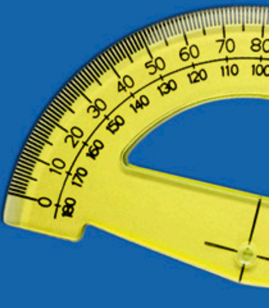
Cycle 4
5e - 4e - 3e

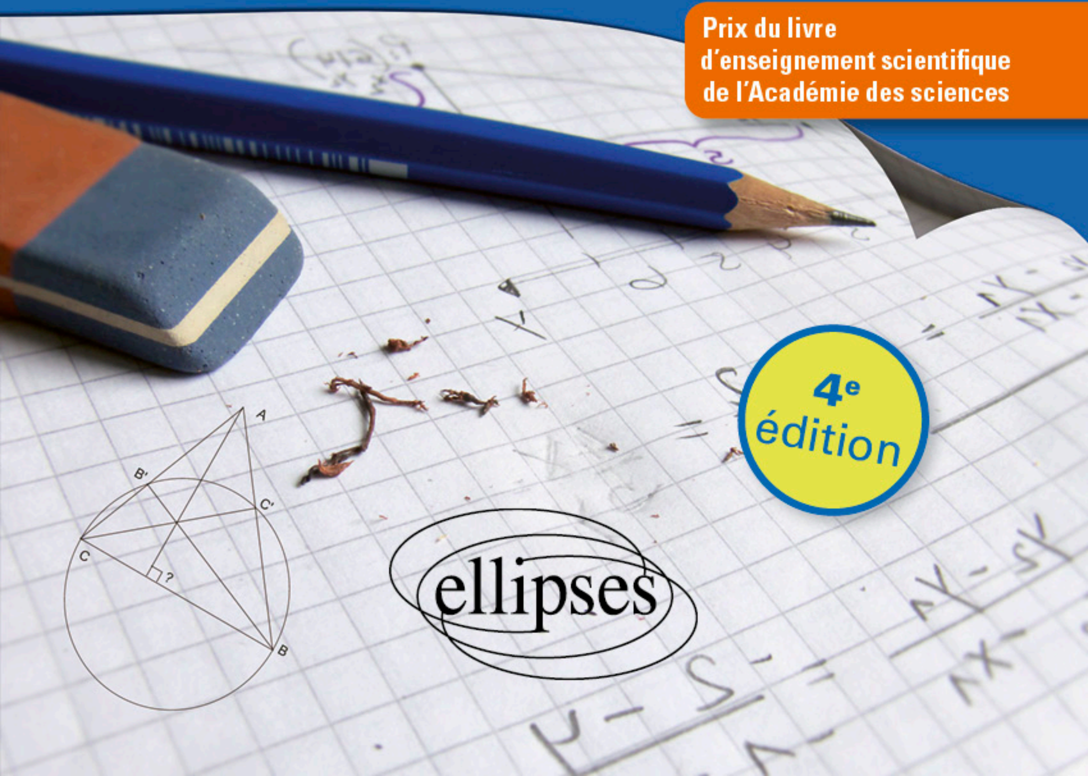


Les MATHS au collège

Démontrer pour comprendre

Prix du livre d'enseignement scientifique de l'Académie des sciences

4e édition



ellipses

LES MATHS

Démontrer pour comprendre

AU COLLÈGE

Cycle 4

5e - 4e - 3e

4e édition

Alexandre CASAMAYOU-BOUCAU
François PANTIGNY

avec la collaboration d'Yves COMBE

ellipses

Les auteurs tiennent à remercier particulièrement M. Jean-Pierre Demailly pour ses encouragements à poursuivre la rédaction de ce manuel, M. Jean-Pierre Ferrier pour ses remarques et suggestions pertinentes, le Père Yannik Bonnet pour avoir accepté de préfacer la deuxième édition de cet ouvrage, M. Hubert H. Hupkes pour sa relecture et enfin M. Alain Fillieule qui a suggéré un nombre important de corrections et d'améliorations.
Nous remercions également Jacques et Monica, qui ont permis la tenue de nos séances de travail.

A. C.-B. & F. P.

Merci enfin à Anne de sa patience pendant ce long travail de rédaction.

A. C.-B.

Ce livre a été composé en LaTeX sous Linux Ubuntu. Les figures ont été réalisées avec pstrick et l'extension pst-eucl de Dominique Rodriguez.

ISBN 9782340-115972

Dépôt légal : juin 2026

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Nous avons voulu, dans ce livre de mathématiques, présenter de manière rigoureuse l'ensemble des notions du programme du cycle 4 du collège.

Nous nous sommes efforcés de rester méthodiques dans l'enchaînement des définitions, propriétés et théorèmes. La présentation sobre et linéaire permettra au collégien de rester concentré sur les notions essentielles.

Une remarque s'impose concernant l'approche de la géométrie. Ainsi que cela a été suggéré par la commission Kahane [*] en 2000, nous avons fondé les démonstrations sur la notion de « triangles égaux ».

Dans le rapport que cette commission a consacré à la géométrie, on peut notamment lire l'analyse suivante :

> *Si on pense la géométrie en termes d'invariants il est clair que les cas d'égalité constituent un outil mathématique essentiel. De plus, il suffit de prendre quelques exemples concrets pour se convaincre de leur efficacité et l'on peut dire sans exagération qu'en les supprimant on a privé plusieurs générations d'élèves de l'outil le plus simple pour faire de la géométrie.*

En algèbre, l'interprétation géométrique a été donnée dès que cela était possible : par exemple dans les chapitres consacrés aux opérations sur les fractions, dans la présentation de l'algorithme d'Euclide, dans la résolution des systèmes d'équations, etc.

L'arithmétique est traitée de manière détaillée : le calcul du PGCD est basé sur la décomposition en facteurs premiers, la notion de PPCM est introduite conjointement; et ce n'est qu'ensuite qu'est abordé l'algorithme d'Euclide.

---

*. Missionnée par le ministère, une commission présidée par Jean-Pierre Kahane avait eu pour but de proposer une réflexion globable et à long terme sur l'enseignement des mathématiques dans l'enseigement primaire et secondaire : `http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportEnseignementGeometrie/RapportEnseignementGeometrie.pdf`

Enfin, les nombres réels sont introduits comme étant les nombres possédant un développement (décimal) illimité[*].

Pour les exercices de calcul, les réponses sont données en fin de chapitre ; un certain nombre d'exercices de géométrie sont corrigés, et ce de manière détaillée. Les exercices permettant de travailler les automatismes, susceptibles d'être mobilisés lors de l'épreuve écrite de mathématiques du diplôme national du brevet, sont signalés par le pictogramme dans la marge.

Conscients que le savoir s'acquiert aussi par la pratique, et en dépit du grand nombre d'exercices présents dans ce livre, nous en avons publié un deuxième, ne comportant, concernant le cours, que quelques rappels, mais proposant une large gamme d'activités regroupées suivant les compétences attendues des élèves.

Les auteurs espèrent que ce manuel permettra aux uns et aux autres de prendre goût aux mathématiques, à travers la recherche et la résolution d'exercices nécessitant réflexion, persévérance et intuition.

Nous accueillerons avec reconnaissance les critiques et suggestions que le lecteur voudra bien nous faire parvenir à l'adresse électronique suivante : `maths.college.demontrer@gmail.com`

Les auteurs.

*. Cette approche est préconisée par Jean-Pierre Demailly (président du Groupe de réflexion disciplinaire sur les programmes) dans le document *Perspectives pour une renaissance de l'enseignement des mathématiques dans le primaire et le secondaire* : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/renaissance.pdf`

« Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration ; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs et qu'on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux ; et, aux époques où la notion a menacé de s'en perdre et où de ce fait la mathématique s'est trouvée en danger, c'est chez les Grecs qu'on en a recherché les modèles. »

BOURBAKI
Éléments de mathématiques

« La géométrie reste quand brûlent les librairies. »

J. BRUNSCHWIG et G. LLOYD
Le Savoir grec. Dictionnaire critique
Paris, Flammarion, 1996, p. 10

5

Chapitre 1
La division euclidienne

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des *nombres entiers naturels*. Ces nombres sont les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.
On peut donc écrire : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
Dans ce chapitre, nous ne considèrerons que des (nombres) entiers naturels.

1.1 Définition

La « division euclidienne[*] » n'est autre que la division d'un nombre entier naturel par un autre nombre entier naturel non nul.[**]

Prenons un exemple simple :

Exemple : Soit à répartir 171 œufs dans des barquettes de 12 œufs.

Comme on le sait, on effectue une division que l'on appelle une « division euclidienne » :

dividende *diviseur*

$$\begin{array}{r|l} 1\,7\,1 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{1\,2} & 14 \\ 5\,1 & \\ \underline{4\,8} & \\ 0\,3 & \end{array}$$

quotient

reste

171 est le *dividende*
12 est le *diviseur*
3 est le *reste*
14 est le *quotient*

14 barquettes sont remplies, et il reste à part 3 œufs. On dit que 14 est le quotient (entier) de 171 par 12, et que 3 est le reste de cette division.

*. La division euclidienne doit son nom au mathématicien grec Euclide, qui vivait au IV^{e} s. av. J.-C.

**. La précision « non nul » est nécessaire : il n'est en effet pas possible de diviser par 0

Remarque : Si le reste avait été nul, on aurait dit que la division « tombe juste ». Néanmoins, le plus souvent, il n'y a pas de raison pour qu'une telle division tombe juste.

Plus généralement, faire la division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier b non nul aboutit à la détermination d'un quotient q et d'un reste r tels que l'on ait la relation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{dividende} & = & \text{diviseur} & \times & \text{quotient} & + & \text{reste} \\ a & = & b & \times & q & + & r \end{array}$$

De plus, **le reste r de la division est toujours strictement plus petit que le diviseur b**.

Plus formellement, on donne la définition suivante :

Définition
On appelle *quotient entier* de deux entiers a et b le plus grand entier q dont le produit par b puisse se retrancher du nombre a. On appelle alors *reste* l'entier $r = a - b \times q$. Le reste r est strictement inférieur au diviseur b.

Remarque : À noter les cas particuliers suivants :
- ⋆ Si $a < b$, alors le quotient est nul et le reste a.
- ⋆ Si $a = b$, alors le quotient est 1 et le reste est nul.

1.2 Exercices

Exercice 1. On veut ranger 64 œufs dans des boîtes de 6. Combien de boîtes remplit-on ? Combien d'œufs reste-t-il ?

Exercice 2. Effectuer la division euclidienne de a par b dans les cas suivants, puis écrire l'opération en ligne sous la forme : $a = b \times q + r$.

a) $a = 1\,789$ et $b = 9$;
b) $a = 9\,876$ et $b = 15$;
c) $a = 509$ et $b = 8$;
d) $a = 1\,024$ et $b = 64$;
e) $a = 4\,523$ et $b = 25$;
f) $a = 3\,007$ et $b = 13$.

Exercice 3. Dans une division, le reste est égal à 1, le quotient est 187 et le diviseur est 32. Quel est le dividende ?

Exercice 4. Citer tous les nombres dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 4.

Exercice 5. Citer quelques nombres dont le reste dans la division euclidienne par 7 est égal à 5.

Exercice 6. Citer un nombre dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 0. Quel est alors le reste ?

Exercice 7. Citer un nombre dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 1. Quel est alors le reste ?

Exercice 8. Quels sont les dividendes possibles de la division euclidienne par 7 dont le quotient est 29 ?

Exercice 9. Sachant que dans la division euclidienne de 1 075 par 39, le quotient est 27 et le reste 22, trouver, sans poser l'opération, le reste et le quotient dans la division euclidienne de 1 075 par 27.

