{dans cette expression il y a encore des parenthèses donc on applique R4;} \\
 &= 35 - [12 \times 2] && \text{on applique les règles R1, R2 et R3.} \\
 &= 35 - 24 \\
 &= 11
 \end{aligned}$$

- Calculer $C = [(4 \times (6 + 2)) - (6 \times 5)] \times 3$.

$$\begin{aligned}
 C &= [(4 \times (6 + 2)) - (6 \times 5)] \times 3 && \text{on colore les parenthèses (ou crochets) correspondantes;} \\
 &= [(4 \times (6 + 2)) - (6 \times 5)] \times 3 && \text{on commence par les parenthèses les plus intérieures (les parenthèses noires), on applique R4;} \\
 &= [(4 \times 8) - 30] \times 3 && \text{on continue par les parenthèses les plus intérieures (les parenthèses bleues), on applique R4;} \\
 &= [32 - 30] \times 3 && \text{on applique R4.} \\
 &= 2 \times 3 = 6
 \end{aligned}$$

 **Explication :** Le mot **parenthèse** vient du grec *para* - *anthesis* signifiant « mettre à côté ».



Repères historiques. Lors de la mise en place du calcul symbolique tout au long du 17^e siècle, se pose le problème de l'écriture d'expressions mathématiques complexes. Le vinculum, une barre horizontale placée au dessous ou au dessus de l'expression à regrouper est utilisé dès 1484 par Nicolas CHUQUET. Ainsi on distingue $a + \underline{bc}$ de $\underline{a + bc}$.

René DESCARTES (17^e siècle) utilise la notation $x + \left. \begin{smallmatrix} +a \\ -b \end{smallmatrix} \right\} y$ pour l'écriture de $x + (a - b)y$.

Ce sont Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1702) et Leonhard EULER (1743) qui contribuent à imposer les parenthèses. Leur avantage du point de vue typographique est évident.

Proposition Calcul sous forme fractionnaire

Règle 5 Si dans une expression un quotient est écrit sous forme fractionnaire, il convient d'effectuer les calculs comme s'il y avait des parenthèses autour du numérateur et du dénominateur.



Exemple 7.

$$\bullet \frac{45}{7+2} = 45 \div (7+2) = 45 \div 9 = 5.$$

$$\bullet \frac{15-7}{1+3} = (15-7) \div (1+3) = 8 \div 4 = 2.$$

III Distributivité

Proposition Distributivité simple

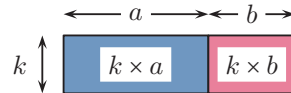
Pour tous nombres a , b et k , $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ et $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$.

Produit	$\longleftrightarrow$	Somme
$k \times (a + b)$	=	$k \times a + k \times b$
$k \times (a - b)$	=	$k \times a - k \times b$

Interprétation géométrique de

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b.$$

L'aire du grand rectangle est la somme des deux petits.



On symbolise cette distributivité avec des flèches :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \quad \text{et} \quad k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$



Explication : Le mot **distributivité** vient du latin *dis-tribuere* signifiant « répartir entre les tribus les avantages et les charges ». Ce mot est dû au Français François-Joseph SERVOIS en 1814.

Définition Développement, factorisation

- **Développer** un produit signifie le transformer en une **somme**.
- **Factoriser** une somme signifie la transformer en **produit**.



Exemple 8.

$$\bullet \text{ Pour développer } A = 4 \times (6 + 8), \text{ on écrit : } A = 4 \times (6 + 8) = 4 \times 6 + 4 \times 8 = 24 + 32 = 56$$

$$\bullet \text{ Pour factoriser } B = 12 \times 5 + 12 \times 3, \text{ on écrit : } B = 12 \times 5 + 12 \times 3 = 12 \times (5 + 3) = 12 \times 8 = 96$$

La distributivité peut être utile pour le calcul mental.



Exemple 9. Pour calculer 7×23 , on peut écrire : $7 \times 23 = 7 \times (20 + 3) = 7 \times 20 + 7 \times 3 = 140 + 21 = 161$.

IV Exercices

1 Vocabulaire

Ex 1 ☆☆☆ Somme ou produit?

Les calculs suivants sont-ils des sommes (S) ou des produits (P)?

- | | S | P |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1) $9 + 4 \times 3$ | ☐ | ☐ |
| 2) $7 \times 5 + 6$ | ☐ | ☐ |
| 3) $(5 + 4) \times 2$ | ☐ | ☐ |
| 4) $3 \times 7 + 4 \times 5$ | ☐ | ☐ |
| 5) $3 \times (7 + 4) \times 5$ | ☐ | ☐ |
| 6) $3 + 7 \times 5 + 4$ | ☐ | ☐ |
| 7) $(3 + 7) \times 5 + 4$ | ☐ | ☐ |
| 8) $(3 + 7) \times (5 + 4)$ | ☐ | ☐ |
| 9) $(5 + 3 \times (4 + 6)) \times 2 + 1$ | ☐ | ☐ |

Ex 2 ☆☆☆ Vocabulaire

Traduire par un calcul les phrases suivantes :

A est le produit de 4 par la somme de 7 et de 8.

B est la somme de 6 et du produit de 9 par 4.

C est la différence entre 68 et le quotient de 24 par 3.

D est le produit de 7 par la différence entre 15 et 9.

Parmi les expressions précédentes, quelles sont celles qui sont égales?

Ex 3 ☆☆☆ Vocabulaire

Traduire chaque phrase par une expression puis la calculer.

A est la différence entre le produit de 5 par 4, et 3.

B est le produit de la somme de 3 et de 7, par 5.

C est le quotient de la différence entre 20 et 4, par la somme de 1 et de 3.

D est le double de la somme de 14 et de 8.

E est le produit de 21 par la différence entre 65 et 56.

F est la somme du produit de 8 par 12, et de 64.

G est le triple de la somme de 8 et de 4.

Ex 4 ☆☆☆ Vocabulaire

Traduire avec une phrase chacun des calculs (écrire les nombres en chiffres).

$$A = 29 \times 91 - 44$$

$$B = 25 + 90 \div 15$$

$$C = (94 - 56) \times 61$$

$$D = (13 + 11) \div (17 - 9)$$

2 Priorités

Ex 5 ☆☆☆ Règles de calcul

En corrigeant l'exercice d'un élève, le professeur a barré en rouge certaines égalités. Expliquer les erreurs commises par l'élève.

$$1) 9 + 8 - 7 + 6 \neq 17 - 13 = 4$$

$$2) (5 + 3) \times 7 - 2 \neq 8 \times 5 = 40$$

$$3) (27 - (5 + 7)) \div 3 \neq 27 - 12 \div 3 = 27 - 4 = 23$$

Ex 6 ☆☆☆ Priorités des opérations

Calculer en respectant les priorités opératoires (préciser à chaque étape du calcul la règle utilisée).

* Série 1

$$A = 3 + 7 \times 2$$

$$B = 6 \times 9 - 7$$

$$C = 7 \times 8 \div 4$$

$$D = 7 + 3 \times 2$$

$$E = 13 \times 3 + 6$$

$$F = 12 \div (7 - 3)$$

$$G = 4 \times (9 + 4)$$

$$H = 6 \times 11 - 7$$

* Série 2

$$A = 4 \times 10 - 11$$

$$B = 9 + 9 - 5$$

$$C = 12 \div 3 + 5$$

$$D = 9 + 11 \times 7$$

$$E = 2 \times (11 - 10)$$

$$F = 2 \times 11 - 10$$

$$G = 8 + 7 - 11$$

$$H = (30 \div 2) \div 3$$

* Série 3

$$A = 2 + 5 \div 5 + 10 \times (8 - 3)$$

$$B = (12 \div 6) \times (7 + 3) + 7 - 12$$

$$C = 12 - 6 + 9 + (10 \div 10) \times 8$$

$$D = 8 + 2 - ((7 + 2) \times 4) \div 12$$

$$E = 12 \div 2 + 10 - 7 + 2 \times 13$$

$$F = 6 + 2 \times 13 + 3 - 10 \div 5$$

* Série 4

$$A = 6 - (13 \div 13) \times 4 + 12 + 8$$

$$B = 12 + 13 - 6 \times (6 + 7) \div 13$$

$$C = 13 + (9 \times 12) \div 9 - (6 + 10)$$

$$D = 11 + (8 \times 9) \div 6 - (6 + 4)$$

Ex 7 ☆☆☆ Parenthèses

Rajouter éventuellement des parenthèses de sorte que les calculs soient corrects (ne pas mettre de parenthèses inutiles).

* Série 1

$$1) 6 + 5 \times 4 - 3 = 23$$

$$2) 6 + 5 \times 4 - 3 = 41$$

$$3) 6 + 5 \times 4 - 3 = 11$$

$$4) 6 \times 5 - 4 + 3 = 23$$

$$5) 6 \times 5 - 4 + 3 = 29$$

$$6) 6 \times 5 - 4 + 3 = 9$$

* Série 2

$$1) 6 \times 9 - 7 - 7 + 3 = 2$$

$$2) 7 + 4 \times 5 - 3 = 22$$

$$3) 3 + 2 \times 5 \times 4 - 2 = 50$$

$$4) 17 \times 2 + 5 - 2 \times 5 = 49$$

Ex 8 ☆☆☆ **Opérations**

1) Compléter avec les signes $+$ $-$ $\times$ $\div$ $()$ qui conviennent :

- a) $75 \dots 7 \dots 5 = 40$ c) $6 \dots 6 \dots 6 = 7$
 b) $6 \dots 6 \dots 6 = 6$ d) $4 \dots 3 \dots 2 = 6$

2) En utilisant une seule fois les nombres 3; 7; 10 et autant de fois que l'on veut les signes $+$ $-$ $\times$ $\div$ $()$ essayer d'obtenir les résultats suivants :

- a) 20 b) 14 c) 31 d) 67 e) 40 f) 1

Ex 9 ☆☆☆ **Problèmes**

1) Une école organise une kermesse. Elle met en vente 80 bouteilles de kéfir à 4 €, 250 bouteilles de kombucha à 3 € et 400 bouteilles de limonade à 2 €. À la fin de la soirée, il reste 18 bouteilles de kéfir, 35 bouteilles de kombucha et 124 bouteilles de limonade.

