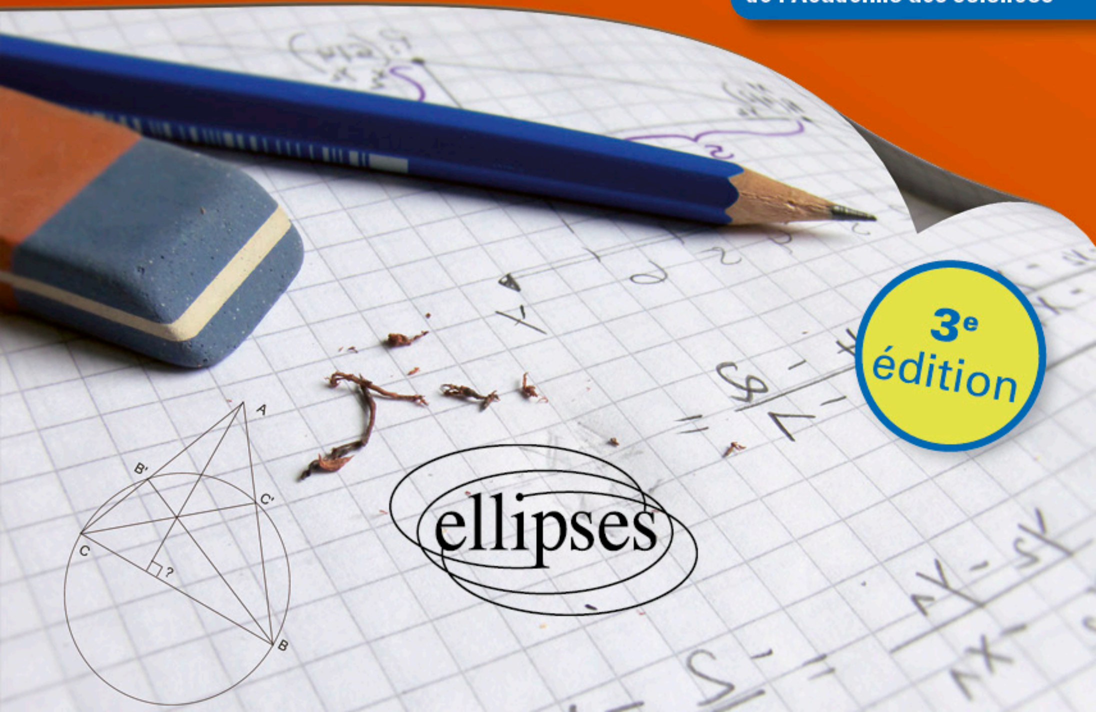
Cycle 4

5^e - 4^e - 3^e

Les MATHS au collège

Exercices corrigés progressifs

Prix du livre d'enseignement scientifique de l'Académie des sciences



3^e édition

ellipses

Les MATHS au collège
Exercices corrigés progressifs

3e édition

Cycle 4
5e - 4e - 3e

Alexandre CASAMAYOU-BOUCAU
François PANTIGNY

ellipses

Les auteurs tiennent à remercier particulièrement
M. Hubert H. Hupkes pour sa relecture du manuscrit.
A. C.-B. & F. P.

Merci à Anne de sa patience et de ses encouragements
pendant ce long travail de rédaction.
A. C.-B.

Ce livre a été composé en LuaLaTeX sous Linux Ubuntu.

ISBN 9782340-115965

Dépôt légal : juin 2026

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Suite à la publication de notre précédent ouvrage, *Les maths au collège : démontrer pour comprendre*, beaucoup de lecteurs avaient émis le souhait de disposer de davantage d'exercices corrigés. Parallèlement à sa réédition, nous avons donc entrepris la rédaction du présent livre pour répondre à ces attentes. Pour que ce recueil-ci puisse être utilisé indépendamment du premier, nous avons fait précéder chaque série d'exercices d'un exposé synthétique du cours.

Conformément aux principes pédagogiques de l'*Enseignement explicite* [*], la structure de ce livre a été organisée suivant une liste d'*objectifs d'apprentissage*, formulés à l'aide de verbes d'action conjugués à la première personne. Ainsi l'élève prendra connaissance, sans ambiguïté,

- de la compétence à acquérir en lisant le titre du paragraphe ;
- des moyens d'y parvenir en lisant le cours condensé placé en début de paragraphe.

Les objectifs sont échelonnés de manière très progressive, notamment en ce qui concerne les compétences calculatoires. Leur liste est donnée en tête de chaque chapitre, avec une indication de la classe dans laquelle ils pourront être abordés (5^e, 4^e ou 3^e).

Dans les premiers chapitres, nous avons réservé une large place aux exercices de calcul : opérations usuelles sur les nombres et calcul littéral. Faire ses gammes est indispensable pour parvenir à une maîtrise stable des connaissances. Force est de constater que cette pratique n'est pas très à la mode (sauf en sport où l'exigence de résultat est plus que jamais de mise) : on lui a fait le faux procès de mener à une pensée mécanique. Pourtant, comme le souligne éloquemment Liliane Lurçat [**], « il faut revaloriser la pédagogie des automatismes. L'installation et la conservation des automatismes se fondent sur un enseignement méthodique, appuyé sur les exercices et la répétition. On ne doit pas l'interpréter comme une automatisation de la pensée mais, bien au contraire, comme la condition de son émancipation. » En tenant l'élève en deçà de cette acquisition, on le condamne injustement à produire du babil mathématique. En revanche, l'assimilation de ces automatismes est source de confiance et l'élève peut facilement mesurer ses progrès. Pourquoi vouloir le priver de cette gratification ?

Dans la discipline qui nous concerne, la méfiance à l'égard de cette pédagogie (pour ne pas dire son bannissement) avait trouvé un allié particulier dans le

*. Voir, par exemple, de Clermont GAUTHIER, Steve BISSONNETTE, Mathieu RICHARD, Mireille CASTONGUAY, *Enseignement explicite et réussite des élèves — La gestion des apprentissages*, Louvain-la-Neuve, De Boeck, 2013

**. Voir, notamment, de Liliane LURÇAT, *La destruction de l'école élémentaire et ses penseurs*, Paris, François-Xavier de Guibert, 1998 postulat selon lequel l'avènement des calculatrices devait nous dispenser de l'enseignement du calcul, sinon le restreindre à quelques allusions paléographiques : « Voici comment autrefois les élèves divisaient deux nombres décimaux… »

Si l'on transposait ce raisonnement à l'enseignement du français, on pourrait en inférer que le développement des logiciels de reconnaissance optique de caractères et de synthèse vocale nous délivrera tout prochainement de l'apprentissage de la lecture.

Or, l'usage précoce et systématique de la calculatrice est nocif : elle ne permet pas à l'élève d'intérioriser les notions mathématiques et elle inhibe les facultés d'observation sans lesquelles les notions plus abstraites resteront inintelligibles. Voici un exemple de soustraction de fractions menée, à gauche par un élève qui utilise systématiquement sa calculatrice pour effectuer la moindre opération, à droite par un élève qui fait preuve d'intuition acquise par la pratique :

$$\begin{aligned}
&\frac{94}{95}-\frac{49}{38}\\
&=\frac{94\times 38}{95\times 38}-\frac{49\times 95}{38\times 95}\\
&=\frac{3572}{3610}-\frac{4655}{3610}\\
&=\frac{-1083}{3610}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&\frac{94}{95}-\frac{49}{38}\\
&=\frac{94}{5\times 19}-\frac{49}{2\times 19}\\
&=\frac{-57}{5\times 2\times 19}\\
&=\frac{-3\times \cancel{19}}{2\times 5\times \cancel{19}}\\
&=-\frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Au final, celui de gauche aura du mal à exprimer le résultat sous forme de fraction irréductible, sauf s'il s'est procuré une calculatrice qui permet cette simplification… La comparaison est sans appel. À gauche, on peut dire, au mieux, qu'il sait utiliser une formule qui apparaît surtout comme une « recette de cuisine ». À droite, l'élève mobilise différentes notions assimilées antérieurement (notamment la divisibilité dans $\mathbb{N}$, la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, la simplification de fractions, etc.) pour arriver de manière sûre, rapide et efficace au résultat correct.