Exercice 10. Sachant que dans la division euclidienne de 100 par 31, le quotient est 3 et le reste 7, compléter le tableau suivant sans poser aucune division :

La division euclidienne ...	donne pour quotient	et pour reste
de 200 par 62	...	...
de 300 par 93	...	...
de ... par 279	3	63
de 1 200 par ...	3	84

Exercice 11. Le 1er janvier 2010 est tombé un vendredi. Combien y a-t-il eu de semaines entières en 2010 ? Combien de jours reste-t-il pour terminer l'année ? En déduire le jour de la semaine qui correspondra au 1er janvier 2011.

Chapitre 2
Divisibilité

Dans ce chapitre, on ne considère que des *nombres entiers naturels.*

2.1 Diviseur, multiple

Définition
On dit qu'un entier n non nul * est *divisible* par un entier d lorsqu'il existe un entier k tel que $n = k \times d$.
Autrement dit, un entier n est divisible par un entier d lorsque le reste de la division euclidienne de n par d est nul.
On dit aussi que n est *multiple* de d, ou que d est un *diviseur* de n.

Exemple : 105 est un multiple de 21 (car $105 = 21 \times 5$) ;
on peut aussi dire que 21 est un diviseur de 105.

Exemple : 174 est-il divisible par 58 ?
On effectue la division euclidienne de 174 par 58. On trouve comme quotient 3 et comme reste 0 :

$$174 \div 58 = 3 \quad \text{donc} \quad 174 = 3 \times 58 = 58 \times 3$$

Donc 174 est multiple de 3 et de 58.
Remarquons que 1, 3, 58, 174 sont des diviseurs de 174.

Remarque :
- Le nombre 1 divise tout entier naturel.
- Tout entier naturel est diviseur de lui-même.
- Le nombre 0 ne divise aucun entier naturel différent de 0.
- Le nombre 0 est multiple de tous les entiers naturels.

Remarques :
- Les diviseurs d'un nombre sont encadrés par 1 et le nombre lui-même.
- La suite des multiples d'un nombre entier non nul commence à 0 et n'a pas de fin.

Par exemple,
- Les diviseurs de 15 sont : 1, 3, 5, 15. Ils sont compris entre 1 et 15.
- Les premiers multiples de 15 sont : 0, 15, 30, 45, 60, 75, ...

Définition
- On dit qu'un entier est *pair* lorsqu'il est divisible par 2.
- On dit qu'un entier est *impair* lorsqu'il n'est pas pair.
- Connaître la *parité* d'un nombre, c'est, par définition, savoir si il est pair ou impair.

On admet les propriétés suivantes :

Propriété
- *Si un entier naturel en divise un autre, alors il divise aussi tous les multiples de celui-ci.*
- *Si un entier naturel en divise deux autres, alors il divise aussi la somme et la différence de ces deux nombres.*

Exemples :
- 5 divise 15. Donc 5 divise $15 \times 7 = 105$.
- 7 divise 91 et 119. Donc 7 divise leur somme, à savoir 210, et leur différence, à savoir 28.

2.2 Règles de divisibilité

On rappelle les critères de divisibilité suivants :

d	Un entier naturel est divisible par d si...
2	Le chiffre des unités est soit 0, soit pair (2, 4, 6 ou 8).
3	La somme de ses chiffres est divisible par 3.
4	Les deux derniers chiffres forment un multiple de 4.

d	Un entier naturel est divisible par d si...
5	Le chiffre des unités est soit 0, soit 5.
8	Les trois derniers chiffres forment un multiple de 8.
9	La somme de ses chiffres est divisible par 9.
10	Le dernier chiffre est 0.

Par exemple, 2 457 est divisible par 9 (et donc aussi par 3).

2.3 Détermination de l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel

Exemple : On souhaite déterminer l'ensemble des diviseurs de 312.

$$
\begin{array}{llll}
1 & \times\ 312 & = & 312 \\
2 & \times\ 156 & = & 312 \\
3 & \times\ 104 & = & 312 \\
4 & \times\ 78 & = & 312 \\
\cancel{5} & & & \\
6 & \times\ 52 & = & 312 \\
\cancel{7} & & & \\
8 & \times\ 39 & = & 312 \\
\cancel{9} & & & \\
\cancel{10} & & & \\
\cancel{11} & & & \\
12 & \times\ 26 & = & 312 \\
13 & \times\ 24 & = & 312 \\
\cancel{14} & & & \\
\cancel{15} & & & \\
\cancel{16} & & & \\
\cancel{17} & & & \\
\cancel{18} & \times\ \cancel{18} & > & 312
\end{array}
$$

On dispose les premiers entiers naturels en colonne.

- On parcourt la première colonne en commençant par 1 (qui divise tout entier naturel).
- Si un entier n divise 312, alors on place dans une deuxième colonne le quotient de 312 par n.
- Si un entier n ne divise pas 312, alors on le barre, ainsi que ses multiples (qui ne seront pas diviseurs de 312, eux non plus).
- On arrête de tester la divisibilité de 312 par n dès que $n \times n$ dépasse 312.

En conclusion, l'ensemble des diviseurs de 312 est exactement :

$$\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 13; 24; 26; 39; 52; 78; 104; 156; 312\}$$

2.4 Nombres premiers

Définition
On dit qu'un entier naturel est un *nombre premier* lorsqu'il est différent de 1, et qu'il n'est divisible que par lui-même et par l'unité.
Autrement dit, un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs.

Convention
Le nombre 1 n'est pas un nombre premier [*].

Exemples :
- Le nombre 2 est premier : en effet, ses diviseurs sont 1 et 2.
- Le nombre 3 est premier : en effet, ses diviseurs sont 1 et 3.
- Le nombre 13 est premier : ses diviseurs sont 1 et 13.
- Le nombre 25 n'est pas premier : ses diviseurs sont 1, 5 et 25.

Remarque : Le nombre 2 est l'unique nombre premier pair. Autrement dit, tout nombre premier distinct de 2 est impair.

Exemple : Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

2.5 Décomposition d'un entier en facteurs premiers

Le mathématicien grec Euclide (IVe s. av. J.-C.) a établi les trois théorèmes fondamentaux suivants, que nous admettrons :

Théorème
La suite des nombres premiers est illimitée.

*. Cette convention se justifie par le souci de garantir l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Théorème
Tout nombre entier non premier, autre que 1, admet au moins un diviseur premier.

On en déduit la règle :

Règle
Pour reconnaître si un nombre est premier, on le divise par les nombres premiers successifs inférieurs à ce nombre en commençant par les plus petits. Si aucune division ne se fait exactement, le nombre est premier.

Théorème
Tout nombre entier non premier, autre que 1, peut se décomposer en un produit de facteurs premiers.
De plus, la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers est unique (à l'ordre près des facteurs).

Exemple : Décomposer 315 en produit de facteurs premiers.

315 est divisible par 3 : $315 = 3 \times 105$
105 est à son tour divisible par 3 : $105 = 3 \times 35$
enfin, 35 s'écrit comme produit de 5 et 7 : $35 = 5 \times 7$
Finalement, $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$

On dit que l'*on a décomposé* 315 *en produit de nombres premiers*. On dit aussi parfois que l'on a mis le nombre 315 sous forme *factorisée*.
En pratique, on adopte la disposition ci-contre : ➜

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Exemple : Décomposer 360 en (produit de) facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

2.6 Exercices

Exercice 1. Écrire la liste des 10 premiers multiples de 8, puis donnez le quotient et le reste de la division de 67 par 8.

Exercice 2. Parmi les nombres suivants, lesquels sont à la fois divisibles par 2 et par 3 ?

15 ; 24 ; 16 ; 702 ; 3 222 ; 5 403 ; 5 430 ; 17 377.

Exercice 3. Donner les nombres entiers divisibles par 5 et compris entre 141 et 162.

Exercice 4. Donner les nombres entiers divisibles par 9 et compris entre 1 304 et 1 345.

Exercice 5. Multiple de 3 et de 4, je suis compris entre 30 et 99. Le reste de ma division euclidienne par 5 est 4. Qui suis-je ?

Exercice 6. Quel est...

a) le premier nombre supérieur à 1 543 divisible par 9 ?
b) le premier nombre supérieur à 2 742 divisible par 5 ?
c) le premier nombre supérieur à 2 742 divisible par 4 ?
d) le premier nombre supérieur à 2 742 divisible à la fois par 3 et par 4 ?

Exercice 7. Mettre une croix dans la bonne case :

105	36	74	75	270	360	243	30	17	est divisible par
									2
									3
									4
									5
									9
									10

Exercice 8. Quels sont les multiples de 9 compris entre 2 377 et 2 450 ?

Exercice 9. Trouver les valeurs possibles du chiffre « c » pour que :

a) le nombre 34c2 soit divisible par 3 et par 4 ?
b) le nombre 346c soit divisible par 3 et par 4 ?

Exercice 10. Dans chaque cas préciser si le nombre c est un entier, sans effectuer l'opération :

$$c \times 5 = 1\,345 \qquad c \times 2 = 3\,456$$
$$4 \times c = 2\,360 \qquad 3 \times c = 4\,512$$
$$9 \times c = 56 \qquad c \times 4 = 454$$

Exercice 11. Déterminer l'ensemble des diviseurs des nombres suivants : 24 ; 54 ; 56 ; 60 ; 63 ; 72 ; 96 ; 100 ; 108 ; 117 ; 120 ; 126 ; 132 ; 140 ; 144.

Exercice 12.
Un nombre est dit *parfait* lorsqu'il est la somme de ses diviseurs propres (c'est-à-dire de ses diviseurs différents de lui-même).
Montrer que parmi les trente premiers entiers, il existe exactement deux nombres parfaits.

Exercice 13. Vrai ou Faux ? Justifier la réponse.

a) Tous les multiples de 3 sont multiples de 6.
b) Tous les multiples de 7 sont multiples de 14.
c) Tous les multiples de 14 sont multiples de 7.
d) Tous les multiples de 22 sont multiples de 11.
e) Si n est divisible par 3 et par 6, alors il est divisible par $3 \times 6 = 18$.
f) Si n est divisible par 12 et par 8, alors il est divisible par $12 \times 8 = 96$.
g) Si n est divisible par 3 et par 6, alors il est divisible par $3 + 6 = 9$.

Exercice 14. Les nombres suivants sont-ils premiers ?

55 ; 57 ; 61 ; 97 ; 99 ; 111 111.

Exercice 15. Décomposer les nombres suivants en facteurs premiers.

210 ; 216 ; 255 ; 276 ; 10 000 ; 4 410.

Chapitre 3
Calculs sur les nombres décimaux

On rappelle que les nombres décimaux sont les nombres qui comportent une virgule suivie éventuellement par un certain nombre de chiffres. Dans le cas où il n'y a aucun chiffre après la virgule, le nombre considéré est en fait un nombre entier.

3.1 Suites d'opérations

Pour indiquer les opérations à effectuer entre nombres décimaux, on utilise les symboles opératoires suivants[*] : $+$, $-$, $\times$, $\div$.
On va d'abord rappeler quelques règles de calcul.

a. Écritures avec parenthèses

Comme on le sait, les calculs entre parenthèses doivent être effectués prioritairement (c'est-à-dire en premier).

Exemples :

- $a = 18 - (\underbrace{7{,}1 + 2{,}3}_{9{,}4}) = 18 - 9{,}4 = 8{,}6$
- $b = 15{,}2 + (\underbrace{7 \times 2{,}1}_{14{,}7}) = 15{,}2 + 14{,}7 = 29{,}9$
- $c = (\underbrace{18{,}4 \div 9{,}2}_{2}) \times (\underbrace{5 - 0{,}3}_{4{,}7}) = 2 \times 4{,}7 = 9{,}4$

*. Remarquons quand même que le symbole de division $\div$ sera bientôt remplacé par la barre de fraction.

Règle
Si dans un calcul figurent des signes opératoires et des parenthèses, alors les calculs situés entre parenthèses doivent être effectués avant les autres ; on dit que ces calculs sont *prioritaires* sur les autres.