- a) Sans effectuer les calculs, écrire (en ligne) la somme d'argent encaissée.
 b) Calculer cette somme encaissée.

2) Un marchand achète 120 kg de pommes de terre à 0,61 € le kilogramme. Il en vend 95 kg à 1,07 € le kilogramme et pour écouler son stock, il décide de solder le reste à 0,46 € le kilogramme.

- a) Sans effectuer les calculs, écrire (en ligne) le bénéfice du marchand.
 b) Calculer ce bénéfice.

Ex 10 ☆☆☆ **Priorités des opérations**

Calculer en respectant les priorités.

*** Série 1**

$$A = [12 + 20 \times (7 + 4) + 10 \times (8 + 12)] \times 2$$

$$B = (6 + 7 \times 3) + 5 \times [12 + 3 \times (7 + 3)]$$

$$C = (15 + 7 \times 3) \div (2 + 1) - 4 \times 3 + 2$$

$$D = (100 - 3 \times 10) + 2 + 2 \times (9 + 3 \times 5)$$

*** Série 2**

$$A = 9 + 4 \times (6 + 3) \times 2 - 1$$

$$B = 36 + 6 \div 2 - (4 \times 3 + 7)$$

$$C = (26 + 9) \times 4 - 2 \times (1 + 6)$$

$$D = 6 \times (5 + [2 \times (50 \div 10 - 3)] \div 4 + 1) - 8$$

$$E = [15 \div (3 + 2) - 2 + 3 \times (10 - 7)] \times 2 + 4$$

Ex 11 ☆☆☆ **Priorités des opérations**

Calculer en respectant les priorités.

*** Série 1**

$$A = 9 + (4 \times 6 + 3 \times 2 - 2) \times 4$$

$$B = (9 + 4) \times 6 - 3 \times (2 - 2) \times 4$$

$$C = 9 + 4 \times (6 + 3) \times 2 - 2 \times 4$$

$$D = 9 + 4 \times (6 + 3) \times (2 - 2) \times 4$$

*** Série 2**

$$A = 54 + 6 \div 2 + 15 \times 3$$

$$B = [(54 + 6) \div 2 + 15] \times 3$$

$$C = (54 + 6) \div 2 + 15 \times 3$$

$$D = (5 + 6) \times 12 - 5 \times 2 \times 3 - 2$$

$$E = [5 + 6 \times (12 - 5 \times 2)] \times 3 - 2$$

$$F = (5 + 6) \times (12 - 5 \times 2) \times (3 - 2)$$

Ex 12 ☆☆☆ **Priorités des opérations**

Calculer en respectant les priorités.

*** Série 1**

$$A = (24 \times 10 - 8 \times 5) \div [50 \div 5 - (2 + 3)]$$

$$B = 4 + 5 \times 2 - [2 \times (5 \times 4 + 1 - 21) + 2]$$

$$C = (4 \times 4 - 2 \times 7) \times 9 - 2 \times [15 - 2 \times (4 - 1)]$$

$$D = (12 - 2 \times 5) + 4 \times 15 + 3 \times [24 \div 2 - (4 + 6)]$$

*** Série 2**

$$A = 15 + 8 \times 4 - [5 \times 3 + (2 + 3) \times 4 - 2]$$

$$B = (15 + 8) \times 4 - [(5 \times 3 + 2 + 3) \times (4 - 2)]$$

$$C = 15 + 8 \times 4 - 5 \times 3 + 2 + 3 \times 4 - 2$$

$$D = 15 + 8 \times 4 - 5 \times (3 + 2) + 3 \times (4 - 2)$$

Ex 13 ☆☆☆ **Quotient**

Réécrire les expressions en utilisant le signe $\div$.

$$A = \frac{25 - 7}{6} \quad B = \frac{33 - 12}{15 - 8} \quad C = 2 + \frac{5}{7}$$

Ex 14 ☆☆☆ **Quotient**

Calculer.

*** Série 1**

$$A = \frac{13 \times 27 + 5 \times 6}{6 \times 16 + 31} \quad C = \frac{(37 + 43) \times 5}{(6 \times 6 - 11) \times 2}$$

$$B = \frac{15 \times (27 + 43)}{(56 - 24) \times 2 - 29} \quad D = \frac{12 \times (26 + 31)}{6 \times 10 - 4 \times 12}$$

*** Série 2**

$$A = 15 + \frac{10 \times (27 + 35)}{20} \quad C = \frac{42 \times 26}{13} - \frac{42 - 26}{8}$$

$$B = \frac{5 + 13}{2} + \frac{5 \times (7 + 5)}{6} \quad D = \frac{42}{14} + \frac{4 \times (7 + 3 \times 5)}{2 \times 11}$$

Ex 15 ☆☆☆ **Concours Kangourou - qcm**

1) Quel est le résultat de $1\,000 - 100 + 10 - 1$?

- A : 111 B : 900 C : 909 D : 990 E : 999

2) $(10 \times 100) \times (20 \times 80)$ est égal à ..

- A : $2\,000 \times 8\,000$. C : $20\,000 \times 8\,000$.
 B : $2\,000 \times 80\,000$. D : $2\,000 \times 800$.

3) Combien vaut $2004 - 200 \times 4$?

- A : 0. B : 1 204. C : 1 200. D : 2 804.

Ex 16 ☆☆☆ **Concours Kangourou - qcm**

- 1) On écrit le nombre de mille chiffres, composé des mêmes quatre chiffres répétés :

20082008.....2008.

Combien de chiffres peut-on, au plus, supprimer de sorte que la somme des chiffres restants soit égale à 2008 ?

A : 564 | B : 497 | C : 500 | D : 601 | E : 746

- 2) On forme le plus grand nombre et le plus petit nombre de trois chiffres composés de chiffres tous différents entre eux. Quelle est leur différence ?

A : 899 | B : 885 | C : 864 | D : 800

E : un autre nombre.

- 3) Béatrice s'amuse à ajouter les chiffres qu'elle lit sur sa montre digitale. Par exemple, s'il est 21 : 17, son résultat est 11. Quelle est la plus grande somme qu'elle peut obtenir ainsi ?

A : 24 | B : 36 | C : 19 | D : 25

E : autre réponse.

Ex 17 ☆☆☆ **Opération**

On définit une nouvelle opération, appelée « étoile » et notée $\star$, par :

Si a et b sont deux nombres,

$$a \star b = a + (a \times b - b).$$

Effectuer les calculs suivants :

$A = 4 \star 3$	$C = 9 \star 6$	$E = (8 \star 5) \star 2$
$B = 7 \star 2$	$D = 6 \star 9$	$F = 8 \star (5 \star 2)$

Ex 18 ☆☆☆ **Concours Kangourou - qcm**

- 1) La somme de deux-mille nombres entiers strictement positifs est 2001. Quel est leur produit ?

A : 2 | B : 2000 | C : 2001 | D : 1

E : On ne peut pas savoir.

- 2) On place un chiffre dans chaque carré de façon à ce que la multiplication écrite soit correcte :

$$45 \times \square 3 = 3 \square \square \square.$$

Alors on est sûr que la somme des quatre chiffres placés dans les carrés...

A : est égale à 20

B : est égale à 21

C : est égale à 17

D : dépasse strictement 21

E : est strictement inférieure à 17

- 3) On considère l'ensemble constitué de tous les nombres à quatre chiffres formés avec les chiffres 1, 2, 3, 4 sans qu'aucun ne se répète.

La somme de tous les nombres de cet ensemble est égale à...

A : 55 550	C : 66 660	E : 98 760
B : 99 990	D : 100 000	

Ex 19 ☆☆☆ **Calcul astucieux**

On pose $N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$.

- 1) Calculer astucieusement la valeur de N .
- 2) Sans écrire le calcul, expliquer comment on peut trouver astucieusement la somme de tous les entiers compris entre 1 et 100 (en comptant aussi 1 et 100) et donner la valeur de cette somme.

Ex 20 ☆☆☆

On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre et lui ajouter 1.
Multiplier le résultat par 2 puis soustraire 2 au nombre obtenu.
Enfin, soustraire le nombre de départ au résultat précédent.

- 1) Effectuer ce programme de calcul en prenant 8 comme nombre de départ.
- 2) Effectuer ce programme de calcul en prenant 11 comme nombre de départ.
- 3) Que remarque-t-on ? Est-ce toujours le cas ?

Ex 21 ☆☆☆

On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre, prendre son carré et ajouter 12.
Soustraire 7 fois le nombre de départ au résultat précédent.

- 1) Effectuer ce programme de calcul en prenant 3 comme nombre de départ.
- 2) Effectuer ce programme de calcul en prenant 4 comme nombre de départ.
- 3) Que remarque-t-on ? Est-ce toujours le cas ?

Ex 22 ☆☆☆ **Zéros**

On multiplie les nombres de 1 à 25 :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 23 \times 24 \times 25$$

Par combien de 0 se termine l'écriture de ce produit ? Quel est le premier chiffre non nul ?

Ex 23 ☆☆☆ **Parenthésages**

On définit une opération notée $\otimes$. Cette opération est binaire c'est-à-dire que l'on ne peut faire le calcul qu'avec deux nombres. Par exemple, l'écriture $3 \otimes 2 \otimes 5$ n'a pas de sens.

Pour un calcul à trois nombres, on utilise des parenthèses et il y a deux possibilités :

$$3 \otimes (2 \otimes 5) \quad \text{ou} \quad (3 \otimes 2) \otimes 5.$$

- 1) Écrire tous les parenthésages possibles pour un calcul à quatre nombres : $3 \otimes 2 \otimes 5 \otimes 4$.
- 2) Écrire tous les parenthésages possibles pour un calcul à cinq nombres : $3 \otimes 2 \otimes 5 \otimes 4 \otimes 7$.