À de rares exceptions près, les exercices de cet ouvrage sont à effectuer sans l'aide de la calculatrice. Les quelques-uns qui en nécessitent l'usage raisonné seront signalés par le pictogramme suivant : 

Même les exercices faisant intervenir le nombre π sont à traiter crayon en main (sauf mention explicite du contraire). En effet, il est beaucoup plus instructif de simplifier d'abord une écriture contenant π en la regardant comme une expression littérale, puis de remplacer le nombre π par l'approximation $\frac{22}{7}$ qui en fournit les trois premières décimales, et enfin d'en déduire une valeur approchée. On réactive ainsi des connaissances acquises en calcul littéral et en calcul fractionnaire. De plus, on évite le non-sens consistant à recopier la dizaine de décimales affichées par la calculatrice pour répondre à une question comme, par exemple, « donner le périmètre d'un objet de diamètre 1 m ». Voir à ce propos l'exercice 5.26 page 113.

Pour conclure ce plaidoyer, disons que, si le calcul n'est pas le tout des mathématiques, il n'en est pas moins la porte d'entrée. Cela étant dit, chaque fois que le thème s'y prête, nous avons proposé des exercices dans un contexte tiré de la vie courante ou d'autres disciplines.

Quant à la présentation de la géométrie, nous avons regroupé les notions qui sont dans le prolongement direct du cycle 3 dans un chapitre intitulé *Figures planes*, et abordé la démarche de démonstration dans le chapitre intitulé *Angles et distances*. Par exemple, nous avons mis en œuvre les cas d'égalité des triangles pour démontrer les propriétés des parallélogrammes. Néanmoins, nous n'avons pas exposé de manière détaillée comment les trois cas d'égalité des triangles permettent de démontrer de proche en proche tous les théorèmes de base de la géométrie plane, le sujet ayant déjà été traité dans notre premier ouvrage.

Certains énoncés comportent une figure géométrique dessinée sur un quadrillage. Pour les résoudre, l'élève devra commencer par reproduire la figure sur une feuille, de préférence à petits carreaux. Pour des contraintes de mise en page, les carreaux des quadrillages ont été souvent réduits. Sur sa feuille, l'élève pourra faire correspondre aux carreaux du livre des carreaux de 1 cm de côté (soit quatre petits carreaux).

Le livre se conclut par un chapitre consacré à l'algorithmique et à la programmation. Les exercices qui s'y trouvent sont généralement en rapport avec les autres chapitres.

Tout au long de l'ouvrage, certains exercices, demandant plus de réflexion, sont signalés par un astérisque ($\star$).

Nous accueillerons avec reconnaissance les critiques et suggestions que le lecteur voudra bien nous faire parvenir à l'adresse électronique suivante : <maths.college.demontrer@gmail.com>.

Nombres
et
opérations

Nombres décimaux | 1

Sommaire

1. Opérations sur les décimaux

J'utilise correctement le vocabulaire sur les opérations

Commençons par quelques rappels sur le vocabulaire des opérations :

- Dans une addition, les quantités que l'on ajoute sont appelées les *termes* ; le résultat est appelé la *somme*.
- Dans une soustraction, les quantités que l'on soustrait sont appelées les *termes* ; le résultat est appelé la *différence*.
- Dans une multiplication, les quantités que l'on multiplie sont appelées les *facteurs* ; le résultat est appelé le *produit*.
- Dans une division, le nombre que l'on divise s'appelle le *dividende* ; celui par lequel on divise s'appelle le *diviseur* ; le résultat s'appelle le *quotient*. Dans une division euclidienne, le *reste* est la différence entre le dividende et le produit du diviseur par le quotient.

Illustrons ce rappel par quatre exemples :

Addition

$$\underbrace{0{,}5 + 12{,}35 + 18}_{\textit{les termes}} = \underbrace{30{,}85}_{\textit{la somme}}$$

Soustraction

$$\underbrace{43 - 21{,}8}_{\textit{les termes}} = \underbrace{21{,}2}_{\textit{la différence}}$$

Multiplication

$$\underbrace{25 \times 3{,}2 \times 4}_{\textit{les facteurs}} = \underbrace{320}_{\textit{le produit}}$$

Division (euclidienne)

le diviseur

le dividende

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 7 & 1 & 12 \\ \cline{4-4} -\,1 & 2 & & 14 \\ \cline{1-2} & 5 & 1 & \\ & -\,4 & 8 & \\ \cline{2-3} & 0 & 3 & \end{array}$$

le reste *le quotient*

Je pose une opération en colonnes

- **Addition et soustraction.** Pour additionner et soustraire des nombres décimaux, on peut disposer les calculs en colonnes en commençant par aligner verticalement les unités.
  Dans le cas de la soustraction, on peut utiliser indifféremment le procédé d'emprunt ou celui de compensation.

Exemple. Soit à calculer la somme $7305{,}34 + 967{,}812$.

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\;\;\;\;\;1\;1\;\;\;\;\;\;\;} \\
7\,3\,0\,5{,}3\,4 \\
+\;\;\;9\,6\,7{,}8\,1\,2 \\
\hline
8\,2\,7\,3{,}1\,5\,2
\end{array}$$

Exemple. Soit à calculer la différence $371{,}53 - 0{,}409$.

Procédé d'emprunt

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 10} \\
 & 3 & 7 & 1, & 5 & \cancel{3} & \\
- & & & 0, & 4 & 0 & 9 \\
\hline
 & 3 & 7 & 1, & 1 & 2 & 1
\end{array}$$

Procédé de compensation

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 3 & 7 & 1, & 5 & 3 & {\scriptstyle 10} \\
- & & & 0, & 4 & 0_{\scriptstyle 1} & 9 \\
\hline
 & 3 & 7 & 1, & 1 & 2 & 1
\end{array}$$

- **Multiplication.** Pour disposer en colonnes la multiplication de deux nombres relatifs, il n'est pas nécessaire d'aligner les unités.
  Après avoir effectué le produit des deux facteurs comme s'il n'y avait pas de virgules, on totalise le nombre de décimales des deux facteurs, et on obtient le nombre de décimales du produit. On peut également utiliser une estimation pour placer la virgule.
  À noter que pour raccourcir le calcul, on peut placer en bas le facteur qui contient le plus petit nombre de chiffres.

  Exemple. Soit à calculer le produit $7{,}92 \times 458{,}5$.
  Le nombre de décimales s'obtient :
  - ∗ en totalisant les décimales des facteurs : $1 + 2 = 3$ décimales au départ, donc 3 décimales à l'arrivée ;
  - ∗ en effectuant une estimation : $458{,}5 \times 7{,}92 \approx 500 \times 8 = 4\,000$.

$$\begin{array}{r}
4\,5\,8{,}5 \\
\times\;\;\;7{,}9\,2 \\
\hline
9\,1\,7\,0 \\
4\,1\,2\,6\,5\,\cdot \\
3\,2\,0\,9\,5\,\cdot\,\cdot \\
\hline
3\,6\,3\,1{,}3\,2\,0
\end{array}$$

- **Division.** On rappelle qu'on ne change pas le quotient de deux nombres si on les multiplie par un même nombre non nul. Ainsi, lorsqu'on effectue une division entre deux décimaux, on peut les multiplier par 10 autant de fois que nécessaire pour tomber sur un diviseur entier, sans changer le quotient.