Remarque : Dans un calcul, changer la place des parenthèses modifie (en général) le résultat final du calcul. Par exemple, si on reprend le premier des exemples précédents en changeant la place des parenthèses, on obtient : $d = \underbrace{(18 - 7{,}1)}_{10{,}9} + 2{,}3 = 10{,}9 + 2{,}3 = 13{,}2$

Dans le cas où des parenthèses contiennent elles-mêmes d'autres parenthèses, il est possible, pour améliorer la lisibilité, de remplacer les parenthèses extérieures (c'est-à-dire les parenthèses « englobantes ») par des crochets :

Exemple :
$e = \left[8 \div \underbrace{(9-7)}_{2}\right] \times \left[17 - \underbrace{(5 \times 2)}_{10}\right] = \underbrace{[8 \div 2]}_{4} \times \underbrace{[17 - 10]}_{7} = 4 \times 7 = 28$

Règle
Si dans un calcul figurent des signes opératoires et plusieurs parenthèses et/ou crochets, alors il faut d'abord effectuer les opérations indiquées dans les parenthèses et/ou les crochets les plus intérieurs.

b. Écritures sans parenthèses

- **Suite d'additions :**
  Exemple : $f = 2 + 3{,}1 + 5 = \underbrace{(2 + 3{,}1)}_{5{,}1} + 5 = 10{,}1.$

  On aurait aussi pu écrire : $f = 2 + 3{,}1 + 5 = 2 + \underbrace{(3{,}1 + 5)}_{8{,}1} = 10{,}1$

  Règle
  La valeur d'une somme de nombres décimaux est indépendante de l'ordre dans lequel les additions sont effectuées.

CINQUIÈME

- **Suite de multiplications :**
  Exemple : Soit à calculer $f = 2 \times 3{,}1 \times 5 = (\underbrace{2 \times 3{,}1}_{6{,}2}) \times 5 = 31$

  On aurait aussi pu écrire : $f = 2 \times 3{,}1 \times 5 = 2 \times (\underbrace{3{,}1 \times 5}_{15{,}5}) = 31$

  Règle
  La valeur d'un produit de nombres décimaux est indépendante de l'ordre dans lequel les multiplications sont effectuées.

- **Suite d'additions et de soustractions :**
  On adopte la convention suivante :

  Règle
  Si, dans une écriture sans parenthèses, ne figurent que les signes opératoires + et −, alors les calculs à effectuer se font successivement de gauche à droite.

  Exemple : Soit à calculer : $g = 8{,}5 - 3 + 2 - 1{,}2 - 0{,}6$
  On regroupe les deux premiers termes :
  $$g = \underbrace{8{,}5 - 3}_{5{,}5} + 2 - 1{,}2 - 0{,}6 = \underbrace{5{,}5 + 2}_{7{,}5} - 1{,}2 - 0{,}6$$
  $$g = \underbrace{7{,}5 - 1{,}2}_{6{,}3} - 0{,}6 = \underbrace{6{,}3 - 0{,}6}_{5{,}7} = 5{,}7$$

- **Écritures ne comportant que les signes +, − et × :**
  On adopte la convention suivante :

  Règle
  Si, dans une écriture sans parenthèses, ne figurent que les signes opératoires +, − et ×, alors le signe × a priorité sur les signes + et −.

  Exemple : $h = 2{,}3 + \underbrace{4{,}2 \times 5}_{21} - 7{,}8 = \underbrace{2{,}3 + 21}_{23{,}3} - 7{,}8 = 15{,}5$

- **Écritures ne comprenant que les signes +, − et ÷ :**
  On adopte la convention suivante :

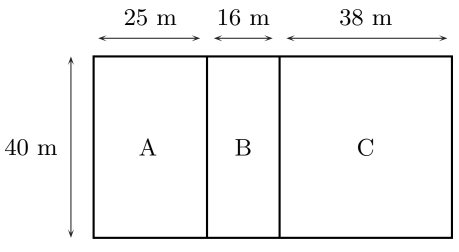
  Règle
  Si, dans une écriture sans parenthèses, ne figurent que les signes opératoires +, − et ÷, alors le signe ÷ a priorité sur les signes + et −.

Exemple : $h = 3{,}5 + \underbrace{4{,}8 \div 6}_{0{,}8} - 1{,}2 = \underbrace{3{,}5 + 0{,}8}_{4{,}3} - 1{,}2 = 3{,}1$

3.2 Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

On commence cette partie par un exemple illustratif.

Exemple : Un champ a 40 m de largeur. Des clôtures parallèles le partagent en trois parcelles dont les dimensions sont indiquées sur la figure ci-dessous (25 m, 16 m et 38 m). On souhaite calculer l'aire de ce champ.



➥ Le calcul de l'aire du champ peut être effectué de deux façons différentes :

- La longueur totale du champ (en m) est : $(25 + 16 + 38)$
  La largeur (en m) est : 40
  L'aire du champ est donc (en m^2) : $S = (25 + 16 + 38) \times 40$
- L'aire du champ est la somme des aires des parcelles A, B et C :
  $S = \text{aire(A)} + \text{aire(B)} + \text{aire(C)}$
  Or, les 3 aires de la somme valent (toujours en m^2) :
  $\text{aire(A)} = 25 \times 40\,;\quad \text{aire(B)} = 16 \times 40\,;\quad \text{aire(C)} = 38 \times 40$
  Il en résulte que : $S = (25 \times 40) + (16 \times 40) + (38 \times 40)$

La comparaison de ces deux expressions de S permet d'écrire l'égalité suivante :

$$(25 + 16 + 38) \times 40 = (25 \times 40) + (16 \times 40) + (38 \times 40)$$

On comprend facilement que cette relation peut se généraliser de la manière suivante (où a, b, c et d représentent des nombres décimaux quelconques) :

$$(a + b + c) \times d = (a \times d) + (b \times d) + (c \times d)$$

On retiendra la propriété suivante :

Propriété
Si a, b et c sont des nombres décimaux, on a :
$\boxed{(a + b) \times c = a \times c + b \times c}$ *et* $\boxed{c \times (a + b) = c \times a + c \times b}$
On dit que ***la multiplication est distributive par rapport à l'addition****.*

Exemple — Application au calcul mental :
Soit à calculer mentalement (c'est-à-dire « de tête ») : $18 \times 1{,}1$
➥ On peut utiliser la propriété précédente (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) pour effectuer ce calcul de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 18 \times 1{,}1 &= 18 \times (1 + 0{,}1) \\ &= 18 \times 1 + 18 \times 0{,}1 \qquad \text{(par distributivité)} \\ &= 18 + 1{,}8 \\ &= 19{,}8 \end{aligned}$$

3.3 Distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction

Exemple : Un champ rectangulaire de 58 m de longueur et 26 m de largeur est divisé en deux parcelles A et B par une clôture parallèle à sa largeur. La parcelle A ayant 35 m de longueur, quelle est l'aire de la parcelle B ?

➥ Ce calcul peut être effectué de deux façons différentes :

a) La longueur de la parcelle B (en m) est : $(58 - 35)$
La largeur (en m) est : 26
L'aire de la parcelle B (en m^2) est donc : $S = (58 - 35) \times 26$

b) L'aire de la parcelle B est la différence de l'aire du champ et de l'aire de la parcelle A :
$$\text{aire(B)} = (58 \times 26) - (35 \times 26)$$

La comparaison de ces deux expressions de S permet d'écrire l'égalité suivante :
$$(58 - 35) \times 26 = (58 \times 26) - (35 \times 26)$$

De la même manière que précédemment, on comprend que cette relation peut se généraliser pour donner la propriété suivante :

Propriété
Pour tous nombres décimaux a, b, c, on a :
$\boxed{(a-b)\times c = a\times c - b\times c}$ *et* $\boxed{c\times(a-b) = c\times a - c\times b}$
On dit que ***la multiplication est distributive par rapport à la soustraction****.*

3.4 Vocabulaire

Définition
Une expression contenant plusieurs opérations est appelée :
- une *somme* si la dernière opération à effectuer est une addition ;
- une *différence* si la dernière opération à effectuer est une soustraction ;
- un *produit* si la dernière opération à effectuer est une multiplication ;
- un *quotient* si la dernière opération à effectuer est une division.

3.5 Exercices

Exercice 1. Calculer :

a) $\big[125\times(16-8)\big]-\big[2\times(3+6)\big]$
b) $\big[5{,}2\times(4+2{,}1)\big]-(18+4)$
c) $(35-9)\times(13-9)$
d) $(18+7{,}2)\times(21-3{,}4)$
e) $3\times(3{,}8+5)-(9+17)\div 2$
f) $(13{,}75\times 12)-7\times(4{,}1-3{,}8)$

Exercice 2. Calculer :

a) $\big[57\times(8-3)\big]-\big[5\times(4+3)-(2+7)\big]$

b) $\{5{,}7 + [4{,}3 + 2 \times (3+1)]\} + [2 \times (3+7) + 1]$
c) $\{6{,}4 + [(5+3) \times 4 - 2] + 7\} + 2 \times (4+8) - 3 \times 5$

Exercice 3. Calculer de la manière la plus simple possible :

a) $11{,}32 \times 4{,}7 + 11{,}32 \times 5{,}3 + 11{,}32 \times 2$
b) $3{,}4 \times 8{,}4 + 5{,}2 \times 8{,}4 + 4{,}4 \times 8{,}4$
c) $7{,}8 \times 4{,}3 + 7{,}8 \times 11{,}7 - 7{,}8 \times 2$

Exercice 4. Calculer :

a) $4{,}85 \times 3{,}6 + 6{,}7 \times 3{,}4 - 1{,}8 \times 3{,}7$
b) $5{,}6 \times 3{,}2 + 4{,}5 \times 2{,}7 - 5{,}04 \times 0{,}78$
c) $9{,}75 \times 6{,}87 - 38{,}73 \times 0{,}04 + 57{,}3 \times 2{,}69$

Exercice 5. Effectuer les calculs suivants :

a) $9{,}12 + 3{,}35 - 7{,}81 + 14{,}3$
b) $19{,}15 - 7{,}28 + 12{,}13 - 5{,}17$
c) $8{,}51 + 15{,}2 - 8{,}3 - 13{,}28$
d) $2{,}18 - (14{,}15 - 13{,}8) + 0{,}75$
e) $8{,}2 \div 4 - (15{,}2 - 14{,}8)$
f) $(18{,}3 - 5{,}6) - (1{,}25 \times 4{,}2)$
g) $[4{,}8 \div (13{,}2 - 9{,}2)] - (0{,}015 \times 3)$
h) $(69{,}5 \div 5) - [2{,}21 \times (8{,}1 - 5{,}8)]$
i) $3{,}1 \times 2{,}7 + 8{,}1 \times 1{,}6 - 8{,}4 \times 0{,}5$
j) $9 \div 6 + 0{,}8 \div 2 - 1{,}25 \div 5$
k) $7{,}2 \div 5 + 12 \div 10 + 1{,}4 \div 7$
l) $3{,}5 \div (9{,}2 - 7{,}2) + 3 \div 2$

Exercice 6. Calculez de deux façons différentes :
$12 \times (5+2)$; $(11-6) \times 3$; $(2{,}5 + 1{,}3) \times 2$; $6 \times (3{,}5 - 1{,}4)$.

Exercice 7. Calculez (en posant la multiplication) : 15×43.
Utilisez le résultat pour calculer mentalement 15×44 et 16×43.

Exercice 8. Calculer mentalement :

17×101 ; 17×99 ; 23×102 ; 23×98.

Exercice 9. Une fleuriste compose un bouquet « spécial fête des mères » ; chaque bouquet contient sept roses et quatre lys. Sachant qu'elle doit préparer 81 bouquets, combien aura-t-elle utilisé de fleurs ?