3 Distributivité

Ex 24 ☆☆☆

Compléter les calculs :

$$A = 8 \times (5 + 7) = 8 \times \dots + 8 \times \dots$$

$$B = (12 + 5) \times 3 = \dots \times \dots + \dots \times \dots$$

$$C = 3 \times (15 - 7) = 3 \times \dots - 3 \times \dots$$

$$D = (22 - 15) \times 7 = \dots \times \dots - \dots \times \dots$$

$$E = 12 \times 7 + 12 \times 11 = \dots \times (7 + \dots)$$

$$F = 3 \times 14 - 3 \times 8 = (14 \dots 8) \times \dots$$

Ex 25 ☆☆☆

Développer puis calculer :

$$A = 5 \times (3 + 6)$$

$$D = (50 - 1) \times 7$$

$$B = 12 \times (100 - 2)$$

$$E = 2,4 \times (10 + 2)$$

$$C = (11 + 1) \times 9$$

$$F = 4,5 \times (1 + 20)$$

Ex 26 ☆☆☆

Factoriser puis calculer :

$$A = 17 \times 3 + 7 \times 17$$

$$C = 6,2 \times 8 + 8 \times 3,8$$

$$B = 123 \times 12 - 123 \times 9$$

$$D = 6 \times 15 - 6 \times 4 + 6 \times 7$$

$$E = 11 \times 7,2 + 4,5 \times 11 - 9,7 \times 11$$

$$F = 157 \times 0,7 - 0,7 \times 52 - 5 \times 0,7$$

Ex 27 ☆☆☆

- 1) Compléter le tableau :

$\times$	100	1	2
17			

- 2) À l'aide du tableau, calculer :

$$\text{a) } 17 \times 101.$$

$$\text{c) } 17 \times 102.$$

$$\text{b) } 17 \times 99.$$

$$\text{d) } 17 \times 98.$$

Ex 28 ☆☆☆

Calculer astucieusement en utilisant la distributivité :

$$A = 12 \times 13$$

$$C = 18 \times 14$$

$$E = 16 \times 9,9$$

$$B = 99 \times 67$$

$$D = 4,5 \times 104$$

$$F = 27 \times 1,1$$

Ex 29 ☆☆☆

On donne le produit : $43 \times 27 = 1161$.

Utiliser cette égalité pour trouver les résultats des calculs sans poser les multiplications.

$$A = 43 \times 28$$

$$C = 42 \times 27$$

$$E = 43 \times 127$$

$$B = 43 \times 26$$

$$D = 44 \times 27$$

$$F = 143 \times 27$$

Ex 30 ☆☆☆

On donne les produits :

$$127 \times 2 = 254$$

$$127 \times 5 = 635$$

$$127 \times 7 = 889$$

Utiliser ces égalités pour trouver les résultats des calculs sans poser les multiplications.

$$A = 127 \times 70$$

$$C = 127 \times 702$$

$$E = 127 \times 777$$

$$B = 127 \times 25$$

$$D = 127 \times 257$$

$$F = 127 \times 252$$

Ex 31 ☆☆☆

- 1) Choisir deux nombres. De combien augmente leur produit si on ajoute 4 à l'un d'eux ?
- 2) Sachant que ce produit a ainsi augmenté de 116, trouver l'un des facteurs.
- 3) Trouver l'autre facteur dans les deux cas suivants :
 - a) La somme des deux nombres est égale à 36.
 - b) Le produit des deux nombres est égal à 348.

Ex 32 ☆☆☆ Le ballon

Un ballon de football est formé de 12 pentagones réguliers et de 20 hexagones réguliers assemblés entre eux par une couture.

Leurs côtés mesurent 4,5 cm.

Trouver la longueur de la couture.



Ex 33 ☆☆☆

Chaque forme géométrique contient un nombre.

On sait que :

$$\nabla = 10$$

$$\square + \diamond = 100$$

$$\triangle + \bigcirc = \nabla$$

$$\square \times \triangle + \nabla \times \diamond + \bigcirc \times \square = \heartsuit$$

Quel nombre contient $\heartsuit$?

V Problèmes

Problème 1 Le compte est bon



Le jeu *Le compte est bon* est tiré d'une émission de télévision : *Des chiffres et des lettres*. Cette émission a été créée en 1965, c'est le plus ancien jeu télévisé quotidien toujours diffusé de la télévision française.

Voici les règles du jeu *Le Compte est bon* :

Le but de cette épreuve est d'obtenir un nombre de 100 à 999 en utilisant les opérations élémentaires $+$, $-$, $\times$, $\div$ sur six entiers naturels tirés au hasard parmi les entiers de 1 à 10, 25, 50, 75 et 100.

Chacun des six nombres ne peut être utilisé qu'une fois ! À défaut de trouver le compte exact, il faut tenter de s'en approcher le plus près possible.

Exemple 1. Nombres tirés : 3 100 6 8 10 10 . Résultat demandé : 338

Il est possible d'utiliser les calculs intermédiaires :

$$100 + 6 = 106 \quad 106 \times 3 = 318 \quad 10 - 8 = 2 \quad 2 \times 10 = 20 \quad 318 + 20 = 338.$$

Ce qui s'écrit en une seule expression $(100 + 6) \times 3 + (10 - 8) \times 10 = 338$.

1) En utilisant les calculs intermédiaires indiqués, écrire l'expression (sans parenthèses inutiles) qui donne le résultat demandé.

a) Nombres tirés : 75 3 6 8 10 2 . Résultat demandé : 231

$$6 - 2 = 4 \quad 75 - 10 = 65 \quad 65 - 8 = 57 \quad 57 \times 4 = 228 \quad 228 + 3 = 231.$$

b) Nombres tirés : 25 4 50 8 10 2 . Résultat demandé : 508

$$25 - 8 = 17 \quad 50 + 10 = 60 \quad 60 \times 17 = 1020 \quad 1020 - 4 = 1016 \quad 1016 \div 2 = 508.$$

c) Nombres tirés : 25 3 6 1 7 9 . Résultat demandé : 400

$$7 + 1 = 8 \quad 6 \times 3 = 18 \quad 18 \times 8 = 144 \quad 144 \times 25 = 3600 \quad 3600 \div 9 = 400.$$

d) Nombres tirés : 10 2 1 3 4 9 . Résultat demandé : 468

$$9 + 3 = 12 \quad 12 \times 4 = 48 \quad 48 - 1 = 47 \quad 47 \times 10 = 470 \quad 470 - 2 = 468.$$

2) Écrire une expression (sans parenthèses inutiles) qui donne le résultat demandé.

a) Nombres tirés : 25 50 1 7 4 9 . Résultat demandé : 924

b) Nombres tirés : 25 50 100 5 3 6 . Résultat demandé : 487

c) Nombres tirés : 25 8 10 5 3 6 . Résultat demandé : 307

3) Dans cette question, nous ne pouvons utiliser que l'addition $+$, la multiplication $\times$ et les parenthèses.

Exemple 2. Nombres tirés : 5 7 . Il n'y a que deux résultats possibles : $5 + 7 = 12$ et $5 \times 7 = 35$.

a) Nombres tirés : 8 5 3 .

Combien de résultats possibles obtient-on en utilisant ces trois nombres ?

b) Nombres tirés : 8 5 3 7 .

Combien de résultats possibles obtient-on en utilisant ces quatre nombres ?

Problème 2 Simon STEVIN et la Disme



Simon STEVIN (1548–1620) est un savant flamand qui publie en 1582 un bref traité rédigé en flamand intitulé *De Thiende* et dont la version en français est *La Disme* (ce qui signifie le dixième). Quoique Simon STEVIN n'ait pas été le premier à préconiser l'usage des fractions décimales et à proposer des notations nouvelles, son traité a joué un rôle important dans la diffusion progressive des nombres décimaux. En physique, il étudie les fluides immobiles (l'hydrostatique), la mécanique et l'optique.

Le traité s'ouvre sur quelques définitions, explique ensuite comment étendre aux nombres décimaux les algorithmes de calcul connus pour les entiers, et se termine sur des exemples illustrant l'utilité de ces nombres pour différents corps de métiers (arpenteurs, tapissiers, astronomes, marchands ...).

★ **Partie A.** Dans l'extrait suivant, Simon STEVIN donne les définitions pour l'écriture d'un nombre.

DÉFINITION II	EXPLICATION
<i>Tout nombre entier proposé se dit COMMENCEMENT, son signe est tel ①.</i>	Comme 3①7②5③9④, c'est à dire 3 <i>Primes</i> 7 <i>Secondes</i> 5 <i>Tierces</i> 9 <i>Quartes</i> et ainsi se pourrait procéder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire que selon cette définition les dits nombres font $\frac{3}{10} \frac{7}{100} \frac{5}{1000} \frac{9}{10000}$, ensemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8①9①3②9③, valent $8 \frac{9}{10} \frac{3}{100} \frac{9}{1000}$, et ensemble $8 \frac{939}{1000}$ et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi savoir que nous n'usons en la DISME d'aucun nombres rompus, aussi que le nombre de multitudes des signes, excepté, n'excède jamais le 9. Par exemple, nous n'écrivons pas 7①12② mais en leur lieu 8①2②, car ils valent autant.
EXPLICATION Par exemple quelque nombre proposé de trois cent soixante quatre, nous le nommons trois cent soixante quatre COMMENCEMENTS, les décrivant en cette sorte 364①. Et ainsi de tous autres semblables.	
DÉFINITION III	DÉFINITION IV
<i>Et chaque dixième partie de l'unité de commencement nous la nommons PRIME, son signe est tel ① ; chaque dixième partie de l'unité de prime nous la nommons SECONDE, son signe est tel ② et ainsi des autres chaque dixième partie de l'unité de son signe précédent, toujours en l'ordre un davantage.</i>	<i>Les nombres de la précédente seconde et troisième définition se disent en général NOMBRES DE DISME.</i>

- 1) a) Comment définir le sens des mots *prime*, *seconde* et *quarte* dans l'extrait ?
 b) Comment écrivons-nous aujourd'hui, avec une écriture « à virgule », le nombre que STEVIN propose d'écrire 3①7②5③9④ ? De même, comment écrire 3①1④2①3⑥4 ?
 c) En utilisant la notation de STEVIN, écrire les nombres 3,07 et 0,102.
- 2) L'écriture $8 \frac{939}{1000}$ peut être vue comme une addition, laquelle ?
- 3) a) Expliquer la phrase « nous n'écrivons pas 7①12② mais en leur lieu 8①2②, car ils valent autant ».
 b) Simplifier avec l'écriture de STEVIN, les nombres :
 - 3①9①13②
 - 2①9①24②
 - 2①13①14②15③
 - 7①26①39②47③

- 4) En s'inspirant de la phrase « 8⑨9①3②9③ valent $8\frac{9}{10}\frac{3}{100}\frac{9}{1000}$ et ensemble $8\frac{939}{1000}$ », recopier et compléter :
- a) 57⑨1①2② valent ... et ensemble ...
- b) 13⑨5②7④ valent ... et ensemble ...
- c) ... valent ... et ensemble $17\frac{854}{1000}$.
- d) ... valent ... et ensemble $31\frac{29}{1000}$.