  Exemple. Soit à calculer le quotient $11{,}502 : 0{,}27$.

  Par multiplication du dividende et du diviseur par 10, on obtient :

$$\begin{aligned}
11{,}502 : 0{,}27 &= 115{,}02 : 2{,}7 \\
&= 1150{,}2 : 27 \\
&= 42{,}6
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
\overline{1\,1\,5}\,0{,}2 & 2\,7 \\
\cline{2-2}
-\,1\,0\,8\phantom{\,0{,}2} & 4\,2{,}6 \\
\cline{1-1}
7\,0\phantom{{,}2} & \\
-\,5\,4\phantom{{,}2} & \\
\cline{1-1}
1\,6\,2 & \\
-\,1\,6\,2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Je nomme et utilise les propriétés de l'addition et de la multiplication

Dans le tableau suivant, on décrit les différentes propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres décimaux. Ces propriétés resteront valables pour l'addition et la multiplication des nombres relatifs, des nombres rationnels et des nombres réels.

ADDITION	MULTIPLICATION
L'addition est *commutative*. Cela signifie que *dans une somme, changer les termes de place ne modifie pas la somme.* ⇨ Pour tous nombres a et b, on a $a+b=b+a$	**La multiplication est *commutative*.** Cela signifie que *dans un produit, changer les termes de place ne modifie pas le produit.* ⇨ Pour tous nombres a et b, on a $a\times b=b\times a$
L'addition est *associative*. Cela signifie que *former des sommes partielles ne modifie pas la somme finale.* ⇨ Pour tous nombres a, b et c, on a $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$	**La multiplication est *associative*.** Cela signifie que *former des produits partiels ne modifie pas le produit final.* ⇨ Pour tous nombres a, b et c, on a $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)=a\times b\times c$
Le nombre 0 est l'*élément neutre* de l'addition. Cela signifie que *ajouter 0 à un nombre donne une somme égale à ce nombre.* ⇨ Pour tout nombre a, on a $0+a=a=a+0$	**Le nombre 1 est l'*élément neutre* de la multiplication.** Cela signifie que *multiplier un nombre par 1 donne un produit égal à ce nombre.* ⇨ Pour tout nombre a, on a $1\times a=a=a\times 1$
	Le nombre 0 est *élément absorbant* de la multiplication. Cela signifie que *multiplier un nombre par 0 donne un produit nul.* ⇨ Pour tout nombre a, on a $0\times a=0=a\times 0$

La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition et à la soustraction.

⇨ Pour tous nombres a, b et c, on a

$$\boxed{a}\times(b+c)=\boxed{a}\times b+\boxed{a}\times c \qquad (a+b)\times\boxed{c}=a\times\boxed{c}+b\times\boxed{c}$$

$$\boxed{a}\times(b-c)=\boxed{a}\times b-\boxed{a}\times c \qquad (a-b)\times\boxed{c}=a\times\boxed{c}-b\times\boxed{c}$$

Exercice 1. Quelle est la propriété justifiant les égalités suivantes ?

a) $2{,}1 \times 3{,}8 = 3{,}8 \times 2{,}1$

b) $6{,}7 \times 1 = 6{,}7$

c) $2{,}1 + 3{,}8 = 3{,}8 + 2{,}1$

d) $5 \times (2{,}1 \times 3{,}8) = (5 \times 3{,}8) \times 2{,}1$

e) $0 \times 5{,}5 = 0$

f) $5 + (2{,}1 + 3{,}8) = (5 + 3{,}8) + 2{,}1$

g) $6{,}7 + 0 = 6{,}7$

h) $4{,}1 \times (3{,}5 + 8{,}7) = 4{,}1 \times 3{,}5 + 4{,}1 \times 8{,}7$

Exercice 2. Calcule de la manière la plus simple possible.

a) $17{,}52 \times 3{,}1 + 17{,}52 \times 5{,}3 + 17{,}52 \times 2{,}6$

b) $3{,}1 \times 9{,}3 + 5{,}5 \times 9{,}3 + 4{,}4 \times 9{,}3$

c) $8{,}7 \times 5{,}9 + 8{,}7 \times 15{,}1 - 8{,}7 \times 2$

Exercice 3. Calcule mentalement : 27×101 ; 27×99 ; 13×102 ; 13×98.

Je calcule une puissance d'un nombre

On appelle *puissance* d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre. Plus précisément, si a désigne un nombre et n un entier naturel, on note :

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

et on lit « a puissance n » ou bien « a exposant n ».
L'entier n est appelé l'*exposant* de la puissance.

Exemple. $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 36 \times 6 = 216$

Remarques.

- Par convention $a^0 = 1$.
- À noter que $a^1 = a$.
- $a^2 = a \times a$ se lit « a au carré ».*
- $a^3 = a \times a \times a$ se lit « a au cube ».

Exercice 4. Calcule.

a) 2^0	d) 2^3	g) 2^6	j) 2^9	m) 3^3	p) 4^1	s) 4^4	v) 5^2
b) 2^1	e) 2^4	h) 2^7	k) 3^1	n) 3^4	q) 4^2	t) 4^5	w) 5^3
c) 2^2	f) 2^5	i) 2^8	l) 3^2	o) 3^5	r) 4^3	u) 5^0	x) 5^4

*Le choix de l'expression « au carré » vient du fait que l'aire d'un carré de côté a vaut justement a^2. De même le choix de l'expression « au cube » vient du fait que le volume d'un cube d'arête a vaut a^3.

Exercice 5. Calcule.

a) 10^0	e) 10^4	i) 11^3	m) $0{,}1^2$	q) $1{,}1^1$
b) 10^1	f) 11^0	j) 11^4	n) $0{,}1^3$	r) $1{,}1^2$
c) 10^2	g) 11^1	k) $0{,}1^0$	o) $0{,}1^4$	s) $1{,}1^3$
d) 10^3	h) 11^2	l) $0{,}1^1$	p) $1{,}1^0$	t) $1{,}1^4$

J'effectue des calculs en respectant l'ordre de priorité des opérations

Règles de priorité. Pour calculer une expression faisant intervenir plusieurs opérations, on effectue les opérations dans l'ordre de priorité suivant :

1. Opérations notées entre parenthèses (ou crochets)
2. Puissances et racines
3. Multiplications et divisions
4. Additions et soustractions

De plus,

a) lorsque des additions et des soustractions se suivent, on effectue les opérations de gauche à droite ;

b) lorsque des multiplications et des divisions se suivent, on effectue les opérations de gauche à droite ;

c) lorsque des parenthèses sont imbriquées, on commence par effectuer les calculs qui se trouvent dans les parenthèses les plus intérieures.

Vocabulaire. Une expression contenant plusieurs opérations est appelée :

- une *somme* si la dernière opération à effectuer est une addition ;
- une *différence* si la dernière opération à effectuer est une soustraction ;
- un *produit* si la dernière opération à effectuer est une multiplication ;
- un *quotient* si la dernière opération à effectuer est une division.