Chapitre 4
Nombres entiers et décimaux relatifs

4.1 Grandeurs orientées

Certaines grandeurs peuvent être repérées dans deux *sens* différents.

Exemple : Pour repérer les températures, il faut une température de référence. Ainsi sur l'échelle Celsius (employée notamment en France), c'est celle de la fusion de la glace qui a été choisie. C'est pour cela que l'on dit que la glace fond à 0 degré.
Les températures plus chaudes que cette température-là se repèrent avec un nombre, que l'on fait parfois précéder d'un signe $+$ pour insister : on parle par exemple d'une température de 20 degrés (ou, pour insister : $+20$ degrés ; en abrégé : $+20$ °C).
Les températures plus froides que la température de fusion de la glace, c'est-à-dire plus froides que 0 degré, doivent être distinguées des précédentes par l'emploi d'un signe $-$: on parle, par exemple, d'une température égale à -18 °C (pour un congélateur). On dit parfois aussi, pour ce dernier cas : température de « 18 degrés au-dessous de zéro » (mais le plus simple reste de dire : « Température de -18 °C »).

Exemple : De même que les températures sont repérées à partir d'une certaine référence, les altitudes sont repérées *par rapport* à un certain niveau, à savoir le niveau des océans (tous les niveaux des océans du globe sont en effet situés quasiment à la même altitude). Par exemple, le mont Sinaï a une altitude de $+2602$ mètres, ce qui signifie : « 2602 mètres au-dessus du niveau de la mer ». À l'opposé, le niveau de la mer Morte est à une altitude de -395 mètres, c'est-à-dire : « 395 mètres au-dessous du niveau des océans ». (Les rives de la mer Morte sont en effet l'un des rares endroits de toutes les terres émergées qui soit situé au-dessous du niveau des océans.)

Exemple : Comme on le sait, en un lieu donné, la pression atmosphérique est une quantité variable au cours du temps. Le plus souvent, une *augmentation* de la pression annonce un temps ensoleillé alors qu'une *diminution* de la pression laisse au contraire augurer l'arrivée du mauvais temps. Les variations de pression peuvent donc avoir lieu dans deux directions opposées. Si, d'un jour à l'autre, la pression a augmenté, sa variation sera conventionnellement affectée d'un signe plus (ex. : $+20$ hectopascals) et si elle a diminué, alors cette variation sera affectée d'un signe moins (ex. : variation de -30 hectopascals, c'est-à-dire une diminution de 30 hectopascals).

4.2 Définition des nombres relatifs

Définition
On appelle :
- $\star$ nombre *positif* tout nombre précédé du signe $+$
- $\star$ nombre *négatif* tout nombre précédé du signe $-$

Convention
On considère le nombre 0 (zéro) comme étant à la fois positif et négatif. Il s'agit du seul nombre qui soit ainsi positif et négatif. On le note 0 sans signe, et la notation -0 (qui est à éviter) serait, en toute logique, équivalente à 0.

Définition (ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$)
- La réunion de l'ensemble des nombres entiers positifs et de l'ensemble des nombres entiers négatifs est appelée l'ensemble des *nombres entiers relatifs*, et est notée $\mathbb{Z}$.
- La réunion de l'ensemble des nombres décimaux positifs et de l'ensemble des nombres décimaux négatifs est appelée l'ensemble des *nombres décimaux relatifs*, et est notée $\mathbb{D}$.

4.3 Valeur absolue

Définition
On appelle *valeur absolue* d'un nombre relatif le nombre obtenu en supprimant son signe.

Exemples : le nombre $(+8)$ a pour valeur absolue 8 ;
le nombre $(-2{,}7)$ a pour valeur absolue $2{,}7$.

Remarque : L'écriture d'un nombre relatif comprend toujours son signe et sa valeur absolue.
C'est pour cette raison que, pour éviter les ambiguïtés, on note souvent les nombres relatifs entre parenthèses pour bien montrer que le signe est compris $\big($par ex. : $(-3{,}54)$ $\big)$.

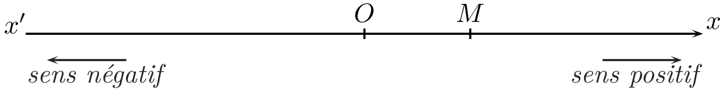
Remarque : Comme les autres nombres, un nombre relatif peut être représenté par une lettre. La lettre représente alors le nombre relatif, y compris son signe. Une lettre, comme x, peut donc tout aussi bien désigner un nombre négatif qu'un nombre positif. Sa valeur absolue se note $|x|$ avec des « barres » que l'on appelle « barres de valeur absolue ».
Si x désigne le nombre (-12), alors on a : $|x| = 12$.

4.4 Droite orientée

Une droite étant donnée, on peut évidemment la parcourir dans deux sens différents. Choisir (conventionnellement) l'un de ces deux sens, c'est ce que l'on appelle *orienter* la droite. Plus précisément, on adoptera la définition suivante liée à cette question d'orientation :

Définition
On appelle *axe* une droite orientée, c'est-à-dire une droite sur laquelle on a choisi un sens de parcours (qui est appelé le *sens* ou l'*orientation* de l'axe).

Soit $x'x$ un axe (notation[*] qui laisse entendre que l'axe est parcouru « de x' vers x »). Soit O un point fixé de $x'x$, que nous appellerons *origine* de l'axe. Par commodité, il est de tradition de noter l'axe sous la forme $x'Ox$.



Si un point parcourt la demi-droite $[Mx$ de M vers x, nous dirons qu'il se déplace dans le *sens positif* et s'il parcourt la demi-droite $[Mx'$ de M vers x', nous dirons qu'il se déplace dans le *sens négatif*.

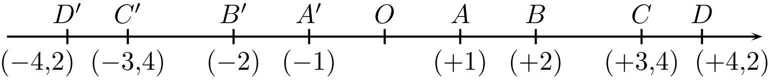
4.5 Image d'un nombre relatif sur un axe

Adoptons une unité de longueur, par exemple le centimètre, sur l'axe $x'x$. Aux nombres relatifs (+1), (+2), (+3,4) et (+4,2) nous faisons correspondre les points A,B,C et D de la demi-droite $[Ox$ tels que l'on ait, en centimètres :

$$OA = 1\,; \quad OB = 2\,; \quad OC = 3{,}4\,; \quad OD = 4{,}2.$$

Aux nombres relatifs (−1), (−2), (−3,4) et (−4,2) nous faisons correspondre les points A', B', C' et D' de la demi-droite $[Ox'$ tels que l'on ait, en centimètres :

$$OA' = 1\,; \quad OB' = 2\,; \quad OC' = 3{,}4\,; \quad OD' = 4{,}2.$$



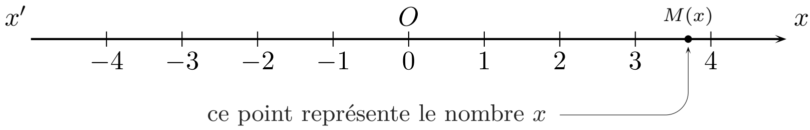
À tout nombre relatif (entier ou décimal) x correspond ainsi un point M et un seul de l'axe $x'x$.

C'est parce que l'on emploie habituellement la lettre x pour désigner l'abscisse d'un point M que l'on appelle souvent cette droite $x'x$. Remarquer que, dans l'écriture « $x'x$ » les lettres x ne sont que des symboles bien pratiques alors que quand on dit que « M

*. On écrit bien $x'x$ et pas $(x'x)$. En effet, on met des parenthèses quand, étant donné deux points distincts A et B, on veut désigner la droite passant par ces deux points ; on la note (AB). Ici, x' et x ne désignent pas des points mais ne sont que des symboles correspondant aux deux « extrémités » de la droite.

a pour abscisse x », la lettre x désigne un vrai nombre relatif (qui dépend de M).

À tout nombre positif correspond un point situé sur la demi-droite $[Ox$. À tout nombre négatif correspond un point situé sur la demi-droite $[Ox'$. Le nombre 0 est représenté par le point O.

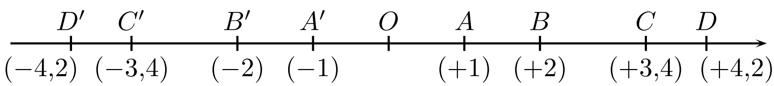


4.6 Abscisse d'un point

Définition
Si le nombre relatif x a son image en M sur l'axe $x'x$, d'origine O (voir figure ci-dessus), alors on dit que le nombre x est l'*abscisse* du point M, et on note : $\overline{OM} = x$

Exemple : Sur la figure ci-dessous on a :

$$\overline{OA} = (+1)\,; \quad \overline{OB'} = (-2)\,; \quad \overline{OD} = (+4{,}2)\,; \quad \overline{OC'} = (-3{,}4).$$



Définition
Soit * deux points A et B de l'axe $x'x$.
On appelle *mesure algébrique* du segment $[AB]$, et on note $\overline{AB}$, l'abscisse de B lorsqu'on prend A comme origine sur l'axe $x'x$.

*. On pourrait, si on le voulait, écrire « soient » (verbe « être » à la 3e personne du pluriel du subjonctif présent). Néanmoins, il existe une tradition, en mathématiques, d'utiliser le mot « soit » de manière invariable dans ce contexte. Nous suivrons cette tradition (cf. Grevisse *Le bon usage*, 8e édition, nº 820).

Propriété
$\overline{AB}$ a pour valeur absolue la mesure de la distance AB. De plus :
- *Le nombre relatif $\overline{AB}$ est positif si, en parcourant le segment $[AB]$ de A vers B, on se déplace dans le sens (positif) $x'x$.*
- *Le nombre relatif $\overline{AB}$ est négatif si, en parcourant le segment $[AB]$ de A vers B, on se déplace dans le sens (négatif) xx'.*

Exemple : Avec la figure précédente, on a :

$$\overline{AB} = (+1)\,; \quad \overline{CA} = (-2{,}4)\,; \quad \overline{BB'} = (-4)\,; \quad \overline{DC'} = (-7{,}6).$$

4.7 Égalité de deux nombres relatifs

On a dit qu'un nombre relatif est la donnée d'un signe (+ ou −) et d'une valeur absolue (qui est une quantité positive).
Deux nombres relatifs sont donc égaux s'ils ont même signe et même valeur absolue.

4.8 Opposé d'un nombre relatif

Définition
- On dit que deux nombres relatifs sont *opposés* [*] lorsqu'ils ont la même valeur absolue et des signes différents.
- Un nombre relatif étant donné, on appelle *opposé* de ce nombre le nombre qui n'en diffère que par le signe (et qui a donc la même valeur absolue).

Exemples : $(+5)$ et (-5) sont opposés ;
$(-3{,}2)$ et $(+3{,}2)$ sont opposés.

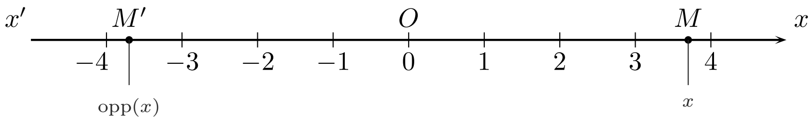
Propriété
- *Sur l'axe $x'x$, les nombres $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ sont opposés.*
- *Tout nombre relatif a un opposé et un seul.*

*. On dit aussi : *symétriques*.

- *Si deux nombres opposés sont représentés par les points M et M', alors le segment $[MM']$ a pour milieu l'origine O. On dit que ces deux points sont* SYMÉTRIQUES *par rapport au point O.*

Notation :
On notera opp(x) l'opposé du nombre relatif x.

Exemples : opp$(+3{,}7) = (-3{,}7)$; opp$(-3{,}7) = (+3{,}7)$.