★ **Partie B.** Dans l'extrait suivant, Simon STEVIN donne une méthode pour effectuer des multiplications.

PROPOSITION III, De la multiplication
Étant donné nombre de Disme à multiplier, & multiplicateur, trouver leur produit.

Explication du donné. Soit le nombre à multiplier 32⑨5①7②, & multiplicateur 89⑨4①6②.

Explication du requis. Il faut trouver leur produit.

Construction : On mettra les nombres donnés en ordre comme ci-joignant, multipliant selon la vulgaire manière de multiplication des entiers en cette sorte :

				⑨	①	②	
				3	2	5	7
				8	9	4	6
		1	9	5	4	2	
	1	3	0	2	8		
	2	9	3	1	3		
	2	6	0	5	6		
	2	9	1	3	7	1	2
		⑨	①	②	③	④	

Donne produit 29137122.

Or, pour savoir ce que font, on ajoutera les deux derniers signes donnés, l'un ②, & l'autre aussi ②, font ensemble ④, nous dirons donc que le signe du dernier caractère du produit sera ④, lequel étant connu, tous les autres seront notoires, à cause de leur ordre continu. De sorte que 2913⑨7①1②2③2④ font le produit requis.

Démonstration : Le nombre donné à multiplier 32⑨5①7②, fait $32\frac{5}{10}\frac{7}{100}$, ensemble $32\frac{57}{100}$ & par même raison le multiplicateur 89⑨4①6② vaut $89\frac{46}{100}$, par le même multiplié le dit $32\frac{57}{100}$ donne $2913\frac{7122}{10000}$, mais autant vaut aussi le dit produit 2913⑨7①1②2③2④, c'est donc le vrai produit, ce qu'il fallait démontrer. Mais pour dire maintenant la raison pourquoi ② multiplié par ②, donne le produit ④ (qui est la somme de leurs nombres), idem, pourquoi ④ par ⑤ donne produit ⑨, & pourquoi ⑨ par ③ donne ③, etc. Prenons $\frac{2}{10}$ & $\frac{3}{100}$ (qui font 2① & 3②) leur produit est $\frac{6}{1000}$, qui valent 6③, à savoir un signe composé de la somme des nombres des signes donnés.

- Dans cet extrait, il y a quatre paragraphes et chaque paragraphe a un titre : *Explication du donné*, *Explication du requis*, *Construction* et *Démonstration*.
 - Quel est le sens des titres *Explication du donné* et *Explication du requis*?
 - Que fait STEVIN dans le paragraphe *Construction*?
 - Est-ce que STEVIN fait une démonstration au sens actuel dans le paragraphe *Démonstration*?
- Que veut dire STEVIN avec « *multipliant selon la vulgaire manière de multiplication des entiers* »?
- Le produit de 7① par 5① vaut 35② soit aussi 3①5②.
En utilisant la propriété des signes de STEVIN, déterminer en justifiant :
 - le produit de 32⑨ par 6②.
 - le produit de 5① par 6②.
 - le produit de 7② par 6②.
 - le produit de 32⑨5①7② par 6②.

Problème 3 Notation polonaise inverse

La notation post-fixée, dite aussi **Notation Polonaise Inverse** (NPI) ou en anglais *Reverse Polish Notation* (RPN), permet d'écrire une expression mathématique de façon non ambiguë sans utiliser de parenthèses. La description « polonaise » fait référence à la nationalité du logicien Jan LUKASIEWICZ qui a inventé la notation polonaise en 1924.

Commercialisée en janvier 1972 par Hewlett-Packard, la HP-35 est la première calculatrice scientifique qui devient célèbre sous le nom de « règle à calcul électronique ». Elle utilisait la NPI pour les calculs.

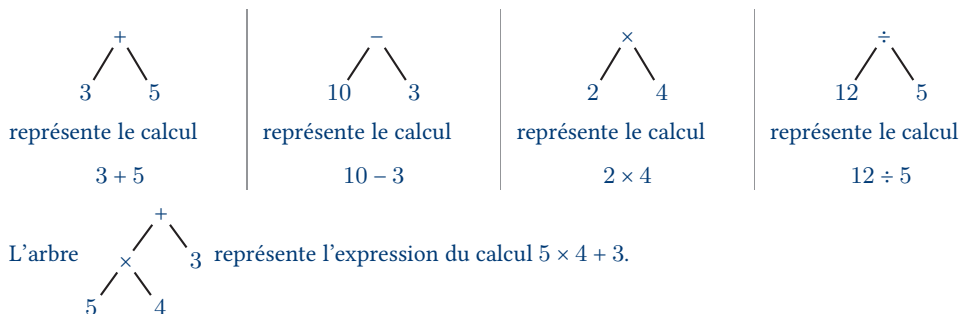


Calculatrice HP 35

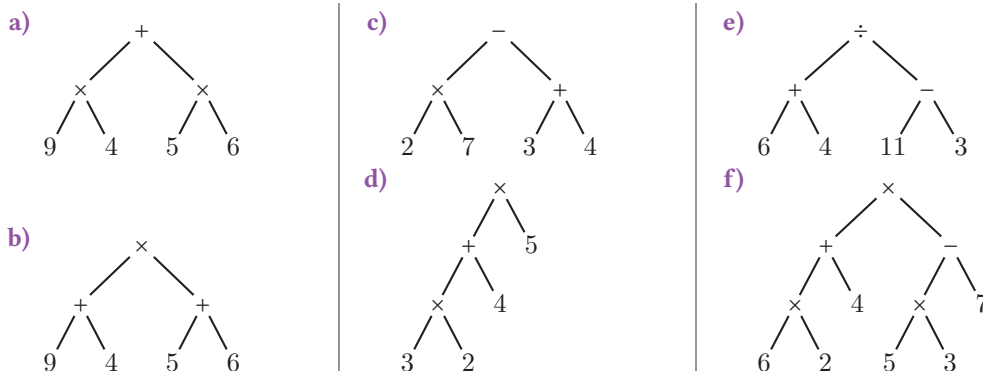
En informatique, la représentation d'un calcul se fait avec un **arbre binaire** (2 branches à chaque sommet).



Exemple 1.



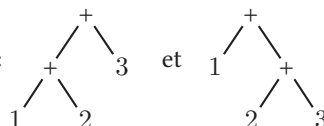
1) Donner pour chaque arbre, l'expression du calcul correspondant.



2) Représenter l'arbre correspondant à chacun des calculs.

- | | | |
|-------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| a) $(8 - 2) \times (7 + 5).$ | c) $\frac{3}{5 + 7}.$ | e) $(2 + 4 \times 3) \times 6.$ |
| b) $8 \times 7 + 4 \times 5.$ | d) $(2 + 4) \times 3 + 6.$ | f) $\frac{6 + 5}{2 \times 3 + 4}.$ |

3) Pour le calcul de $1 + 2 + 3$, on a deux arbres possibles :

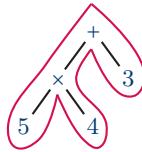


Déterminer le nombre d'arbres possibles pour les calculs :

- a) $1 + 2 + 3 + 4.$
 b) $1 + 2 + 3 + 4 + 5.$

- 4) Pour parcourir l'arbre de calcul, nous allons nous fixer comme règle de commencer le parcours à la racine de l'arbre (le signe le plus haut), puis de longer l'arbre en partant à gauche de la racine. L'**ordre post-fixé** est la liste de chaque sommet dans la position où il est rencontré pour la dernière fois.

 Exemple 2.



Ici le parcours donne :

$+ \rightarrow x \rightarrow 5 \rightarrow x \rightarrow 4 \rightarrow x \rightarrow + \rightarrow 3 \rightarrow +$

À partir de ce contour, on définit un ordre de parcours des sommets de l'arbre. On surligne le dernier sommet rencontré :

$+ \rightarrow x \rightarrow 5 \rightarrow x \rightarrow 4 \rightarrow x \rightarrow + \rightarrow 3 \rightarrow +$

Ce qui donne : $5 \rightarrow 4 \rightarrow x \rightarrow 3 \rightarrow +$

Nous noterons sans les symboles $\rightarrow$: $5 \quad 4 \quad \times \quad 3 \quad +$

Donner l'ordre post-fixé des arbres de la question 1).

- 5) La NPI correspond à l'ordre post-fixé du calcul.

 Exemple 3. Pour calculer une expression en NPI :

- On lit l'expression de gauche à droite : $3 \quad 5 \quad 4 \quad \times \quad +$
- Lorsque l'on rencontre un premier opérateur (+, -, ×, ÷), on calcule l'opération avec les deux nombres juste avant cet opérateur : $3 \quad \underbrace{5 \quad 4 \quad \times}_{5 \times 4 = 20} \quad +$
- On remplace cette opération par le résultat : $3 \quad 20 \quad +$
- On continue la lecture de l'expression : $\underbrace{3 \quad 20 \quad +}_{3 + 20 = 23}$
- À la fin il ne reste qu'une valeur, ici 23, c'est le résultat !