Exercice résolu.
Soit à calculer l'expression $A = 3 \times 5^2 - (42 - 6 \times (3 + 2)) \times 2 : 5 + 7$

➠ Dans une expression faisant intervenir plusieurs opérations, les dernières opérations à effectuer sont les additions et les soustractions qui ne se trouvent pas à l'intérieur de parenthèses : dans les premières étapes de calculs, à chaque nouvelle ligne, tu commenceras par écrire ces signes opératoires en laissant la place pour transformer les « blocs » à calculer en priorité :

$$A = \boxed{3 \times 5^2} - \boxed{(42 - 6 \times (3 + 2)) \times 2 : 5} + \boxed{7}$$

On va calculer les blocs les uns après les autres.

Dans le premier bloc, on calcule le carré de 5, puis on effectue la multiplication :

$$\begin{aligned} A &= 3 \times \underbrace{5^2} \mathbf{-} (42 - 6 \times (3+2)) \times 2 : 5 \mathbf{+} 7 \\ &= \underbrace{3 \times 25} \mathbf{-} (42 - 6 \times (3+2)) \times 2 : 5 \mathbf{+} 7 \\ &= \quad 75 \quad \mathbf{-} (42 - 6 \times (3+2)) \times 2 : 5 \mathbf{+} 7 \end{aligned}$$

Dans le deuxième bloc, on effectue d'abord les calculs dans les parenthèses les plus intérieures, puis la multiplication et enfin la soustraction qui se trouvent dans la parenthèse extérieure :

$$\begin{aligned} A &= 75 \mathbf{-} (42 - 6 \times \underbrace{(3+2)}) \times 2 : 5 \mathbf{+} 7 \\ &= 75 \mathbf{-} (42 - \underbrace{6 \times \quad 5}\ ) \times 2 : 5 \mathbf{+} 7 \\ &= 75 \mathbf{-} (\underbrace{42 - \quad 30}\quad) \times 2 : 5 \mathbf{+} 7 \\ &= 75 \mathbf{-} (\quad 12 \qquad\quad) \times 2 : 5 \mathbf{+} 7 \end{aligned}$$

Dans le deuxième bloc, il reste une multiplication par 2 et une division par 5 que l'on effectue de gauche à droite :

$$\begin{aligned} A &= 75 \mathbf{-} \underbrace{12 \times 2} : 5 \mathbf{+} 7 \\ A &= 75 \mathbf{-} \quad \underbrace{24 \ : 5} \mathbf{+} 7 \\ A &= 75 \mathbf{-} \quad 4{,}8 \quad \mathbf{+} 7 \end{aligned}$$

Il ne reste à présent qu'une addition et une multiplication ; on effectue alors les calculs de gauche à droite :

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{75 - 4{,}8} + 7 \\ A &= \quad \underbrace{70{,}2 \ + 7} \\ A &= \qquad 77{,}2 \end{aligned}$$

Exercice 6. Calcule.

a) $10 + 9 \times 8 - 7 + 6 \times 5 + 4 \times 3 : 2 - 1$

b) $(10 + 9) \times 8 - 7 + 6 \times (5 + 4) \times 3 : 2 - 1$

c) $(10 + 9) \times (8 - 7) + 6 \times (5 + 4) \times 3 : (2 - 1)$

d) $10 + (9 \times (8 - 7) + 6) \times (5 + 4) \times 3 : (2 - 1)$

e) $10 + (9 \times (8 - 7) + 6) \times 5 + (4 \times 3) : 2 - 1$

f) $10 + (9 \times 8 - 7) + 6 \times (5 + 4 \times 3) : 2 - 1$

g) $(10 + 9 \times (8 - 7) + 6) \times (5 + 4) \times 3 : (2 - 1)$

h) $(10 + (9 \times 8 - 7) + 6 \times 5 + 4) \times 3 : (2 - 1)$

i) $10 + 9 \times 8 - (7 + 6 \times 5 + 4 \times 3 : 2 - 1)$

j) $10 + 9 \times 8 - (7 + (6 \times 5 + 4) \times 3 : 2 - 1)$

Exercice 7. Calcule.

a) $6 : 2 + 11 \times (5 + 5) - 12$
b) $10 + 5 \times 2 + 4 : (9 - 5)$
c) $6 \times 2 : 6 + 9 - 9 + 13$
d) $11 \times (3 + 6) - 12 : 6 + 6$
e) $7{,}4 \times 3{,}6 - (8{,}6 + 5{,}2) + 4{,}5$
f) $4{,}5 + 9{,}7 \times (9{,}4 + 9{,}3) - 8{,}5$
g) $7 \times 13 + 5 - (13 + 2) : 5$
h) $4 + 4 \times 12 + 9 : (10 - 9)$
i) $12 - 6 : 6 + 6 + 8 \times 12$
j) $5 \times 12 : 5 + 3 + 9 - 7$
k) $9{,}4 - 4{,}6 + 3{,}7 + 5{,}1 \times 2$
l) $3{,}7 \times (7{,}8 + 3{,}3) - 5{,}8 + 1{,}7$
m) $9 + 9 : 9 \times 7 - 8 + 11$
n) $6 + 4 + 6 : 6 \times 2 - 10$
o) $9 \times 2 : 6 + 13 - 10 + 9$
p) $13 + 3 \times 3 : 9 + 9 - 11$
q) $1{,}7 + 9 \times 5{,}8 - 3{,}6 + 6{,}5$
r) $5{,}9 - 3{,}4 + 8{,}2 + 7{,}4 \times 7{,}6$
s) $12 : 3 + 9 \times 13 + 3 - 8$
t) $13 + 12 - 6 : 6 \times (9 + 3)$
u) $4 + 13 : 13 + 3 \times (12 - 7)$
v) $8 + 11 - 8 + 6 : 3 \times 11$
w) $7{,}2 + 7{,}7 \times (4{,}1 + 6{,}4) - 4{,}6$
x) $7{,}1 \times (7{,}4 - 3{,}8) + 5{,}6 + 2{,}7$

Exercice 8. Calcule.

a) $[57 \times (8 - 3)] - [5 \times (4 + 3) - (2 + 7)]$
b) $\{5{,}7 + [4{,}3 + 2 \times (3 + 1)]\} + [2 \times (3 + 7) + 1]$
c) $\{6{,}4 + [(5 + 3) \times 4 - 2] + 7\} + 2 \times (4 + 8) - 3 \times 5$

Exercice 9. Calcule les expressions suivantes en détaillant les calculs.

a) $11^2 - (5^2 + 4)$
b) $8^2 \times 7 - 5^3$
c) $12 \times (9 - 7)^4$
d) $12 : 6 \times 5 + 8^2 + (6 - 5)^5$
e) $12 : 2^2 \times (10 + 6) + 11 - 2$
f) $13 + 3^4 - 2^5 + 4 : 2^2 \times 11$
g) $4^3 - 6^2 + 4^2 \times 7 : 4 - 5$
h) $4{,}1 + 9{,}4 + 2{,}3 \times (5{,}7 - 3{,}3)$
i) $2{,}7 + 1{,}3 + 1{,}9 \times (6{,}9 - 2{,}1)$

Exercice 10. Calcule les expressions suivantes en détaillant les calculs.

a) $7^2 + (9 - 6)^3$
b) $7 \times 8 - 6^2$
c) $8 \times 5 : 2^3$
d) $6^3 - 5 \times 10 - (12 + 4) : 4^2$
e) $10 + 7^2 \times 10 : 7 - (7 - 4)^3$
f) $10^2 - 9 \times 4^2 : (8 + 4) - 4$
g) $8^2 - 4^3 + 6 \times 3 : (3 - 2)^4$
h) $4{,}5 \times 2{,}6 + 2{,}2 + 2{,}5 - 4$
i) $9{,}1 - 4{,}9 + 3{,}8 \times (5{,}1 + 9{,}9)$