4.9 Repérage d'un point dans le plan

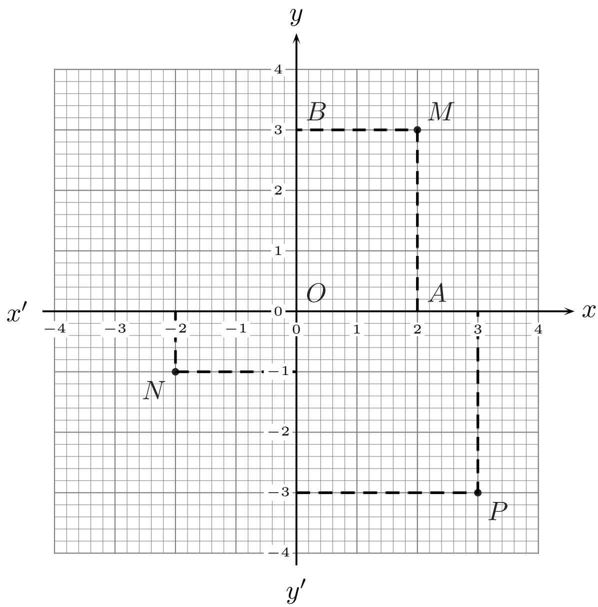
Considérons dans un plan deux axes perpendiculaires $x'x$ et $y'y$ sécants en O. Ces axes ont le point O pour origine commune et sont gradués avec la même unité de longueur.

- Soit M un point quelconque du plan.
  - ⋆ Menons par M la parallèle à $y'Oy$: cette droite coupe l'axe $x'Ox$ en un point A.
    Le nombre relatif $x = \overline{OA}$ se nomme l'*abscisse* du point M.
  - ⋆ Menons par M la parallèle à $x'Ox$: cette droite coupe l'axe $y'Oy$ en un point B.
    Le nombre relatif $y = \overline{OB}$ se nomme l'*ordonnée* du point M.
  - ⋆ Les deux nombres x et y forment ce que l'on appelle les *coordonnées* du point M (dans le système d'axes considéré).
    On note alors $M(x;y)$ ou $M\binom{x}{y}$ ou $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$

    Par exemple, sur la figure qui suit, le point M a pour coordonnées $(2;3)$.

- Inversement, si on se donne les coordonnées $(x;y)$ du point M, la construction du point M s'obtient en prenant A sur $x'Ox$ et B sur $y'Oy$ tels que $\overline{OA} = x$ et $\overline{OB} = y$. Alors le point M se situe à l'intersection de la parallèle à $y'Oy$ passant par A et de la parallèle à $x'Ox$ passant par B.

Sur la figure qui suit, on a ainsi, par exemple, construit les deux points $N(-2;-1)$ et $P(3;-3)$.



Tout point M du plan est entièrement déterminé par ses coordonnées $x = \overline{OA}$ et $y = \overline{OB}$.

Comme l'axe $x'x$ sert à « mesurer » les abscisses des points, on l'appelle souvent *axe des abscisses* ou même « axe des x ». De même, l'axe $y'y$, qui sert à « mesurer » les ordonnées, est appelé *axe des ordonnées* ou « axe des y ».

Remarque : Notons qu'il n'est pas indispensable de choisir une même longueur comme unité sur les deux axes. Ce choix dépend des grandeurs considérées et des dimensions du dessin.

La donnée de O, des deux axes xx' et yy' et des unités de mesure sur ces deux axes constitue ce que l'on appelle un *repère* du plan.

4.10 Exercices

Exercice 1. On choisit comme unité de longueur le centimètre. Sur l'axe $x'x$ d'origine O construire les points A, B, C, D, E représentant les nombres relatifs $(-5{,}7)$; $(+3{,}8)$; $(-2{,}4)$; $(+7{,}1)$; (-1). Comment sont rangés ces points sur l'axe $x'x$?

Exercice 2.

a) Placer sur un axe $x'x$ les points suivants donnés par leurs abscisses, exprimées en cm : $A(-3)$; $B(-2)$; $C(-5)$; $D(-4)$.

b) En déduire les valeurs de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$.

Exercice 3. Sur un axe $x'x$ d'origine O, on construit les points $A(+3)$, $B(+11)$ et $M(+7)$. Calculer les nombres relatifs $\overline{AB}$, $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, et $\overline{OM}$. Que représente le point M pour le segment $[AB]$ et que peut-on dire des nombres $\overline{AM}$ et $\overline{MB}$?

Exercice 4. On construit sur un axe $x'Ox$ les points $A(+5)$, $B(+9)$, $C(-1)$ et $D(-5)$. Comparer les nombres $\overline{AB}$ et $\overline{DC}$, ainsi que les nombres $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$. Que représente le point $M(+2)$ pour chacun des segments $[AC]$ et $[BD]$?

Exercice 5. On place sur un axe $x'x$ deux points A et B d'abscisses $(+1)$ et (-3). Quelles sont les abscisses des points qui partagent le segment $[AB]$ en 8 parties égales ?

Exercice 6. Soit A et B deux points d'abscisses (-2) et (-5). Quelle est l'abscisse du milieu M du segment $[AB]$? Quelle est l'abscisse du point N tel que $\overline{BN} = 2\overline{AN}$?

Exercice 7. Soit un point A d'abscisse $(+5)$. Quelle est l'abscisse du point A' symétrique de A par rapport à l'origine O des abscisses ? Soit de même B d'abscisse (-1) et B' son symétrique par rapport à O. Évaluer $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$.

Exercice 8. Placez dans le plan les points suivants :
$A(+1{,}5; -0{,}5)$; $B(+1{,}5; +4{,}5)$; $C(-1{,}5; +0{,}5)$; $D(-1{,}5; -4{,}5)$
Vérifiez que $ABCD$ est un losange (voir la définition p. 236).

Chapitre 5
Addition des nombres relatifs

5.1 Somme de deux nombres relatifs

On considère un joueur qui joue plusieurs parties successivement. Pour chacune de ces parties, il peut gagner ou bien perdre de l'argent. Si, pour une certaine partie, le joueur gagne une certaine somme d'argent, nous dirons qu'il s'agit d'un *gain positif*. Si, au contraire, il perd de l'argent, nous appellerons cela un *gain négatif*, qui sera représenté par un nombre négatif.

On considère maintenant différentes situations possibles lorsque le joueur joue deux parties successivement. On va, dans chaque cas, calculer le « gain total » du joueur à l'issue de ces deux parties :

- S'il gagne successivement 8 € et 7 €, il gagne en définitive 15 € ; nous écrirons :
$$(+8) + (+7) = (+15)$$

- S'il perd successivement 8 € et 7 €, il perd en définitive 15 € ; nous écrirons :
$$(-8) + (-7) = (-15)$$

- S'il gagne 12 € puis perd 7 €, il gagne en définitive 5 € ; nous écrirons :
$$(+12) + (-7) = (+5)$$

- S'il perd 12 € puis gagne 7 €, il perd en définitive 5 € ; nous écrirons :
$$(-12) + (+7) = (-5)$$

Ces exemples justifient les définitions suivantes :

5.2 Définition de l'addition

Définition

- La somme de deux nombres relatifs *de même signe* est le nombre relatif de même signe (que les deux autres) et dont la valeur absolue est la somme de leurs valeurs absolues.
- La somme de deux nombres relatifs *de signes opposés* est le nombre relatif dont la valeur absolue est la différence de leurs valeurs absolues et dont le signe est celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue.

La deuxième partie du deuxième point se retient souvent en disant : « *Dans le cas de la somme de deux nombres de signes opposés, c'est le nombre qui a la plus grande valeur absolue qui impose son signe.* »

5.3 Somme de plusieurs nombres relatifs

Définition

La *somme* de plusieurs nombres relatifs rangés dans un certain ordre est le nombre relatif obtenu en ajoutant le premier nombre au second, le nombre obtenu au troisième, et ainsi de suite.

Les nombres qui interviennent dans la somme sont appelés les *termes* de la somme (alors que lorsqu'il s'agit d'un produit, on parle des *facteurs* d'un produit).

Exemple :
La somme $(+13) + (-15) + (-7) + (+3) + (-1)$ se calcule de la manière suivante :
On calcule la somme des deux premiers termes :
$$(+13) + (-15) = (-2)$$
On ajoute au total obtenu $\big($à savoir $(-2)\big)$ le troisième terme :
$$(-2) + (-7) = (-9)$$
On ajoute au total obtenu le quatrième terme :
$$(-9) + (+3) = (-6)$$
On ajoute enfin le dernier terme :

$$(-6) + (-1) = (-7)$$

On peut aussi présenter les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{rl}
 & \underbrace{(+13) + (-15)} \quad +(-7) \quad +(+3) \quad +(-1) \\
= & \underbrace{(-2) + (-7)} \quad +(+3) \quad +(-1) \\
= & \underbrace{(-9) + (+3)} \quad +(-1) \\
= & \underbrace{(-6) + (-1)} \\
= & (-7)
\end{array}$$

Les propriétés des sommes de nombres relatifs sont les mêmes que celles des sommes arithmétiques : nous nous contenterons de vérifier sur quelques exemples qu'elle sont correctes.

5.4 Commutativité de l'addition

Propriété
*L'addition est **commutative**, c.-à-d. : la somme de deux nombres relatifs est indépendante de l'ordre dans laquelle on l'effectue :*

$$\boxed{a + b = b + a}$$

Exemple : $(-3{,}2) + (+1{,}8) = (+1{,}8) + (-3{,}2) = (-1{,}4)$

5.5 Associativité de l'addition

Propriété
*L'addition est **associative**, c'est-à-dire : on ne change pas la valeur d'une somme de plusieurs termes en remplaçant deux ou plusieurs de ces termes par leur somme effectuée :*

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

Cette somme peut donc s'écrire $a + b + c$.

Exemple :

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{\big[(+3) + (-7)\big]} + (+12) & = & (+3) + \underbrace{\big[(-7) + (+12)\big]} \\
\underbrace{(-4) + (+12)} & = & \underbrace{(+3) + (+5)} \\
(+8) & = & (+8)
\end{array}$$

Conséquence
Une somme de nombres relatifs est indépendante de l'ordre de ses termes.

Exemple :
$$\begin{aligned} & a+b+c+d \\ &= (a+b)+(c+d) && \text{par associativité} \\ &= (c+d)+(a+b) && \text{par commutativité} \\ &= c+d+a+b && \text{par associativité} \end{aligned}$$

5.6 Élement neutre de l'addition

Propriété
Le nombre 0 *est l'élément neutre de l'addition, c'est-à-dire :*

$$\boxed{0+a=a+0=a}$$

Exemple : $(-7)+0=0+(-7)=(-7)$

5.7 Propriété de l'opposé

Propriété
*La somme de deux nombres relatifs opposés** *est égale à zéro :*

$$\boxed{a+\text{opp}(a)=\text{opp}(a)+a=0}$$

Exemple : $(-12)+(+12)=(+12)+(-12)=0$

5.8 Une propriété importante

Remarque :
En mathématiques, on dit que deux propriétés sont *équivalentes* si chacune découle de l'autre. Par exemple dire que « Nicole est la sœur de Georges » équivaut à dire que « Georges est le frère de Nicole ».

*. Au lieu de « nombres opposés », on dit aussi « nombres symétriques ».

En effet : ⋆ si « Nicole est la sœur de Georges »,
alors « Georges est le frère de Nicole » ;

⋆ si « Georges est le frère de Nicole »,
alors « Nicole est la sœur de Georges ».

Propriété
Les égalités « $a = b$ » et « $a + x = b + x$ » sont équivalentes.