Donner pour chaque expression en NPI, l'expression du calcul correspondant et sa valeur.

- a) $3 \quad 5 \quad 4 \quad + \quad \times$
- b) $2 \quad 8 \quad + \quad 6 \quad 11 \quad + \quad \times$
- c) $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \times \quad + \quad \times \quad +$
- d) $8 \quad 2 \quad 3 \quad \times \quad + \quad 5 \quad 3 \quad \times \quad 8 \quad - \quad \div$

Géométrie : éléments de base

 **Repères historiques.** Selon PROCLUS, c'est THALÈS de Milet (~625–547 av. J.-C.) qui aurait rapporté la géométrie d'Égypte. La géométrie est une science pratique : elle sert aux arpenteurs du cadastre égyptien à délimiter le bornage des terrains après les crues du Nil. C'est au 5^e siècle av. J.-C. que commence, avec HIPPOCRATE de Chios, un long travail d'édification de propositions qui trouve son apogée au 3^e siècle av. J.-C. avec EUCLIDE et ses *Éléments*. Au 4^e siècle av. J.-C., l'Académie de PLATON, fondée au cœur d'Athènes, grave au fronton de l'école la devise : « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre ». Pour PLATON une forme géométrique est étudiée en tant « qu'objet mathématique » et la géométrie devient l'étude des formes idéales. Du 4^e siècle avant J.-C. au 4^e siècle après J.-C., à Alexandrie de nombreux mathématiciens sont formés. APOLLONIOS de Perge (3^e siècle av. J.-C.) étudie les sections de cône et la valeur de π , HIPPARQUE (2^e siècle av. J.-C.) se penche sur la trigonométrie et PAPPUS (2^e siècle) sur la géométrie.

Au Moyen-Âge, les œuvres grecques ne sont pas connues en Europe où l'on fait de la géométrie d'arpenteur mais elles sont étudiées dans le monde arabo-musulman (entre les 7^e et 13^e siècles). À la Renaissance (14^e–15^e siècles), la géométrie réapparaît avec la perspective utilisée en peinture.

En 1626, Gérard DESARGUES (1591–1661) expose une approche nouvelle de la géométrie inspirée des travaux sur la perspective. En 1637, René DESCARTES (1596–1650) propose une méthode algébrique (avec le calcul) pour résoudre des problèmes géométriques. Les travaux de René DESCARTES rencontrent un vif succès, ceux de Gérard DESARGUES ne sont développés qu'au 19^e siècle avec la géométrie projective.

Au 19^e et 20^e siècle apparaissent les géométries non euclidiennes.



EUCLIDE

***EUCLIDE** (~330–275 av. J.-C.) est l'auteur d'une dizaine d'ouvrages dont le plus connu est Les Éléments. Il est divisé en treize livres dont les quatre premiers portent sur la géométrie plane. Les livres V et VI portent sur la théorie des proportions et les triangles semblables. Les livres VII à IX traitent d'arithmétique et de théorie des nombres entiers. Le livre X traite des grandeurs incommensurables et les trois derniers de la géométrie des solides ainsi que des cinq corps réguliers de PLATON.*

L'œuvre d'EUCLIDE est restée pendant très longtemps le modèle de l'ouvrage mathématique.

I Point, segment, droite, demi-droite

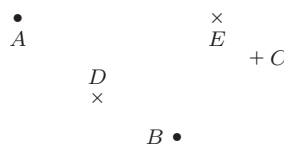
L'espace de travail de la géométrie plane est le plan, noté $\mathcal{P}$. Il peut être visualisé comme une feuille d'épaisseur nulle qui s'étend à l'infini dans toutes les directions. Les éléments qui le constituent sont appelés points.

Définition Point

Le **point** désigne un emplacement.

Remarques :

- Un point n'a donc aucune dimension, longueur, largeur, épaisseur, volume ou aire. Sa seule caractéristique est sa position.
- Un point est représenté par l'un des symboles $\bullet$, $+$ ou $\times$.
Il est nommé avec une lettre majuscule : A , B , ...
- Deux points **distincts** d'une figure sont nommés différemment.



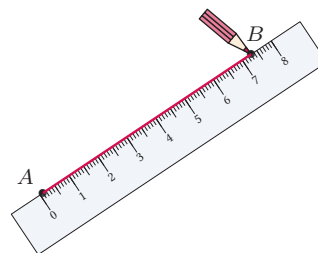
Explication : Le mot **point** vient du latin *punctum* signifiant « piqure ».

Notation : Si un point M appartient à un **ensemble de points** $\mathcal{E}$, on note $M \in \mathcal{E}$.

Si M n'appartient pas à $\mathcal{E}$, on note $M \notin \mathcal{E}$.

Définition Segment

Étant donnés deux points A et B , on appelle **segment** d'extrémités A et B , noté $[AB]$, l'ensemble des points que l'on obtient en parcourant LE PLUS COURT CHEMIN entre A et B .

**Remarques :**

- On admet qu'il n'y a qu'un seul « plus court chemin » entre deux points.
- Un segment se trace avec une règle.
- Les deux extrémités A et B appartiennent au segment $[AB]$ donc $A \in [AB]$ et $B \in [AB]$.
- $[AB]$ et $[BA]$ représentent le même segment et on note $[AB] = [BA]$.
- On dit que C est **entre** A et B lorsque $C \in [AB]$.

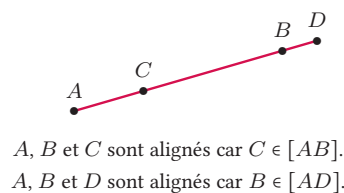
On obtient aussi la définition : le segment $[AB]$ est l'ensemble des points situés entre A et B .

Explication : Le mot **segment** vient du latin *secare* signifiant « couper ».

Le *segmentum* est chez les Romains une pièce de tissu découpé. Ce mot date du 16^e siècle.

Définition Points alignés, droite

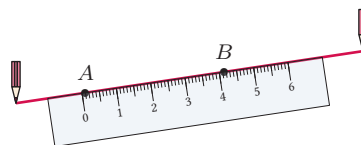
- Trois points sont dits **alignés** si l'un de ces trois points appartient au segment déterminé par les deux autres.
- On appelle **droite** définie par deux points A et B , notée (AB) , l'ensemble des points alignés avec A et B .



Autrement dit : A, B et C sont alignés si $A \in [BC]$ ou $B \in [AC]$ ou $C \in [AB]$.

Remarques :

- Deux points sont toujours alignés.
- Étant donnés deux points distincts A et B , la droite (AB) est l'ensemble des points que l'on obtient en prolongeant « indéfiniment » le segment $[AB]$ avec une règle au-delà de ses deux extrémités.



Explication : Le mot **règle** vient du latin *regula*, *regere* signifiant « mener droit ». La règle est donc un instrument servant à « mener droit ».

Axiome Par deux points distincts, il ne passe qu'une seule droite.

Remarques :

- Nous donnerons parfois un nom aux droites : (d) , $\mathcal{D}$ ou Δ , ...
- (AB) et (BA) représentent la même droite et on note $(AB) = (BA)$.
Si les points A, B et C sont alignés, $(AB) = (BC) = (AC)$.

Définition Demi-droite

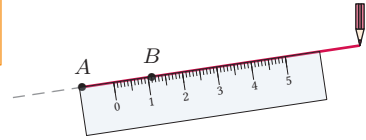
On appelle **demi-droite** d'origine A passant B l'ensemble des points P tels que $P \in [AB]$ ou $B \in [AP]$.
Cette demi-droite est notée $[AB)$.

Remarques :

- La demi-droite $[AB)$ est l'ensemble des points que l'on obtient en prolongeant « indéfiniment » le segment $[AB]$ avec une règle au-delà du point B .
- $[AB) \neq [BA)$



Explication : C'est Edmond LAGUERRE au 19^e siècle qui introduit cette notion. Considérant la droite comme une trajectoire qu'un mobile peut parcourir dans deux sens, il est amené à regarder la droite comme formée de deux demi-droites.

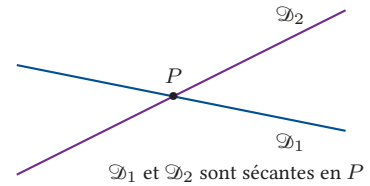


II Position relative de deux droites

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites du plan.

Définition Droites sécantes

Deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont dites **sécantes** lorsqu'elles n'ont qu'un seul point commun.
Le point commun s'appelle le **point d'intersection**.

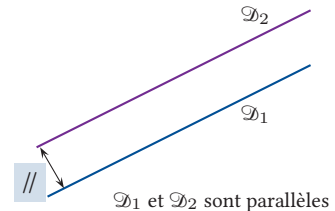


Explication : Le mot **sécante** vient du latin *secare* signifiant « couper ».
Au 3^e siècle av. J.-C., EUCLIDE parle de « droite tombante sur une droite ». Au 18^e siècle, on parle de « lignes obliques ». L'utilisation du mot « droites sécantes » semble récente.
Le mot **intersection** vient du latin *intersectio* signifiant « action de couper ». Son utilisation semble liée à la théorie des ensembles développée au 19^e siècle. En 1818, Gabriel LAMÉ parle du « **point de concours** de deux lignes ».

Remarque : Quand plusieurs droites sont sécantes en un seul point, on dit qu'elles sont **concurrentes**.

Définition Droites strictement parallèles

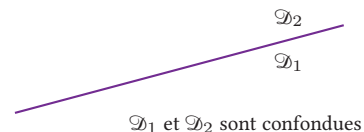
Deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont dites **strictement parallèles** lorsqu'elles n'ont aucun point commun.
On note : $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$.



Explication : Le mot **parallèle** vient du grec *para* signifiant « à côté » et *allêlous* signifiant « l'un de l'autre ».
Le symbole $//$ est introduit en 1677 par William OUGHTRED.