Exercice 11. Calcule les expressions suivantes en détaillant les calculs.

a) $5 \times (13^2 - 4^3)$
b) $7^2 \times 5 - 2^5$
c) $7 \times 2^4 : (3 - 1)^3$
d) $12 + 9 : (11 - 8) \times (3^2 - 7)$
e) $2 \times 13 - 5^2 + 11^2 : 11 - 12$
f) $(2 : 2 \times 12)^2 - 11^2 + 13 - 4$
g) $5 \times 4 - 10^2 : 5^2 + (3^3 + 8^2)$
h) $4{,}8 + 2{,}8 + 4{,}7 \times (8 - 2)^2$
i) $9{,}7 + 5{,}9 \times 2{,}6^2 - (5{,}7 + 9{,}6)$

Exercice 12. Calcule les expressions suivantes en détaillant les calculs.

a) $10 \times 9 - 8 \times 7 + 6 \times 5 - 4 \times 3 + 2 \times 1$

b) $10 \times ((9-8) \times 7) + 6 \times (5-4) \times (3+2) \times 1$

c) $10 \times ((9-8) \times 7 + 6) \times (5-4) \times 3 + 2 \times 1$

d) $(10 \times (9-8) \times 7 + 6) \times (5-4) \times 3 + 2 \times 1$

e) $10 \times 9 - (8 \times 7 + 6 \times 5 - 4 \times 3) + 2 \times 1$

f) $10 \times 9 - (8 \times 7 + 6 \times 5 - (4 \times (3 + 2 \times 1)))$

g) $10 \times 9 - (8 \times 7 + 6 \times (5-4) \times (3+2) \times 1)$

h) $(10 \times (9-8)) \times 7 + 6 \times 5 - (4 \times (3 + 2 \times 1))$

Exercice 13. Calcule les expressions suivantes en détaillant les calculs.

a) $10 \times 9 - 8 + 7 + 6 \times 5 : 4 \times 3 - 2 - 1$

b) $10 \times 9 - (8+7) + 6 \times (5 : 4 \times 3 - 2) - 1$

c) $10 \times (9-8) + (7+6) \times 5 : 4 \times 3 - (2-1)$

d) $10 \times (9 - 8 + (7+6) \times 5) : (4 \times 3 - 2) - 1$

e) $10 \times (9 - 8 + (7+6) \times 5) : (4 \times (3-2) - 1)$

f) $10 \times (9 - 8 + (7 + 6 \times 5) : 4) \times (3-2) - 1$

g) $10 \times (9 - 8 + (7 + 6 \times 5) : 4) \times 3 - (2-1)$

h) $10 \times ((9 - 8 + (7 + 6 \times 5) : 4) \times 3 - 2) - 1$

i) $(10 \times 9 - (8+7) + 6) \times 5 : (4 \times 3) - 2 - 1$

j) $(10 \times 9 - (8+7) + 6 \times 5) : (4 \times 3) - 2 - 1$

k) $10 \times 9 - (8 + 7 + 6 \times 5) : (4 \times 3) - 2 - 1$

l) $10 \times 9 - ((8 + 7 + 6 \times 5) : (4 \times 3) - 2) - 1$

Exercice 14. Calcule les expressions suivantes en détaillant les calculs.

a) $10 + 9 \times 7 + 8 - 3 \times 6 : 6$

b) $2 \times 6 + (3+4)^2 - 12 : 2^2$

c) $4 \times (12-5) + 10^2 : (6+4)$

d) $10 - 4 + 12 \times (7+10) : 10$

e) $8{,}5 + (3{,}4 + 8{,}1) \times 1{,}9 - 1{,}2$

f) $8{,}1 - 1{,}5 + 5{,}1 \times (4 + 9{,}3)$

g) $9 + (13+8) : 2 \times (9-6)$

h) $2 \times (7+13) - (11 + 11^2) : 11$

i) $13 + 6^2 + 6 \times 4 : (15 - 10)$

j) $9 \times (4^2 - 6) : 6 - (12-2)$

k) $5{,}8 \times 3{,}3 + 3{,}8 - (2{,}4 + 8{,}2)$

l) $9{,}6 \times 7{,}9 + 6 - (7{,}1 + 9{,}1)$

m) $11 + 8 \times (3^3 + 9) : (12 - 8)$

n) $8^2 - (5 + 6 + 11 \times 2) : 11$

o) $(4^3 - 10) : 5 + 2^3 \times (4+6)$

Exercice 15. Calcule les expressions suivantes en détaillant les calculs.

a) $(4 \times (12+2) + 7) : (5-2)$

b) $2 \times (5{,}8 + 7{,}1 - (4 + 2{,}6))$

c) $3{,}9 \times (7{,}2 - 4{,}8) + 8{,}8 + 1{,}5$

d) $10 : 10^2 \times 2^2 + (8+9) - 9$

e) $8 \times (2^4 - 11) + 4 : (8-6)^3$

f) $(8 \times (10+7) + 8) : (11-9)$

g) $6 \times 10 : 8 + (9+13) - 2$

h) $9{,}6 \times (8{,}1 - 4{,}6) + 8 - 1{,}7$

i) $9{,}8 \times 2{,}4 + 6{,}5 + 3{,}5 - 4{,}3$

j) $6 - 5 + (9 + 13 \times 12) : 12$

k) $13 \times 12 : 4 + 2^5 - (5 + 12)$

l) $4 \times (6 : 12 + 9) + 9 - 5$

m) $11 + (12-6) : (5-2) \times 3$

n) $5{,}6 \times (2{,}2 + 5{,}5) - 2{,}9 + 4{,}8$

o) $5{,}5 + 7{,}9 \times 3{,}1 - (5{,}2 + 4{,}9)$

2. Solutions

Exercice 1.

a) La multiplication est commutative.

b) Le nombre 1 est élément neutre pour la multiplication.

c) L'addition est commutative.

d) La multiplication est associative.

e) Le nombre 0 est élément absorbant pour la multiplication.

f) L'addition est associative.

g) Le nombre 0 est élément neutre pour l'addition.

h) La multiplication est distributive sur l'addition.

Exercice 2.

a) $17{,}52 \times 3{,}1 + 17{,}52 \times 5{,}3 + 17{,}52 \times 2{,}6 = 17{,}52 \times (3{,}1 + 5{,}3 + 2{,}6) = 192{,}72$

b) $3{,}1 \times 9{,}3 + 5{,}5 \times 9{,}3 + 4{,}4 \times 9{,}3 = (3{,}1 + 5{,}5 + 4{,}4) \times 9{,}3 = 120{,}9$

c) $8{,}7 \times 5{,}9 + 8{,}7 \times 15{,}1 - 8{,}7 \times 2 = 8{,}7 \times (5{,}9 + 15{,}1 - 2) = 165{,}3$

Exercice 3. 2 727; 2 673; 1 326; 1 274

Exercice 4.

a) 1	e) 16	i) 256	m) 27	q) 16	u) 1
b) 2	f) 32	j) 512	n) 81	r) 64	v) 25
c) 4	g) 64	k) 3	o) 243	s) 256	w) 125
d) 8	h) 128	l) 9	p) 4	t) 1 024	x) 625

Exercice 5.

a) 1	e) 10 000	i) 1 331	m) 0,01	q) 1,1
b) 10	f) 1	j) 14 641	n) 0,001	r) 1,21
c) 100	g) 11	k) 1,0	o) 0,000 1	s) 1,331
d) 1 000	h) 121	l) 0,1	p) 1,0	t) 1,4641

Exercice 6.

a) 110	c) 181	e) 90	g) 675	i) 40
b) 225	d) 415	f) 125	h) 327	j) 25

Exercice 7.