Preuve

- On suppose que l'on a l'égalité $a = b$
  Les deux nombres a et b étant égaux, les deux nombres obtenus en ajoutant x à chacun d'entre eux sont aussi égaux : $a+x = b+x$
- On suppose maintenant que les deux nombres $a + x$ et $b + x$ sont égaux. Les deux nombres obtenus en leur ajoutant $\operatorname{opp} x$ (l'opposé de x) sont égaux.
  donc $(a + x) + \operatorname{opp} x = (b + x) + \operatorname{opp} x$
  donc $a + (x + \operatorname{opp} x) = b + (x + \operatorname{opp} x)$
  donc $a + 0 = b + 0$ et on obtient bien $a = b$

□ *

5.9 Exercices

Exercice 1. Calculez mentalement les sommes :

a)	$(+23) + (+17)$	;	$(-42) + (-38)$
b)	$(-76) + (+34)$	;	$(+67) + (-24)$
c)	$(+700) + (-700)$	;	$(-700) + (-700)$
d)	$(+700) + (-2\,700)$	;	$(-840) + 0$
e)	$(-840) + (+840)$	;	$(-840) + (-840)$

Exercice 2. Effectuer les additions suivantes :

a)	$(+3) + (-5) + (+7)$	;	$(+13) + (+17) + (+15)$
b)	$(-17) + (+14) + (-41)$	;	$(+3) + (-3) + (+5) + (-5)$
c)	$(-15) + (-30) + (-40)$	;	$(-100) + (+75) + (+25)$
d)	$(+37) + (-137)$	;	$(-42) + (-258)$
e)	$(-63) + (+474)$	;	$(+258) + (-76)$

*. Le signe □ indique la fin d'une preuve ou d'une démonstration.

Exercice 3. Effectuer les additions suivantes :

a) $(+43{,}72) + (+58{,}28)$; $(-67{,}29) + (-46{,}32)$
b) $(-93{,}17) + (+29{,}57)$; $(+42{,}75) + (-18{,}29)$
c) $(+1\,010{,}1) + (+2\,020{,}2)$; $(-4\,040{,}4) + (-3\,300{,}3)$
d) $(+5\,055{,}5) + (-7\,070{,}7)$; $(-3\,303{,}3) + (+8\,088{,}8)$

Exercice 4. Placer sur un axe orienté les points suivants dont les abscisses sont données en centimètres : $A(-3)$; $B(-1)$; $C(+1)$; $D(+2)$ et $E(+5)$. Vérifier les égalités :

a) $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE}$
b) $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE}$
c) $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CE}$
d) $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BE}$
e) $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$
f) $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{CE}$

Chapitre 6 Soustraction des nombres relatifs

6.1 Soustraction des nombres relatifs

a. Problème

Étant donné deux nombres relatifs a et b, existe-t-il un nombre relatif x tel que $a = b + x$?

Prenons par exemple $a = (-7)$ et $b = (-4)$.

a) Supposons qu'il existe un nombre x répondant au problème.
On a donc $\quad (-7) = (-4) + x$
On ajoute l'opposé de (-4) $\big($qui est égal à $(+4)\big)$ à chacun de ces deux nombres :
On a donc $\quad (+4) + (-7) = (+4) + \big((-4) + x\big)$
On peut changer la place des parenthèses :
On a donc $\quad (+4) + (-7) = \big((+4) + (-4)\big) + x$
or $(+4) + (-4) = 0$ et donc : $(+4) + (-7) = x$
on obtient : $\quad x = (-3)$

b) On vérifie que (-3) est bien la solution cherchée car :

$$(-7) = (-4) + (-3)$$

Ce problème de la recherche de x vérifiant $a = b + x$ (que l'on vient de résoudre dans un cas particulier) incite à définir la *soustraction des nombres relatifs* comme on va le faire maintenant.

b. Définition de la soustraction

Définition
On appelle *différence* de deux nombres relatifs a et b (dans cet ordre), l'unique nombre relatif tel que : $a = b + x$.
On le note $a - b$

➩ Les égalités « $x = a - b$ » et « $b + x = a$ » sont équivalentes.

Exemples :

$(+17) - (+14) = (+3)$ car : $(+14) + (+3) = (+17)$

$(-1{,}6) - (-1{,}8) = (+0{,}2)$ car : $(-1{,}8) + (0{,}2) = (-1{,}6)$

L'opération qui permet de calculer la différence de deux nombres est la *soustraction*, de même que l'opération qui permet de calculer une somme est appelée l'*addition*.

Règle
Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.

Ceci signifie que : $\boxed{a - b = a + \text{opp}(b)}$

Comme on le voit, toute soustraction se ramène à une addition.

Preuve
Calculer $a - b$, c'est chercher le nombre x qui, ajouté à b, donne a.
Il s'agit donc de chercher x tel que $x + b = a$
Comme précédemment, on ajoute opp(b) aux deux nombres qui figurent dans cette égalité :
$x + b + \text{opp}(b) = a + \text{opp}(b)$ et donc $x = a + \text{opp}(b)$
Ce nombre x est par définition la différence $a - b$
On a donc : $a - b = a + \text{opp}(b)$ □

Exemples :

$(-10) - (+11) = (-10) + \text{opp}(+11) = (-10) + (-11) = (-21)$

$(+4) - (-9) = (+4) + \text{opp}(-9) = (+4) + (+9) = (+13)$

$(-3{,}5) - (-7{,}2) = (-3{,}5) + \text{opp}(-7{,}2) = (-3{,}5) + (7{,}2) = (+3{,}7)$

Remarque : Contrairement à l'addition, la soustraction n'est ni associative, ni commutative.
Donnons deux exemples* qui illustrent cela :

$$\begin{cases}(+3)-(+2)=(+1)\\(+2)-(+3)=(-1)\end{cases}\qquad \text{donc}\quad (+3)-(+2)\neq(+2)-(+3)$$

$$\begin{cases}(+3)-\big((+2)-(+1)\big)=(+3)-(+1)=(+2)\\\big((+3)-(+2)\big)-(+1)=(+1)-(+1)=0\end{cases}$$
$$\text{donc}\quad (+3)-\big((+2)-(+1)\big)\neq\big((+3)-(+2)\big)-(+1)$$

c. Règles de simplification

Dans la soustraction $0-a$, on a pris l'habitude de ne pas marquer le nombre 0 : $0-a=-a$
Or $0-a=0+\text{opp}(a)=\text{opp}(a)$ et on obtient donc : $\boxed{-a=\text{opp}(a)}$

Exemples :

$-(+2)=(-2)$ $\big($ car l'opposé de $(+2)$ est (-2) $\big)$
$-(-3{,}5)=(+3{,}5)$ $\big($ car l'opposé de $(-3{,}5)$ est $(+3{,}5)$ $\big)$

Comme on le voit, $-a$ ne désigne pas toujours un nombre négatif. En prenant $a=(-3{,}5)$ comme ci-dessus, $-a$ est égal au nombre $(+3{,}5)$ qui est un nombre positif.

Dans la suite, on considérera que, pour les nombres relatifs positifs*, le signe « + » est facultatif.*
Pour les nombres relatifs négatifs, le signe « − », pour sa part, n'est évidemment jamais facultatif.
Par exemple, le nombre $(+4{,}5)$ se note de manière allégée : 4,5.

Ceci revient à considérer, conventionnellement, qu'un nombre relatif positif est égal à sa valeur absolue.

Exemple : Calculer $-5-4+3$
On doit considérer cette écriture comme la somme des trois nombres relatifs (-5), (-4) et $(+3)$.
Autrement dit : $-5-4+3=(-5)+(-4)+(+3)$

*. De tels exemples (qui servent à mettre en garde contre la tentation d'utiliser des règles que l'on pourrait croire justes) sont appelés des *contre-exemples*.

$$\begin{array}{rcccc} -5-4+3 & = & (-5)+(-4) & + & (+3) \\ & = & \underbrace{\big((-5)+(-4)\big)} & + & (+3) \\ & = & (-9) & + & (+3) \\ & = & (-6) & & \end{array}$$

Exemple : Calculer $8-12$
Tant que l'on ne parlait que des nombres positifs, la soustraction $8-12$ ne pouvait pas être effectuée. Néanmoins, dans l'ensemble des nombres relatifs, cette soustraction peut se faire :

$$\begin{aligned} 8-12 &= (+8) - \quad (+12) \\ &= (+8) + \text{opp}(+12) \\ &= (+8) + \quad (-12) \\ &= (-4) \end{aligned}$$

Exemple : Calculer $A = (-3)+(-5)-(-6)-(+4)+(+7)$

$$\begin{array}{rcl} A & = & (-3)+(-5)-(-6)-(+4)+(+7) \\ & = & (-3)+(-5)+\text{opp}(-6)+\text{opp}(+4)+(+7) \\ & = & (-3)+(-5)+(+6)+(-4)+(+7) \\ & = & (+6)+(+7)+(-3)+(-4)+(-5) \\ & = & \big((+6)+(+7)\big)+\big((-3)+(-4)+(-5)\big) \\ & = & (+13)+(-12) \\ & = & (+1) \\ & = & 1 \end{array}$$

On remarquera que, pour mener ce type de calculs, il est plus simple de regrouper séparément les termes positifs et les termes négatifs, de sommer ces deux groupes de termes, puis de sommer les résultats ainsi obtenus. Cette démarche n'est possible que si on a, au préalable, ramené l'ensemble à une suite d'additions.

Remarque : Dans le calcul précédent, on remarque que :

$$+(+7)=7 \qquad -(-6)=6 \qquad +(-5)=-5 \qquad -(+4)=-4$$

Ceci se généralise par ce que l'on appelle la « **règle des signes** » :

Propriété

$+$ *devant* $+$ *se remplace par* $+$
$-$ *devant* $-$ *se remplace par* $+$
$+$ *devant* $-$ *se remplace par* $-$
$-$ *devant* $+$ *se remplace par* $-$

6.2 Inégalités entre nombres relatifs

a. Définition

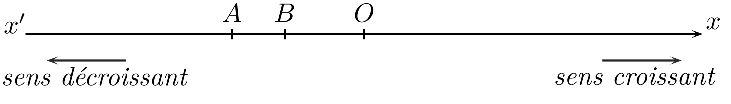
Définition
Soit a et b deux nombres relatifs.
- On dit que a est *supérieur* à b, ou que a est *plus grand* que b et on note $a > b$, lorsque la différence $(a - b)$ est positive et non nulle.
- On dit que a est *inférieur* à b, ou que a est *plus petit* que b et on note $a < b$, lorsque la différence $(a - b)$ est négative et non nulle.

Exemples :

$(+12) - (+7) = (+5)$	donc	$(+12) > (+7)$
$(-7) - (-12) = (+5)$	donc	$(-7) > (-12)$
$(+12) - (-7) = (+19)$	donc	$(+12) > (-7)$
$(+3) - 0 = (+3)$	donc	$(+3) > 0$
$(-3) - 0 = (-3)$	donc	$(-3) < 0$

Propriété
- *Tout nombre positif est supérieur à* 0*.*
- *Tout nombre négatif est inférieur à* 0*.*
- *Un nombre positif est supérieur à tous les nombres négatifs.*
- *De deux nombres positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue.*
- *De deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue.*

Remarque :
Soit deux nombres relatifs a et b, d'images respectives A et B sur l'axe $x'x$. Si $a < b$, alors le parcours de A à B a le même sens que celui de x' à x.



Autrement dit, lorsqu'on parcourt l'axe $x'x$, les abscisses des points de cet axe vont en croissant dans le sens $x' \longrightarrow x$ (et donc en décroissant dans le sens $x \longrightarrow x'$).

À titre d'exercice, on placera les images des nombres relatifs de l'exemple précédent sur l'axe orienté $x'x$.

Définition
Soit a et b deux nombres relatifs.

- On dit que a est *supérieur ou égal* à b, et on note $a \geqslant b$, lorsque la différence $(a - b)$ est positive.
- On dit que a est *inférieur ou égal* à b, et on note $a \leqslant b$, lorsque la différence $(a - b)$ est négative.