Définition Droites confondues

Deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont dites **confondues** (ou **égales**) lorsqu'elles ont au moins deux points communs.



Définition Droites de même direction

On dit que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont la **même direction** lorsque $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$ ou $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.

Remarque : On dit que deux droites sont **parallèles** (au sens large) lorsqu'elles ont la même direction.

Axiome d'EUCLIDE

Soient $\mathcal{D}$ une droite et P un point du plan n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. Il existe **UNE UNIQUE** droite parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par P .

III Longueur d'un segment

On appelle **grandeur** tout ce qui peut être évalué (longueur d'une tige, volume d'une pièce, prix d'une marchandise,...). On appelle **grandeur mesurable** celle pour laquelle on peut définir une somme et que l'on peut diviser en n grandeurs égales.

Définition Longueur, distance

On appelle **longueur** d'un segment la grandeur mesurable du segment.

La longueur du segment $[AB]$ se note AB .

On appelle **distance** entre les points A et B la longueur du segment $[AB]$.



Explication : Le mot **distance** vient du latin *distare* signifiant « se tenir écarté ».

Proposition

La longueur d'un segment est une grandeur mesurable.

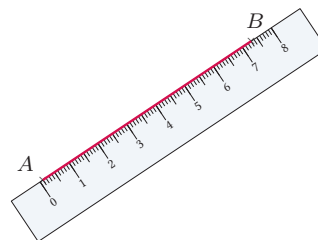
Démonstration : Voir le chapitre *Grandeurs*.

Mesurer un segment, c'est le comparer à un segment égal à l'unité – au mètre quand c'est l'unité de mesure choisie –. Cette comparaison se fait avec des instruments (règle, ...).



Exemple 1. On souhaite mesurer le segment $[AB]$. On place le zéro de la règle sur le point A puis on cale la règle le long du segment. Le point B se situe sur la graduation 7,3.

On en déduit que le segment $[AB]$ mesure 7,3 unités de mesure.



Remarque : La précision de la mesure dépend de l'instrument de mesure et de l'habileté de celui qui l'utilise.

On ne peut souvent donner que des valeurs approchées de la mesure. Si un segment mesure 7,3105 unités de mesure, la règle ne pourra permettre que de lire la valeur approchée 7,3. Si l'on souhaite une précision plus grande, il faudra changer d'instrument de mesure.

Définition Milieu

On appelle **milieu** d'un segment $[AB]$ le point $I \in [AB]$ tel que $IA = IB$.



Explication : Le mot **milieu** est la réunion de « mi » du latin *medius* signifiant « moyen » et de « lieu » du latin *locus* signifiant « endroit, place ».

IV Cercle

Définition

On appelle **cercle** $\mathcal{C}$ de **centre** O et de **rayon** R l'ensemble des points situés exactement à la distance R du point O .

 **Explication :** Le mot **cercle** vient du latin *circus* ou encore du grec *kerkos* signifiant « anneau ».

Proposition

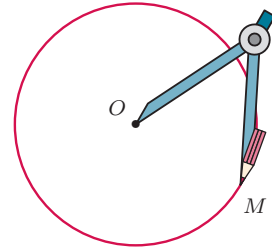
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R .

- Si un point M est tel que $OM = R$ alors M est sur le cercle $\mathcal{C}$.

Réciproquement :

- Si un point M est sur le cercle $\mathcal{C}$ alors $OM = R$.

Un cercle se trace avec un compas : la pointe sèche est placée sur le centre du cercle et l'écartement du compas correspond au rayon du cercle.



 **Explication :** Le mot **compas** vient du latin *compassare* signifiant « mesurer avec le pas ».

Cet instrument était déjà connu en Chine au 4^e siècle av. J.-C. Le compas servait déjà à partager un segment en parts égales, à mesurer et à tracer des cercles.

Définition Corde, diamètre, rayon

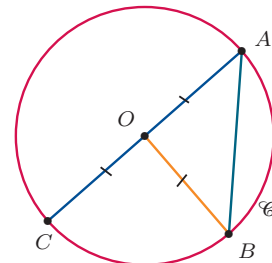
- On appelle **corde** du cercle un segment qui a pour extrémités deux points du cercle.
- On appelle **diamètre** du cercle une corde qui passe par le centre du cercle. Le centre du cercle est alors le milieu de ce diamètre.
- On appelle **rayon** du cercle un segment qui a pour extrémités le centre et un point du cercle.

Sur la figure ci-contre, $[AB]$ est une corde du cercle $\mathcal{C}$, $[AC]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et $[OB]$ est un rayon du cercle $\mathcal{C}$.

 **Explication :** Le mot **centre** vient du latin *centrum* tiré du grec *keutron* signifiant « aiguillon » puis « pointe du compas ».

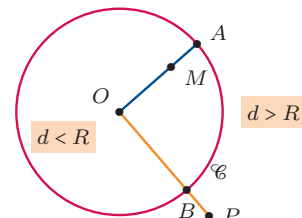
Le mot **diamètre** vient du grec *dia-metron* signifiant « mesurer à travers ».

Le mot **rayon** vient du latin *radius* signifiant « baguette ». Il apparaîtrait au 16^e siècle, auparavant on parlait parfois de semi-diamètre.



Le cercle partage le plan en deux régions distinctes. Celle qui contient le centre est dite **intérieure** au cercle, l'autre **extérieure** au cercle.

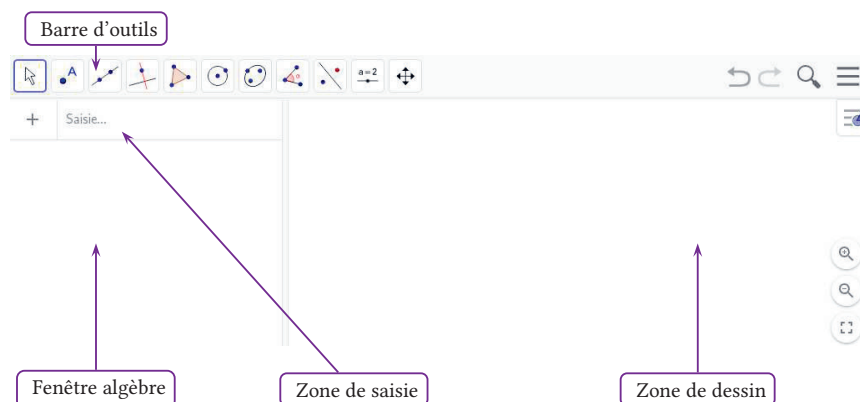
- Tout point M intérieur au cercle est situé sur un rayon $[OA]$, donc $OM < OA$ c'est-à-dire $OM < R$.
- Tout point P extérieur au cercle est situé sur un prolongement d'un rayon $[OB]$ donc $OP > OB = R$ c'est-à-dire $OP > R$.



V Construction avec Geogebra

GeoGebra¹ est un logiciel de géométrie dynamique qui permet de créer des figures dans lesquelles il sera possible de déplacer des objets afin de vérifier si certaines conjectures ne sont pas dues uniquement à un positionnement particulier des objets.

Les constructions avec GeoGebra sont très proches de celles traditionnelles avec papier, crayon, règle, compas.



Pour créer des objets, on utilise la barre d'outils.

	place un point dans le plan ou sur un objet
	construit les points d'intersection de deux objets
	construit le milieu d'un segment
	trace la droite passant par deux points
	trace le segment ayant pour extrémités deux points
	trace une demi-droite
	construit un cercle avec un centre et passant par un point
	construit un cercle avec un centre et un rayon
	construit un cercle passant par trois points

Les paramètres des objets créés s'affichent dans la **fenêtre Algèbre**.

Dans la **fenêtre Algèbre** ou dans la **feuille de travail**, un clic-droit sur un objet permet de modifier ses propriétés. (On peut ainsi renommer cet objet, le colorier,...).

Pour déplacer un point il suffit de le sélectionner avec .

1. Disponible sur <https://www.geogebra.org>.

VI Exercices

Pour les exercices comportant le symbole , réaliser soigneusement la figure **sur une feuille blanche non quadrillée**.

Pour les exercices comportant le symbole , construire la figure avec un logiciel de construction géométrique (Geogebra, par exemple).

Ex 1 ☆☆☆

Reproduire quatre fois le dessin ci-dessous :



Sur chaque dessin, colorier :

- 1) $[SR]$ 2) $[RT]$ 3) $[TS]$ 4) $[ST]$

Ex 2 ☆☆☆

Après avoir observé la figure ci-dessous, compléter les pointillés en utilisant $\in$ ou $\notin$.



- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $M \dots [AC]$ | 4) $P \dots (AL)$ | 7) $A \dots [AM]$ |
| 2) $L \dots [CM]$ | 5) $A \dots [LC]$ | 8) $C \dots (PL)$ |
| 3) $L \dots (AM)$ | 6) $A \dots (ML)$ | |

Ex 3 ☆☆☆

Soient A et B deux points tels que $AB = 7$ cm.
Placer deux points M et N tels que :

$$M \in (AB), \quad N \in (AB), \quad MN = 5 \text{ cm}, \\ M \notin [AB] \quad \text{et} \quad N \in [AB].$$

Ex 4 ☆☆☆

- 1) Réaliser la figure suivante :

- Placer trois points non alignés R , S et T .
- Placer un point A sur le segment $[RS]$.
- Placer un point E sur la demi-droite $[TS]$ de telle manière que S soit sur le segment $[TE]$.
- Construire le point M qui est le point d'intersection des droites (RT) et (EA) .

- 2) Compléter les pointillés en utilisant $\in$ ou $\notin$.

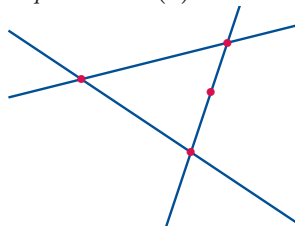
- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) $A \dots [RS]$ | c) $M \dots [RS]$ | e) $E \dots [ST]$ |
| b) $A \dots (RS)$ | d) $M \dots [TR]$ | |

Ex 5 ☆☆☆

Sur la figure, placer les quatre points A , B , C et E cités dans le texte ci-après et déterminer les deux droites (d) et (d') . Montrer qu'il y a deux possibilités.