a) 101	f) 177,39	k) 18,7	p) 12	u) 20
b) 21	g) 93	l) 36,97	q) 56,8	v) 33
c) 15	h) 61	m) 19	r) 66,94	w) 83,45
d) 103	i) 113	n) 2	s) 116	x) 33,86
e) 17,34	j) 17	o) 15	t) 13	

Exercice 8. a) 259 b) 39 c) 52,4

Exercice 9.

a) 92	c) 192	e) 57	g) 51	i) 13,12
b) 323	d) 75	f) 73	h) 19,02	

Exercice 10.

a) 76	c) 5	e) 53	g) 18	i) 61,2
b) 20	d) 165	f) 84	h) 12,4	

Exercice 11.

a) 525	c) 14	e) 0	g) 107	i) 34,284
b) 213	d) 18	f) 32	h) 176,8	

Exercice 12.

a) 54 b) 100 c) 392 d) 230 e) 18 f) 24 g) 4 h) 80

Exercice 13.

a) 108,5	c) 57,75	e) 220	g) 306,5	i) 30,75	k) 83,25
b) 84,5	d) 65	f) 101,5	h) 286,5	j) 5,75	l) 87,25

Exercice 14.

a) 78	d) 26,4	g) 40,5	j) 5	m) 83
b) 58	e) 29,15	h) 28	k) 12,34	n) 61
c) 38	f) 74,43	i) 53,8	l) 65,64	o) 90,8

Exercice 15.

a) 21	d) 8,4	g) 27,5	j) 14,75	m) 17
b) 12,6	e) 40,5	h) 39,9	k) 54	n) 45,02
c) 19,66	f) 72	i) 29,22	l) 42	o) 19,89

Nombres entiers naturels 2

Sommaire

1. Divisibilité dans $\mathbb{N}$

J'utilise les critères de divisibilité

On dit qu'un entier naturel n est *divisible* par un entier naturel d lorsqu'il existe un entier naturel k tel que $n = k \times d$.
Autrement dit, un entier n est divisible par un entier d lorsque le reste de la division euclidienne de n par d est nul.
On dit aussi que n est *multiple* de d, ou que d est un *diviseur* de n.

Notation. Dans cet ouvrage, on note $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de l'entier n, et $\mathcal{M}(n)$ l'ensemble de ses multiples. Par exemple,

$$\mathcal{D}(15) = \{1; 3; 5; 15\} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(15) = \{0; 15; 30; 45; 60; 75; \ldots\}$$

Critères de divisibilité.

d	Un entier naturel est divisible par d si...
2	Le chiffre des unités est soit 0, soit pair (2, 4, 6 ou 8).
3	La somme de ses chiffres est divisible par 3.
4	Les deux derniers chiffres forment un multiple de 4.
5	Le chiffre des unités est soit 0, soit 5.
6	L'entier est divisible par 2 et par 3.
8	Les trois derniers chiffres forment un multiple de 8.
9	La somme de ses chiffres est divisible par 9.
10	Le dernier chiffre est 0.
25	Les deux derniers chiffres sont 00, 25, 50 ou 75.
50	Les deux derniers chiffres sont 00, 50.
100	Les deux derniers chiffres sont 00.

Une propriété. Si un entier divise deux entiers, alors il divise aussi leur somme et leur différence. Par exemple, 13 divise 52 et 130, donc 13 divise 182 et 78.

Exercice 1. Complète le tableau en mettant une coche dans les bonnes cases :

496	732	800	1095	1270	1429	1431	1515	1594	... est divisible par
									2
									3
									4
									5
									6
									8
									9
									10

Exercice 2. *Vrai ou faux ?*

a) Est-ce qu'un nombre divisible par 2 et 3 est divisible par 6 ?

b) Est-ce qu'un nombre divisible par 3 et 9 est divisible par 27 ?

c) Est-ce qu'un nombre divisible par 6 et 7 est divisible par 21 ?

d) Est-ce qu'un nombre divisible par 5 et 10 est divisible par 50 ?

e) Par quels autres nombres est divisible un nombre divisible par 24 ?

f) Par quels autres nombres est divisible un nombre divisible par 25 ?

Exercice 3.
Par quel chiffre doit-on remplacer x dans les nombres suivants pour que ceux-ci remplissent les conditions indiquées ?

a) $37x2$ est divisible par 4.

b) $65x8$ est divisible par 8.

c) $9x63$ est divisible par 9.

d) $92x5$ est divisible par 11.

e) $41x7x$ est divisible par 3.

f) $7x4$ est divisible par 3 et 4.

J'établis la liste des diviseurs d'un entier naturel

Exemple.
On souhaite déterminer l'ensemble des diviseurs de 45.
➠ On trace une ligne horizontale. On teste la divisibilité par 1, puis 2, puis 3, etc. Chaque fois qu'un entier divise le nombre 45, on note cet entier au-dessus de la ligne, et le quotient de 45 par cet entier au-dessous de la ligne.
Et ainsi de suite : on teste la divisibilité de 45 par n tant que $n \times n$ ne dépasse pas 45 : sachant que $7 \times 7 > 45$, on teste ici la divisibilité par les six premiers entiers non nuls pour trouver tous les diviseurs de 45.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ \hline 45 & 15 & 9 \end{array}$$

Ainsi $\mathcal{D}(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$

Exercice 4. Détermine l'ensemble des diviseurs des nombres suivants.

a) 36	d) 84	g) 144	j) 192	m) 224	p) 252	s) 270
b) 48	e) 90	h) 168	k) 210	n) 225	q) 256	t) 280
c) 80	f) 112	i) 180	l) 216	o) 240	r) 264	u) 288

J'établis le début de la liste des multiples d'un entier naturel

Exercice 5. Donne les 11 premiers multiples des nombres suivants.

11; 12; 17; 21; 23; 24; 31; 32; 45; 58.

2. Nombres premiers

Je détermine si un entier naturel est un nombre premier

➩ On dit qu'un entier naturel est un *nombre premier* lorsqu'il est différent de 1, et qu'il n'est divisible que par lui-même et par l'unité. *

Exemples.

- L'entier 17 est un nombre premier, car ses seuls diviseurs sont 1 et 17.
- L'entier 18 n'est pas un nombre premier, car il est divisible notamment par 1, 2 et 18.

Méthode. Pour reconnaître si un nombre est premier on le divise par les nombres premiers successifs inférieurs à ce nombre en commençant par les plus petits. Si aucune division ne se fait exactement, le nombre est premier.

Remarque. Pour reconnaître si un entier n est premier, il suffit de chercher à le diviser par les nombres premiers dont le carré ne dépasse pas n. Par exemple, pour savoir si 97 est un nombre premier, il suffit de tester sa divisibilité par les nombres premiers inférieurs à 10, puisque 10×10 dépasse 97.

Exercice 6. Établis la liste des nombres premiers inférieurs à 30.

Exercice 7. Reconnais si les entiers naturels suivants sont premiers.

a) 79	d) 97	g) 167	j) 173	m) 193
b) 83	e) 107	h) 179	k) 181	n) 221
c) 89	f) 149	i) 143	l) 187	o) 241

Exercice 8. La conjecture de Goldbach est une affirmation mathématique formulée en 1742 dont on pense qu'elle est vraie, mais que personne n'a réussi à prouver jusqu'à ce jour. Elle s'énonce ainsi : « Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. »
Peux-tu vérifier qu'elle est vraie au moins pour les entiers pairs inférieurs à 50 ?

Crible d'Ératosthène

Le crible d'Ératosthène est un moyen pratique d'obtenir la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un certain entier fixé à l'avance, par exemple : 50.