⇨ Remarquer que si $a = 4$, alors on peut écrire $a \geqslant 4$

b. Manipulations sur les inégalités

Théorème
On a le droit d'ajouter ou de retrancher un même nombre aux deux membres d'une inégalité.

Preuve
Soit a, b, c trois nombres relatifs. Supposons que $a \geqslant b$.
Montrons que $\quad a + c \;\geqslant\; b + c \quad$ et $\quad a - c \;\geqslant\; b - c$

Comparons $a + c$ et $b + c$:

$$\begin{aligned}
&(a + c) - (b + c) \\
&= a + c - b - c && \text{règle des signes} \\
&= a - b + c - c && \text{commutativité de } + \\
&= a - b + 0 && \text{car } c - c = 0 \\
&= a - b
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $a - b$ est positif, donc $(a+c)-(b+c)$ est positif, et par suite $a + c \;\geqslant\; b + c$

Comparons $a - c$ et $b - c$:

$$\begin{aligned}
&(a-c)-(b-c) \\
&\quad = a-c-b+c && \text{règle des signes} \\
&\quad = a-b-c+c && \text{commutativité de } + \\
&\quad = a-b+0 && \text{car } -c+c=0 \\
&\quad = a-b
\end{aligned}$$

Or par hypothèse, $a-b$ est positif, donc $(a-c)-(b-c)$ est positif, et par suite $a-c \geqslant b-c$ □

Exemple :
Soit x un nombre relatif. Supposons que $x+3 \leqslant 2$.
Que peut-on dire concernant x lui-même ?

La propriété précédente permet de répondre à cette question en transformant l'inégalité $x+3 \leqslant 2$ en une suite d'opérations :

$$\begin{aligned}
x+3 \leqslant 2 \quad & \text{équivaut à} \quad x+3-3 \leqslant 2-3 \\
& \text{équivaut à} \quad x+0 \leqslant -1 \\
& \text{équivaut à} \quad x \leqslant -1
\end{aligned}$$

Les nombres relatifs x tels que $x+3 \leqslant 2$ sont donc *les nombres inférieurs à* -1

Théorème
On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.

Preuve
Soit a, b, c et d quatre nombres relatifs. Supposons $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$.
Montrons que $a+c \leqslant b+d$.

Comparons $a+c$ et $b+d$:

$$\begin{aligned}
&(b+d)-(a+c) \\
&\quad = b+d-a-c && \text{règle des signes} \\
&\quad = b-a+d-c && \text{commutativité de } + \\
&\quad = (b-a)+(d-c) && \text{associativité}
\end{aligned}$$

Or par hypothèse, $(b-a)$ et $(d-c)$ sont positifs, donc leur somme l'est aussi, et par suite $a+c \leqslant b+d$. □

6.3 Application aux mesures algébriques

Soit $x'x$ un axe, d'origine O.

Soit deux points A et B de l'axe. On a défini (voir p. 23) la mesure algébrique $\overline{AB}$ d'un segment $[AB]$ comme étant l'abscisse de B lorsqu'on prend A pour origine sur l'axe $x'x$.

La soustraction des nombres relatifs nous permet de donner une expression commode de la mesure algébrique d'un segment :

Propriété
Si A et B ont pour abscisses respectives a et b, alors :

$$\boxed{\overline{AB} = b - a}$$

On en déduit aisément les deux propriétés suivantes :

Propriété
Quels que soient les points A et B de l'axe orienté $x'x$, on a :

$$\boxed{\overline{BA} = -\overline{AB}}$$

Propriété (relation de Chasles)
Quels que soient les points A, B et C de l'axe orienté $x'x$, on a :

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}}$$

Preuve
En notant a, b et c les abscisses respectives de A, B et C, on a :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = (b - a) + (c - b) = c - a = \overline{AC} \qquad \square$$

Remarque : La relation de Chasles est intéressante en ce sens qu'elle est vraie dès que A, B et C sont alignés et ce indépendamment de l'orientation de l'axe auquel ils appartiennent, et indépendamment de la position relative des trois points.
A contrario, l'égalité $AB + BC = AC$ n'est vraie que dans le cas où B appartient au segment $[AC]$ et devient fausse dès que B n'est plus entre A et C.

6.4 Exercices

Exercice 1. Effectuer les soustractions suivantes :

a) $(+15)-(-13)$; $(+4{,}5)-(+5{,}49)$
b) $(+12)-(+9)$; $(-3{,}9)-(-7{,}4)$
c) $(+5)-(+17)$; $(-13{,}75)-(-4{,}01)$

Exercice 2. Quel est la variation de la température indiquée par un thermomètre qui passe :

a) de -18 °C à $+20$ °C ? (quand on décongèle un produit)
b) de 20 °C à 100 °C ? (quand on fait bouillir de l'eau)
c) de -5 °C à -7 °C ?
d) de $+3$ °C à -1 °C ?

Exercice 3. Dans un immeuble, un ascenseur passe de l'étage -3 à l'étage 5. De combien d'étages monte-t-il ?

Exercice 4. Quels sont les intervalles de temps séparant les dates suivantes ?

a) $+2$ h 15 min et $+11$ h 45 min
b) $+3$ h 51 min et $+7$ h 17 min
c) $+7$ h 14 min et -8 h 16 min
d) -2 h 12 min et -1 h 17 min
e) -3 h 10 min et -1 h 05 min
f) -13 h 45 min et $+5$ h 51 min
g) -4 h 17 min 51 s et $+12$ h 17 min 47 s

Exercice 5. Effectuer les calculs suivants :

a) $-13+15-7-9+1$
b) $0{,}75-2{,}3+4{,}7$
c) $4+9-13-7+5$
d) $-0{,}5+1-0{,}7-3$
e) $-8-12+13+7$
f) $7-9-11+0{,}75$

Exercice 6. Effectuer les calculs suivants :

a) $(+7-8+4)+(-9-13-1)+(+4-5-7)$
b) $\big[(-3)+(-7)+(-1)\big]+\big[(-5)+(-9)+(+4)\big]$
c) $\big[(+5-0{,}7)+(+4-0{,}3)\big]+\big[(-13-4{,}7)+(-3)\big]$
d) $(-10)+(-15)-(-30)+(+7)-(+12)$
e) $(-7)-(-9)-(+17)+(-41)+(+1)$

f) $(+49) - (-63) + (-3) - (+4)$
g) $(-0{,}7) - (-0{,}9) + (-13{,}5) - (+4)$
h) $7 - 10 + 14 - 13 - 21 + 3$
i) $0{,}75 + 4{,}7 - 0{,}7 - 0{,}5 - 1$

Exercice 7. Effectuer les calculs suivants :
a) $(+6{,}6) + (+3) + (+9{,}5) + (+1{,}1) + (+6{,}5)$
b) $(+0{,}54) + (+0{,}49) + (-0{,}16) + (+0{,}15) + (+0{,}29)$
c) $(+7{,}3) + (-4{,}7) + (-4{,}7) + (-9{,}8) + (-1{,}3)$
d) $(-0{,}3) + (+0{,}34) + (+0{,}82) + (-0{,}02) + (-0{,}84)$
e) $(-48) + (+4) + (+32) + (+50) + (-18)$
f) $(-54) + (-92) + (+2) + (+44) + (+54)$
g) $(+6{,}5) + (-5{,}8) + (+7{,}3) + (+9{,}9) + (+6{,}7)$
h) $(-1) + (-80) + (+17) + (+15) + (+3)$
i) $(-0{,}57) + (-0{,}37) + (-0{,}36) + (-0{,}66) + (+0{,}07)$
j) $(+33) + (+1) + (+54) + (-20) + (+97)$
k) $(-0{,}1) + (-6{,}9) + (-5{,}9) + (-7{,}1) + (+6{,}1)$
l) $(-1{,}1) + (+2{,}8) + (-0{,}4) + (-1{,}4) + (-3{,}1)$
m) $(-26) + (-58) + (+67) + (-33) + (+85)$
n) $(+1{,}3) + (+7) + (-1{,}4) + (+3{,}5) + (-7{,}4)$
o) $(+0{,}3) + (+9{,}1) + (+1{,}9) + (+4{,}4) + (+0{,}7)$

Exercice 8. Effectuer les calculs suivants :
a) $(-6{,}4) - (-2{,}7) - (-7) - (+2{,}8) + (-7{,}5)$
b) $(+1{,}1) + (-5{,}1) - (+3{,}2) + (+8) - (-8)$
c) $(+28) - (+12) + (+45) + (-18) - (+46)$
d) $(+0{,}86) + (+0{,}64) - (-0{,}71) + (-0{,}94) - (+0{,}02)$
e) $(+7{,}9) - (+8{,}5) + (+3{,}4) + (-1{,}4) + (+6{,}1)$
f) $(+0{,}69) + (-0{,}47) - (+0{,}21) + (+0{,}84) - (+0{,}28)$
g) $(+23) - (-6) - (-59) - (-97) - (+46)$
h) $(-83) - (-7) - (+90) - (+68) + (+99)$
i) $(-39) + (+31) - (-39) + (+53) + (-84)$
j) $(+0{,}62) - (+0{,}46) - (-0{,}03) + (-0{,}29) + (+0{,}74)$
k) $(-2{,}6) - (+4{,}7) + (-4) + (+6{,}2) - (+3{,}2)$
l) $(-67) - (-56) + (+66) - (-56) - (+64)$
m) $(+49) + (+20) + (-53) - (+29) + (-17)$
n) $(-6{,}8) + (-5{,}4) + (-7{,}5) + (+2{,}1) - (-9{,}7)$
o) $(-0{,}12) - (+0{,}16) + (-0{,}66) - (-0{,}03) - (-0{,}16)$
p) $(+67) - (-99) - (+75) + (-39) - (+97)$
q) $(-0{,}65) + (-0{,}34) + (-0{,}02) - (-0{,}17) + (-0{,}04)$

r) $(+80) - (+8) + (+78) + (-49) + (-4)$
s) $(-3{,}1) + (+9{,}2) - (+6{,}7) - (-8{,}2) - (+6)$
t) $(+1{,}9) - (-6{,}9) + (-9{,}1) - (-0{,}9) + (+3{,}1)$

Exercice 9. Effectuer les calculs suivants :

a) $0{,}7 - 0{,}99 + 0{,}23 - 0{,}41 - 0{,}03$
b) $0{,}03 - 0{,}18 - 0{,}77 + 0{,}49 + 0{,}27$
c) $5{,}8 + 5{,}4 - 9{,}3 + 8{,}7 - 9{,}9$
d) $41 - 19 + 25 + 49 - 35$
e) $96 - 80 - 62 - 67 + 97$
f) $4{,}5 - 1{,}8 - 7{,}7 + 2{,}3 - 2{,}9$
g) $7{,}5 - 3{,}4 - 5{,}1 + 4{,}2 + 5{,}9$
h) $76 - 28 + 9 - 84 - 2$
i) $3 + 59 - 21 - 54 + 30$
j) $6{,}6 - 8{,}5 - 5{,}4 + 5{,}1 + 8{,}3$
k) $0{,}64 - 0{,}8 - 0{,}06 - 0{,}92 + 0{,}17$
l) $0{,}1 + 4{,}4 - 7{,}7 - 9 - 3{,}4$
m) $9{,}3 - 8{,}1 - 3{,}7 + 8{,}8 + 6$
n) $36 - 85 + 73 - 97 + 6$
o) $22 - 43 - 44 + 83 + 67$
p) $1 + 4{,}4 - 2{,}8 - 7{,}6 - 5{,}3$
q) $10 - 62 - 4 - 87 + 31$
r) $46 - 92 - 79 + 6 - 89$
s) $83 + 31 - 34 + 83 - 18$
t) $9{,}7 + 1{,}7 - 3{,}5 - 3{,}6 + 5{,}4$

Exercice 10. Ranger par ordre croissant les nombres relatifs suivants :

a) $+4$ et $+7$
b) $(+3{,}51)$ et $(-3{,}52)$
c) (-8) et (-10)
d) (-3), $(+5)$ et (-7)
e) $(-4{,}2)$, $(-3{,}7)$ et $(-5{,}2)$

Exercice 11. Dans un carré magique, la somme de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est toujours la même.