Texte :

- (d) et (d') désignent deux des trois droites tracées sur la figure.
- Les droites (d) et (d') se coupent en B .
- Le point A n'est ni sur (d) , ni sur (d') .
- La droite (AC) coupe (d') en E .
- (BE) n'est pas la droite (d) .



Ex 6 ☆☆☆ Théorème de PAPPUS

- 1) Réaliser la figure suivante :

- Tracer trois demi-droites $[Ox]$, $[Oy]$ et $[Oz]$.
- Deux demi-droites d'origine A coupent $[Ox]$ en B et C , $[Oy]$ en D et E , $[Oz]$ en F et G .
- (CD) et (BE) se coupent en M ,
 (CF) et (BG) se coupent en N ,
 (DG) et (EF) se coupent en P .

- 2) Vérifier que les points A , M , N et P sont alignés.

Ex 7 ☆☆☆ Théorème de PAPPUS

- 1) Réaliser la figure suivante :

- Tracer deux droites (d) et (Δ) .
- Placer sur (d) trois points A , B , C distincts.
Placer sur (Δ) trois points X , Y , Z distincts.
- Placer les points :
 L intersection de (AY) et (XB) ;
 M intersection de (AZ) et (XC) ;
 N intersection de (BZ) et (YC) .

- 2) Vérifier que les points L , M et N sont alignés.

Ex 8 ☆☆☆ Théorème de DESARGUES

- 1) Tracer trois droites (AA') , (BB') et (CC') **concurrentes** en un point O .

Placer les points :

- L intersection de (AB) et $(A'B')$;
- M intersection de (AC) et $(A'C')$;
- N intersection de (BC) et $(B'C')$.

- 2) Vérifier que les points L , M et N sont alignés.

Ex 9 ☆☆☆ Segments

- 1) Combien de segments peut-on tracer avec :

- a) trois points non alignés ?
- b) quatre points non alignés ?
- c) cinq points non alignés ?

d) six points non alignés ?

- 2) Zed affirme qu'avec n points, on peut tracer $(n \times (n - 1)) \div 2$ segments.
La formule semble-t-elle vraie ?

Ex 10 ☆☆☆ Droites et intersections

- 1) Dans un plan, on trace trois droites, chacune d'elles coupant les autres.
Combien y a-t-il de points d'intersection ?
- 2) Même question avec quatre droites, cinq droites, six droites.
- 3) Zed affirme qu'avec n droites, il y a $(n \times (n - 1)) \div 2$ points d'intersection.
La formule semble-t-elle vraie ?

Ex 11 ☆☆☆

- 1) Réaliser la figure suivante :
- Tracer deux demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$.
 - Placer un point B .
 - Deux demi-droites d'origine B coupent $[Ax)$ en C et D , $[Ay)$ en E et F .
 - Placer M le milieu de $[AB]$, N le milieu de $[DE]$ et P le milieu de $[CF]$.
- 2) Vérifier que les points M , N et P sont alignés.

Ex 12 ☆☆☆ Longueurs

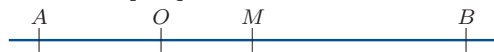
Trois points O , A , B sont situés sur une droite tels que $OA = 4$ cm et $OB = 10$ cm.
On note M le milieu de $[AB]$.

- 1) 1^{er} cas : $A \in [OB]$.



- a) Calculer OM .
- b) Si $OA = a$ et $OB = b$, démontrer que
- $$OM = OA + AM, \quad OM = OB - BM \quad \text{et} \quad OM = \frac{a+b}{2}.$$

- 2) 2^e cas : $O \in [AB]$.



- a) Calculer OM .
- b) Si $OA = a$ et $OB = b$ avec $b > a$, démontrer que
- $$OM = AM - OA, \quad OM = OB - BM \quad \text{et} \quad OM = \frac{b-a}{2}.$$

Ex 13 ☆☆☆ Longueurs

Trois points A , B , C sont situés sur une droite tels que $AB = 4$ cm et $BC = 6$ cm.

On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.

- 1) 1^{er} cas : $B \in [AC]$.



- a) Calculer IJ .
- b) Généraliser avec $AB = c$ et $BC = a$.

- 2) 2^e cas : $A \in [BC]$.



- a) Calculer IJ .
- b) Généraliser avec $AB = c$ et $BC = a$ et $a > c$.

Ex 14 ☆☆☆ Longueurs

Quatre points A , B , C , D sont situés dans cet ordre sur une droite tels que

$$AB = CD = 3 \text{ cm et } BC = 5 \text{ cm.}$$

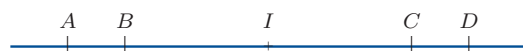


- 1) Prouver que $AC = BD$.
- 2) Prouver que $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- 3) Généraliser avec $AB = CD = x$ et $BC = y$.

Ex 15 ☆☆☆ Longueurs

Quatre points A , B , C , D sont situés dans cet ordre sur une droite.

$$AD = 14 \text{ cm, } BC = 10 \text{ cm et } [AD] \text{ et } [BC] \text{ ont le même milieu } I.$$



Prouver que $AB = CD$ et $AC = BD$.

Ex 16 ☆☆☆

Quatre points A , B , C , D sont situés dans cet ordre sur une droite.

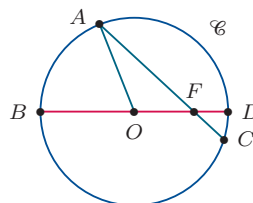
On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$.



- 1) Prouver que $AC + BD = AD + BC$.
- 2) Prouver que $IJ = \frac{AC + BD}{2}$.
- 3) Prouver que $IJ = \frac{AC + AD + BC + BD}{4}$.

Ex 17 ☆☆☆ Vocabulaire

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O .



Recopier et compléter chaque phrase avec l'un des mots : *centre, corde, diamètre, rayon*.

- 1) O est ... du cercle $\mathcal{C}$.
- 2) Le segment $[OA]$ est ... du cercle $\mathcal{C}$.
- 3) Le segment $[BD]$ est ... du cercle $\mathcal{C}$.
- 4) Le segment $[AC]$ est ... du cercle $\mathcal{C}$.

Ex 18 Construction

Réaliser la figure suivante :

- Tracer un segment $[EF]$ tel que $EF = 8$ cm.
- Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre E et de rayon 2,5 cm.
- Tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[EF]$.
- Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent aux points A et B . Placer ces deux points.
- Construire le point D de sorte que le segment $[AD]$ soit un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$.

Ex 19 Construction

- 1) Quelle est la figure formée par l'ensemble des centres des cercles de 5 cm de rayon passant par un point donné A ?
- 2) Construire un cercle de 5 cm de rayon passant par deux points donnés A et B tels que $AB = 4$ cm.

Ex 20 Théorème de PTOLÉMÉE

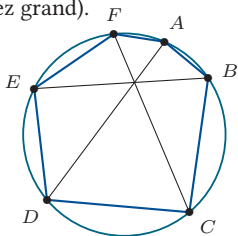
- 1) Tracer un cercle de rayon 10 cm.
Placer quatre points A, B, C, D (dans cet ordre) sur ce cercle.
- 2) Mesurer et calculer :

$$AC \times BD \text{ et } AB \times CD + BC \times AD.$$

Que remarque t-on ?

Ex 21

Reproduire une figure comme celle ci-dessous (avec un cercle assez grand).



Mesurer et calculer :

$$AB \times CD \times EF \text{ puis } BC \times DE \times FA.$$

Que remarque t-on ?

Ex 22 Théorème de PASCAL

Pour chaque question, tracer un cercle et placer dans cet ordre les points A, B, C, C', B' et A' .

- 1) On note :
 E le point d'intersection de (AB') et $(A'B)$;
 F le point d'intersection de (AC') et $(A'C)$;
 G le point d'intersection de (CB') et $(C'B)$.
 Vérifier que les points E, F, G sont alignés.

- 2) On note :
 P le point d'intersection de (AA') et (CC') ;
 Q le point d'intersection de (AB) et $(B'C')$;
 R le point d'intersection de (BC) et $(A'B')$.
 Vérifier que les points P, Q, R sont alignés.

Ex 23

- 1) Réaliser la figure suivante :
 - Tracer un segment $[AB]$ tel que $AB = 16$ cm.
 - Placer un point $C \in [AB]$.
 - Tracer :
 $\mathcal{C}_1$ le cercle de diamètre $[AB]$,
 $\mathcal{C}_2$ le cercle de diamètre $[AC]$,
 $\mathcal{C}_3$ le cercle de diamètre $[CB]$.
 - Tracer une droite (d) passant par C .
 La droite (d) coupe $\mathcal{C}_1$ en P et Q , $\mathcal{C}_2$ en M et $\mathcal{C}_3$ en N .
- 2) Mesurer les longueurs PM et QN .
Que remarque t-on ?

Ex 24 Axe radical

- 1) Construire trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ qui se coupent deux à deux. On note :
 A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$;
 C et D les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$;
 E et F les points d'intersection de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
- 2) Tracer les droites $(AB), (CD)$ et (EF) .
Que remarque t-on ?

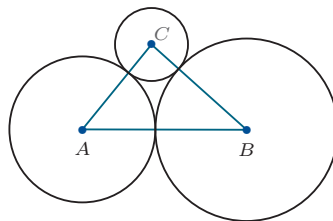
Ex 25 Cercles sécants

Soient trois points alignés.

- 1) On trace tous les cercles ayant pour centre un des trois points et passant par un autre des trois points. Combien de cercles différents peut-on construire de cette manière ?
- 2) Même question avec quatre points, cinq points, six points. Et avec n points ?