- On écrit d'abord la liste de tous les entiers de 1 à 50.
- On barre 1 qui, d'après la définition, n'est pas un nombre premier.
- On barre ensuite tous les multiples de 2, à l'exception de 2 lui-même (en

* Par convention, le nombre 1 n'est pas un nombre premier : sinon, on perdrait l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.

effet, les multiples stricts de 2 ne peuvent pas être des nombres premiers).
- On barre ensuite tous les multiples de 3, à l'exception de 3 lui-même.
- Il n'y a pas à barrer explicitement les multiples de 4 car ils ont déjà été barrés (comme étant des multiples de 2).
- On barre ensuite les multiples de 5, puis les multiples de 7 (les multiples de 6 le sont déjà comme multiples de 2).
- Les multiples de 8 sont déjà barrés (comme étant des multiples de 2). On peut s'arrêter là car si un nombre n était un multiple d'un entier a supérieur à 8, il s'écrirait $n = a \times b$ avec b entier inférieur à 8 (car $n \leqslant 50 < 8^2$) et il aurait donc déjà été barré comme multiple de b.

Les nombres restant à la fin sont des nombres premiers.

$\cancel{1}$	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	29	$\cancel{30}$
31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$
41	$\cancel{42}$	43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$	$\cancel{50}$

Exercice 9. Utilise le crible pour déterminer les nombres premiers inférieurs à 200.

Je décompose un entier en produit de facteurs premiers

➯ Tout nombre entier non premier, autre que 1, peut se décomposer en un produit de facteurs premiers. De plus, la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers est unique (à l'ordre près des facteurs).

Méthode. Pour décomposer un naturel en produit facteurs premiers, on essaie de le diviser autant de fois qu'on le peut par les nombres premiers successifs en commençant par les plus petits.

- On dispose les quotients successifs à gauche d'un trait vertical et les diviseurs successifs à droite, comme dans l'exemple ci-contre.

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Dans cet exemple, on trouve au final : $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$
- Tout procédé plus rapide peut également être utilisé :

$$315 = 5 \times 63 = 5 \times 7 \times 9 = 5 \times 7 \times 3 \times 3$$

Exercice 10. Décompose tous les entiers naturels inférieurs à 121 en produit de facteurs premiers.

Exercice 11. Décompose les entiers suivants en produit de facteurs premiers.

a) 144	c) 221	e) 294	g) 1 053	i) 2 550
b) 176	d) 250	f) 864	h) 2 520	j) 7 920

3. PGCD et PPCM

Je calcule le PPCM de deux nombres

On appelle *multiple commun* à deux ou plusieurs entiers naturels tout nombre multiple de chacun d'eux.

Exemple. Les multiples communs à 12 et 15 sont : 0 ; 60 ; 120 ;...

En effet, $\begin{cases} \mathcal{M}(12) = \{\mathbf{0}; 12; 24; 36; 48; \mathbf{60}; 72; 84; 96; 108; \mathbf{120}; 132; ...\} \\ \mathcal{M}(15) = \{\mathbf{0}; 15; 30; 45; \mathbf{60}; 75; 90; 105; \mathbf{120}; 135; 150; ...\} \end{cases}$

➯ Le plus petit des multiples communs (non nuls) à plusieurs nombres s'appelle leur *plus petit commun multiple* (en abrégé ppcm).

Exemple. ppcm$(12; 15) = 60$

Intérêt du ppcm : Tout multiple commun à plusieurs nombres est nécessairement multiple de leur ppcm : $\mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b) = \mathcal{M}(\text{ppcm}(a; b))$

Méthode de calcul du ppcm.

- Si b est multiple de a, alors ppcm$(a; b) = b$ (exemple : ppcm$(9; 63) = 63$).
- Si a et b ne sont pas trop grands, on détermine $\mathcal{M}(a)$ et $\mathcal{M}(b)$ et on prend le multiple commun non nul le plus petit (voir l'exemple ci-dessus).
- Sinon, on décompose les naturels a et b en produit de facteurs premiers et on calcule le produit des facteurs premiers affectés du plus *grand* exposant.

Exemple. Soit à calculer le ppcm de 126 et 420.

➠ $\left.\begin{array}{l} 126 = 2 \times 3^2 \times 7 \\ 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \end{array}\right\}$ donc ppcm$(126; 420) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$

Exercice 12. Calcule le ppcm dans les cas suivants.

a) ppcm (12 ; 24) d) ppcm (12 ; 16) g) ppcm (15 ; 18) j) ppcm (45 ; 46)

b) ppcm (12 ; 18) e) ppcm (16 ; 24) h) ppcm (17 ; 68) k) ppcm (42 ; 63)

c) ppcm (18 ; 24) f) ppcm (10 ; 15) i) ppcm (60 ; 70) l) ppcm (60 ; 80)

Exercice 13. Calcule le ppcm dans les cas suivants.

a) ppcm (36 ; 50) c) ppcm (16 ; 36) e) ppcm (12 ; 18 ; 24)

b) ppcm (25 ; 72) d) ppcm (105 ; 175) f) ppcm (10 ; 12 ; 15)

Exercice 14. Dans une ville, deux autobus, les lignes A et B, suivent des parcours différents en forme de boucles, à partir de la gare routière. L'autobus A effectue son parcours en 12 min. L'autobus B effectue son parcours en 15 min. Dans combien de temps les deux bus se retrouveront-ils ensemble devant la gare :

a) s'ils sont partis en même temps de la gare ?

b) si l'autobus A est parti de la gare depuis 4 min et l'autobus B depuis 1 min ?

Je calcule le PGCD de deux nombres

On appelle *diviseur commun* à deux ou plusieurs entiers naturels tout nombre qui divise chacun d'eux.

Exemple. Les diviseurs communs à 12 et 15 sont : 1 et 3.

En effet, $\begin{cases} \mathcal{D}(12) = \{\mathbf{1}; 2; \mathbf{3}; 4; 6; 12\} \\ \mathcal{D}(15) = \{\mathbf{1}; \mathbf{3}; 5; 15\} \end{cases}$

➩ Le plus grand des diviseurs communs à plusieurs nombres s'appelle leur *plus grand diviseur commun* (en abrégé pgcd).

Exemple. pgcd$(12; 15) = 3$

Intérêt du pgcd : Tout diviseur commun à plusieurs nombres est nécessairement diviseur de leur pgcd : $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(\text{pgcd}(a; b))$

Méthode de calcul du pgcd.

- Si b est multiple de a, alors pgcd$(a; b) = a$ (exemple : pgcd$(9; 63) = 9$).
- Si a et b ne sont pas trop grands, on détermine $\mathcal{D}(a)$ et $\mathcal{D}(b)$ et on prend le diviseur commun le plus grand (voir l'exemple ci-dessus).
- Sinon, on décompose les naturels a et b en produit de facteurs premiers et on calcule le produit des facteurs premiers affectés du plus *petit* exposant.

Exemple. Soit à calculer le pgcd de 126 et 420.

➠ $\left.\begin{array}{l} 126 = 2 \times 3^2 \times 7 \\ 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \end{array}\right\}$ donc pgcd$(126; 420) = 2 \times 3 \times 7 = 42$

Exercice 15. Calcule le pgcd dans les cas suivants. Dans chacun des cas, compare le produit des deux entiers avec le produit de leur pgcd et ppcm.

a) pgcd (12 ; 24)	d) pgcd (12 ; 16)	g) pgcd (15 ; 18)	j) pgcd (45 ; 46)
b) pgcd (12 ; 18)	e) pgcd (16 ; 24)	h) pgcd (17 ; 68)	k) pgcd (42 ; 63)
c) pgcd (18 ; 24)	f) pgcd (10 ; 15)	i) pgcd (60 ; 70)	l) pgcd (60 ; 80)

Exercice 16. Calcule le pgcd dans les cas suivants.