Compléter les carrés magiques suivants :

a)

2		0
	-1	
		-4

b)

		7
		10
1		-5

c)

5		-9	
			-3
-2	-5	-4	1
-7		3	

d)

-2	2		1
	3	4	
5		-2	
	0		0

CINQUIÈME

Chapitre 7
Fractions

Dans ce chapitre, on ne parle que de nombres *positifs*.

7.1 Généralités

Définition
Si a est un nombre décimal (positif) et b est un nombre décimal (positif) *non nul*, on appelle *quotient* de a par b (ou *rapport* de a et de b) le nombre qui, multiplié par b, donne a.
On note ce quotient $\frac{a}{b}$, et on lit : « a divisé par b » ou « a sur b »

Exemple : Le quotient de 4,25 par 2,39 se note $\frac{4{,}25}{2{,}39}$

Dans le cas où les deux nombres a et b sont des entiers, on retrouve la notion habituelle de fraction, avec son *numérateur* a et son *dénominateur* b.
En fait, même si, au départ, on considère un quotient de nombres décimaux $\left(\text{comme par exemple } \frac{4{,}25}{2{,}39}\right)$, on peut toujours le ramener à un quotient de deux entiers en multipliant le numérateur et le dénominateur par 10 un certain nombre de fois.
Par exemple : $\frac{4{,}25}{2{,}39} = \frac{425}{239}$ (chacun sait que la division de 4,25 par 2,39 est égale à la division de 425 par 239)

C'est pourquoi, dans la suite, on considérera le plus souvent des quotients de deux nombres entiers positifs.

Remarque : Le quotient de deux nombres décimaux est un nombre qui, le plus souvent, ne peut pas s'écrire sous forme de nombre décimal (c'est-à-dire comme un nombre avec éventuellement une virgule suivie par un certain nombre de chiffres).

On devrait d'ailleurs dire directement que : « le plus souvent, le quotient de deux nombres décimaux n'est *pas* un décimal ».

Par exemple,
Le nombre $\frac{2}{3}$ n'est pas un nombre décimal ;
il est vrai que l'on peut dire que 0,666 est une valeur approchée de $\frac{2}{3}$ (au millième par défaut),
néanmoins, $\frac{2}{3}$ n'est égal ni à 0,666 ; ni à 0,6666 ; ni à 0,66666, etc.

7.2 Égalité entre fractions

Propriété
On ne change pas un quotient (ou une fraction) lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.
Autrement dit, pour tous décimaux a, $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}} \qquad \textit{Exemple :}\ \frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$$

➪ Conséquence : un quotient de deux décimaux peut toujours s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers.

Exemple : $\dfrac{0{,}3}{1{,}57} = \dfrac{0{,}3 \times 100}{1{,}57 \times 100} = \dfrac{30}{157}$

7.3 Simplification de fractions

Règle
Pour simplifier une fraction de deux entiers, on décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers et on divise numérateur et dénominateur par les diviseurs communs aux deux.

Exemple : $\dfrac{360}{1400} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7} = \dfrac{3 \times 3}{5 \times 7} = \dfrac{9}{35}$

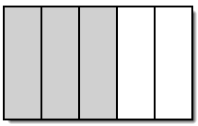
Une fraction qui ne peut plus être simplifiée est dite sous forme *irréductible*. La fraction $\frac{9}{35}$ est une fraction irréductible.

7.4 Réduction au même dénominateur

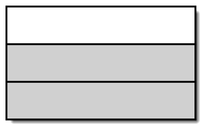
Définition
Réduire deux ou plusieurs fractions au même dénominateur, c'est les remplacer par des fractions égales ayant toutes le même dénominateur.

On peut interpréter géométriquement cette opération sur un exemple simple :

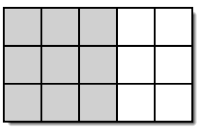
Exemple : Réduire au même dénominateur les fractions : $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$.



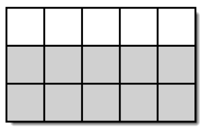
$\frac{3}{5}$



$\frac{2}{3}$



$\frac{3}{5} = \frac{3\times3}{5\times3} = \frac{9}{15}$



$\frac{2}{3} = \frac{2\times5}{3\times5} = \frac{10}{15}$

Ainsi réduire au même dénominateur s'apparente à l'opération qui consiste à prendre la même unité de mesure d'aire.

Exemple : De même, pour réduire au même dénominateur les deux fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{8}{9}$, on multiplie les deux termes de la première par 9 et ceux de la seconde par 5 :

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 9}{5 \times 9} = \frac{27}{45}$$
$$\frac{8}{9} = \frac{8 \times 5}{9 \times 5} = \frac{40}{45}$$

Nous pouvons résumer la méthode employée dans les deux exemples précédents sous la forme suivante :

Règle
Pour réduire deux fractions au même dénominateur, on peut multiplier les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre.

Plus généralement, on peut énoncer :

Règle
Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on peut multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres.

Exemple : Réduire au même dénominateur les fractions : $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{4}$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 9 \times 4}{5 \times 9 \times 4} = \frac{108}{180}$$
$$\frac{8}{9} = \frac{8 \times 5 \times 4}{9 \times 5 \times 4} = \frac{160}{180}$$
$$\frac{7}{4} = \frac{7 \times 5 \times 9}{4 \times 5 \times 9} = \frac{315}{180}$$

Cependant, dans de nombreux cas, on peut simplifier les calculs en utilisant la décomposition en facteurs premiers, comme le montrent les exemples suivants :

Exemple : Réduire au même dénominateur les fractions : $\frac{17}{55}$ et $\frac{9}{5}$
On commence par décomposer les dénominateurs en facteurs premiers : $55 = 5 \times 11$ et 5 est premier. Il suffit donc de multiplier les termes de la deuxième fraction par 11 pour effectuer la réduction au même dénominateur :

$$\frac{17}{55} = \frac{17}{5 \times 11} = \frac{17}{55}$$
$$\frac{9}{5} = \frac{9 \times 11}{5 \times 11} = \frac{99}{55}$$

Exemple : Réduire au même dénominateur les fractions : $\frac{1}{63}$ et $\frac{7}{45}$
On commence par décomposer les dénominateurs en facteurs premiers : $63 = 3 \times 3 \times 7$ et $45 = 3 \times 3 \times 5$. Il suffit donc de multiplier les termes de la première fraction par 5 et ceux de la deuxième fraction par 7 pour effectuer la réduction au même dénominateur :

$$\frac{1}{63} = \frac{1}{3 \times 3 \times 7} = \frac{1 \times 5}{3 \times 3 \times 7 \times 5} = \frac{5}{315}$$
$$\frac{7}{45} = \frac{7}{3 \times 3 \times 5} = \frac{7 \times 7}{3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{49}{315}$$

Exemple : Réduire au même dénominateur : $\frac{18}{28}$, $\frac{19}{21}$ et $\frac{70}{150}$
Remarquons tout d'abord que la première et la troisième fractions peuvent être simplifiées :

$$\frac{18}{28} = \frac{9}{14} \qquad \text{et } \frac{70}{150} = \frac{7}{15}$$

On décompose ensuite les dénominateurs en facteurs premiers :

$$\frac{9}{14} = \frac{9}{2 \times 7} = \frac{9 \times 3 \times 5}{2 \times 7 \times 3 \times 5} = \frac{135}{210}$$
$$\frac{19}{21} = \frac{19}{3 \times 7} = \frac{19 \times 2 \times 5}{3 \times 7 \times 2 \times 5} = \frac{190}{210}$$
$$\frac{7}{15} = \frac{7}{3 \times 5} = \frac{7 \times 2 \times 7}{3 \times 5 \times 2 \times 7} = \frac{98}{210}$$

7.5 Comparaison de fractions

Propriété (Comparaison d'une fraction à l'unité)

- *Si le numérateur d'une fraction est inférieur au dénominateur, cette fraction est inférieure à* 1*.*

$$\boxed{\textit{Si } a < b \quad \textit{alors } \tfrac{a}{b} < 1}$$

- *Si le numérateur d'une fraction est supérieur au dénominateur, cette fraction est supérieure à* 1*.*

$$\boxed{\textit{Si } a > b \quad \textit{alors } \tfrac{a}{b} > 1}$$

Exemple : Comparer $\dfrac{17}{19}$ et $\dfrac{85}{82}$.

➥ On compare chaque fraction à 1 :

$$\left.\begin{array}{l} 17 < 19 \text{ donc } \frac{17}{19} < 1 \\ 85 > 82 \text{ donc } \frac{85}{82} > 1 \end{array}\right\} \quad \text{donc } \frac{17}{19} < 1 < \frac{85}{82}$$

En conclusion, $\frac{17}{19} < \frac{85}{82}$

Propriété
Lorsque deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

$$\boxed{\textit{Si } a < b \quad \textit{alors } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}}$$

Exemple : On a $27 < 40$ donc $\frac{27}{45} < \frac{40}{45}$

Propriété
Lorsque deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

$$\boxed{\textit{Si } b < c \quad \textit{alors } \frac{a}{b} > \frac{a}{c}}$$

Exemple : On a $27 < 40$ donc $\frac{45}{27} > \frac{45}{40}$

Dans le cas où les fractions ont des dénominateurs différents, il suffit de les réduire au même dénominateur pour pouvoir ensuite appliquer la propriété précédente.

Exemple : Pour comparer $\frac{3}{5}$ et $\frac{8}{9}$, on commence par les réduire au même dénominateur :

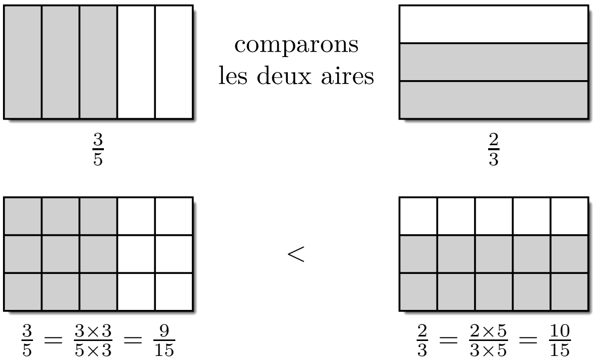
$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 9}{5 \times 9} = \frac{27}{45}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{8 \times 5}{9 \times 5} = \frac{40}{45}$$

L'inégalité $\frac{27}{45} < \frac{40}{45}$ montre que $\frac{3}{5} < \frac{8}{9}$

Comme précédemment, la comparaison des fractions peut s'interpréter géométriquement sur un exemple simple :

Exemple : Comparer les fractions : $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$



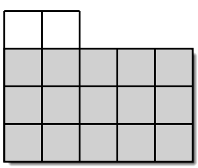
Ainsi l'inégalité $\frac{9}{15} < \frac{10}{15}$ montre que $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

7.6 Partie entière d'une fraction

Si une fraction est supérieure à l'unité, on peut chercher le plus grand entier qui lui est inférieur.

Définition
On appelle *partie entière* d'une fraction le plus grand entier qui lui est inférieur (ou égal).

Exemple : Soit à calculer la partie entière de $\frac{17}{5}$.



On peut commencer par dessiner 17 carrés représentant chacun 1 cinquième d'une certaine unité d'aire, en les rangeant par lignes de 5.
On remarque alors que 17 cinquièmes valent 3 fois 5 cinquièmes plus 2 cinquièmes.
Or 5 cinquièmes valent une unité d'aire.