Ex 26

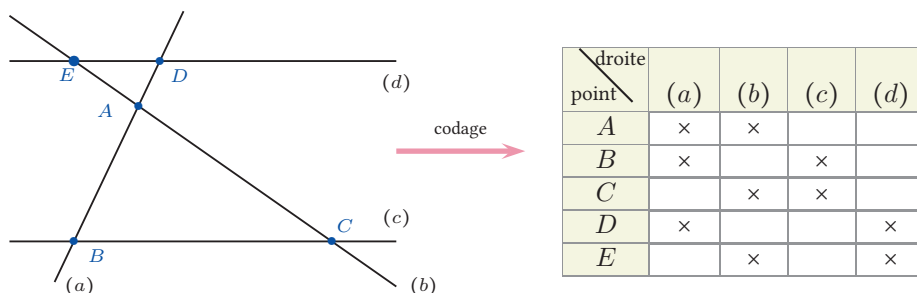
Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est tel que $AB = 9$ cm, $BC = 7$ cm et $AC = 6$ cm.
 Les côtés du triangle sont des rayons des cercles (les cercles sont dit tangents).
 Comment tracer cette figure ?



VII Problèmes

Problème 1 Un codage particulier

N'aimant pas dessiner, Zed a imaginé remplacer chaque figure géométrique par un tableau regroupant les points et les droites. L'exemple ci-dessous indique son procédé de codage.



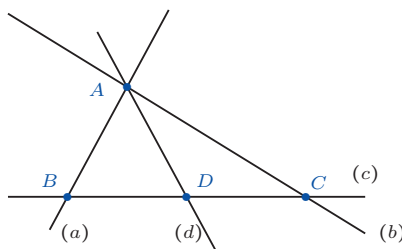
On peut lire le tableau selon les lignes ou selon les colonnes. Par exemple :

- dans la 1^{ère} ligne, le point A appartient aux droites (a) et (b) ;
- dans la 2^e colonne, la droite (b) passe par les points A, C et D.
- **Remarque importante** : en regardant seulement le tableau, on peut savoir que les droites (c) et (d) sont parallèles parce qu'elles n'ont aucun point en commun.

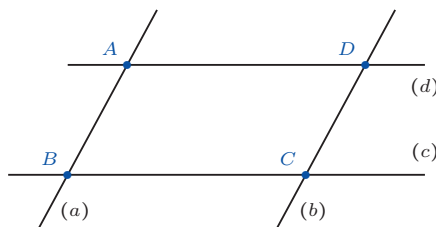
Quand les droites ne sont pas parallèles, Zed nomme toujours leur point d'intersection et le place dans le tableau.

1) Pour chaque dessin, construire un tableau codant la figure.

a) Dessin 1.



b) Dessin 2. (a) // (b) et (c) // (d).



2) Construire une figure décodant chacun des tableaux, en précisant les droites parallèles s'il y en a.

a)

droite \ point	(a)	(b)	(c)	(d)
A	x			x
B	x	x	x	
C		x		x

b)

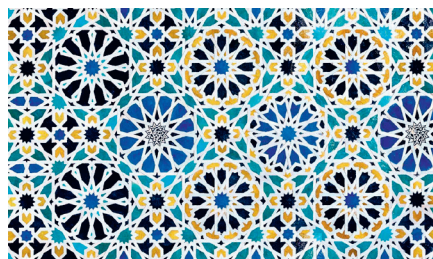
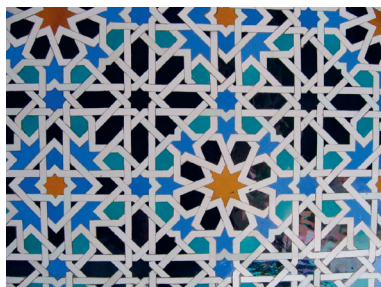
droite \ point	(a)	(b)	(c)	(d)
A		x	x	
B	x		x	
C	x	x		
D	x			x
E		x		x
F			x	x

c)

droite \ point	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
A				x	x
B	x	x	x		
C			x	x	
D		x		x	
E	x			x	
F			x		x
G		x			x
H	x				x

Problème 2 Géométrie et art islamique

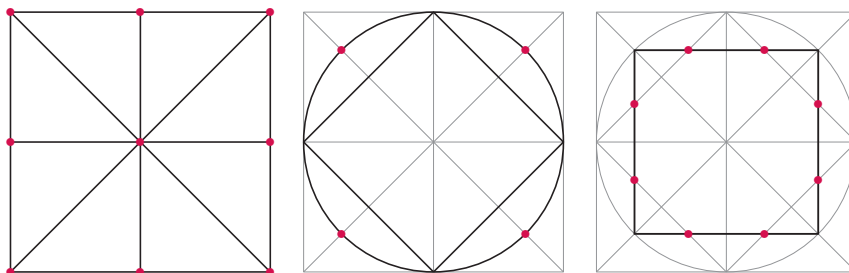
Les dessins géométriques de l'art islamique sont souvent construits sur des combinaisons de carrés et de cercles répétés qui peuvent être superposés et entrelacés pour former des motifs. La complexité et la variété des motifs utilisés ont évolué à partir de simples étoiles et losanges au 9^e siècle, à travers une variété de motifs de 6 à 13 points au 13^e siècle, et finalement à inclure également des étoiles à 14 et 16 points au 16^e siècle.



Deux mosaïques de l'Alhambra de Grenade.

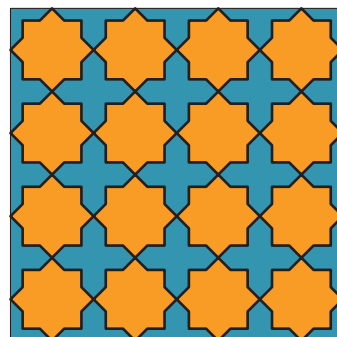
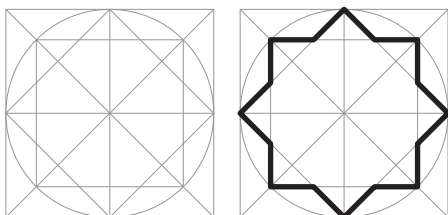
L'étoile à huit branches construite avec deux carrés est un des motifs de base pour les mosaïques.

- 1) Écrire un programme de construction en suivant les étapes dessinées afin de reproduire le motif de base suivant :

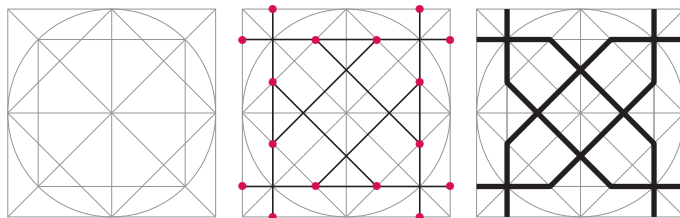


- 2) En suivant les étapes de construction, reproduire un carré (de côté 10 cm) pour construire le motif suivant qui se trouve dans la mosaïque colorée.

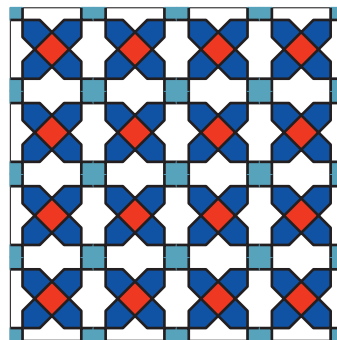
Mosaïque colorée avec 16 motifs



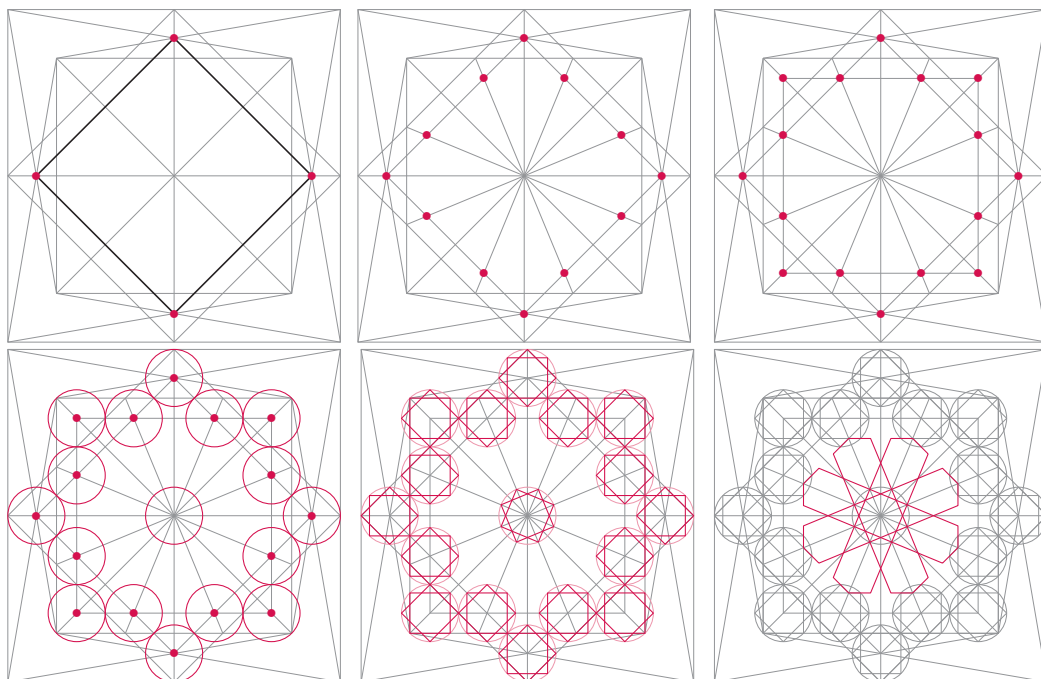
- 3) En suivant les étapes de construction, reproduire un carré (de côté 10 cm) pour construire le motif suivant qui se trouve dans la mosaïque colorée.



Mosaïque colorée avec 16 motifs



4) Le motif suivant est plus complexe, le reproduire dans un carré de côté 10 cm.



Mosaïque avec 4 motifs