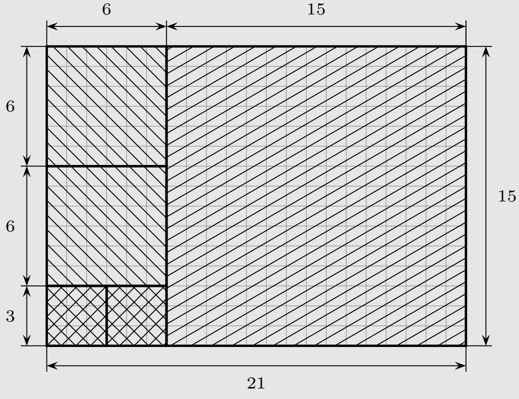
a) pgcd (21 ; 100)	c) pgcd (2014 ; 2015)	e) pgcd (12 ; 16 ; 24)
b) pgcd (126 ; 132)	d) pgcd (512 ; 1024)	f) pgcd (12 ; 28 ; 36)

Exercice 17. Le pgcd de deux entiers consécutifs vaut toujours 1. Pourquoi ?

Exercice 18. Un menuisier doit construire un escalier composé de deux parties, l'une de 2,52 m de hauteur, l'autre de 3,24 m de hauteur. Il souhaite évidemment construire des marches de même hauteur, comprise entre 15 cm et 20 cm. Détermine la hauteur exacte de chaque marche et le nombre total de marches.

Je calcule un PGCD à l'aide de carrelages : l'algorithme d'Euclide

Si on considère un rectangle de longueur $a = 21$ et de largeur $b = 15$, alors le pgcd de a et b n'est autre que la longueur du côté du plus grand carré permettant de carreler entièrement ce rectangle.



Dans ce rectangle, on peut glisser un carré de côté 15 mais il reste un rectangle de longueur 15 et de largeur 6, dans lequel on peut glisser deux carrés de côté 6 ; il reste alors un rectangle de longueur 6 et de largeur 3 que l'on peut carreler entièrement de carrés de côté 3. Les carrés de côté 6 ou 15 peuvent aussi se carreler en carrés de côté 3.

Le rectangle de départ peut ainsi se carreler en carrés de côté 3. De plus, il n'existe pas de carré plus grand permettant un tel carrelage.
Le raisonnement que l'on vient de faire peut se résumer par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\text{pgcd}(21;15) &= \text{pgcd}(21-15;15) \\
&= \text{pgcd}(6;15) \\
&= \text{pgcd}(6;15-2\times 6) \\
&= \text{pgcd}(6;3) \\
&= 3
\end{aligned}$$

Exercice 19. Justifie la propriété :

« Pour tous entiers a et b tels que $a \geqslant b$, on a $\quad \text{pgcd}(a;b) = \text{pgcd}(a-b;b)$ »

Exercice 20. En t'aidant d'un croquis illustrant la méthode des carrelages, calcule les pgcd suivants :

a) $\text{pgcd}(24;18)$ c) $\text{pgcd}(70;60)$ e) $\text{pgcd}(32;21)$

b) $\text{pgcd}(68;17)$ d) $\text{pgcd}(46;45)$ f) $\text{pgcd}(180;144)$

4. Solutions

Exercice 1.

496	732	800	1095	1270	1429	1431	1515	1594	... est divisible par
✔	✔	✔		✔				✔	2
	✔		✔			✔	✔		3
✔	✔	✔							4
		✔	✔	✔			✔		5
	✔								6
✔		✔							8
						✔			9
		✔		✔					10

Exercice 2.

a) Un nombre divisible par 2 et 3 est aussi divisible par 6.

b) Le nombre 18 est divisible par 3 et 9 mais pas par 27.

c) Un nombre divisible par 6 et 7 est aussi divisible par 21.

d) Le nombre 20 est divisible par 5 et 10 mais pas par 50.

e) Un nombre divisible par 24 se divise aussi par 1, 2, 3, 4, 6, 8 et 12.

f) Un nombre divisible par 25 se divise aussi par 1 et 5.

Exercice 3.

a) $x = 1$ ou 3 ou 5 ou 7 ou 9

b) $x = 2$ ou 6

c) $x = 0$ ou 9

d) $x = 9$

e) $x = 0$ ou 3 ou 6 ou 9

f) $x = 4$

Exercice 4.

a) $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 36 & 18 & 12 & 9 & 6 \end{array}$

b) $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 48 & 24 & 16 & 12 & 8 \end{array}$

c) $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ \hline 80 & 40 & 20 & 16 & 10 \end{array}$

d) $\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ \hline 84 & 42 & 28 & 21 & 14 & 12 \end{array}$

e) $\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 9 \\ \hline 90 & 45 & 30 & 18 & 15 & 10 \end{array}$

f) $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 112 & 56 & 28 & 16 & 14 \end{array}$

g) $\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 12 \\ \hline 144 & 72 & 48 & 36 & 24 & 18 & 16 & 12 \end{array}$

h) $\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 12 \\ \hline 168 & 84 & 56 & 42 & 28 & 24 & 21 & 14 \end{array}$

i) $\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 10 & 12 \\ \hline 180 & 90 & 60 & 45 & 36 & 30 & 20 & 18 & 15 \end{array}$

j) $\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 12 \\ \hline 192 & 96 & 64 & 48 & 32 & 24 & 16 \end{array}$

k) $\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 10 & 14 \\ \hline 210 & 105 & 70 & 42 & 35 & 30 & 21 & 15 \end{array}$

l) $\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 12 \\ \hline 216 & 108 & 72 & 54 & 36 & 27 & 24 & 18 \end{array}$

m) $\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 14 \\ \hline 224 & 112 & 56 & 32 & 28 & 16 \end{array}$

n) $\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 9 & 15 \\ \hline 225 & 75 & 45 & 25 & 15 \end{array}$

o) $\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 12 & 15 \\ \hline 240 & 120 & 80 & 60 & 48 & 40 & 30 & 24 & 20 & 16 \end{array}$

p) $\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 12 & 14 \\ \hline 252 & 126 & 84 & 63 & 42 & 36 & 28 & 21 & 18 \end{array}$

q) $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline 256 & 128 & 64 & 32 & 16 \end{array}$

r) $\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 11 & 12 \\ \hline 264 & 132 & 88 & 66 & 44 & 33 & 24 & 22 \end{array}$

s) $\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 9 & 10 & 15 \\ \hline 270 & 135 & 90 & 54 & 45 & 30 & 27 & 18 \end{array}$

t) $\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 14 \\ \hline 280 & 140 & 70 & 56 & 40 & 35 & 28 & 20 \end{array}$

u) $\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 12 & 16 \\ \hline 288 & 144 & 96 & 72 & 48 & 36 & 32 & 24 & 18 \end{array}$

Exercice 5.

- $\mathcal{M}(11) = \{0;\ 11;\ 22;\ 33;\ 44;\ 55;\ 66;\ 77;\ 88;\ 99;\ 110;\ldots\}$
- $\mathcal{M}(12) = \{0;\ 12;\ 24;\ 36;\ 48;\ 60;\ 72;\ 84;\ 96;\ 108;\ 120;\ldots\}$
- $\mathcal{M}(17) = \{0;\ 17;\ 34;\ 51;\ 68;\ 85;\ 102;\ 119;\ 136;\ 153;\ 170;\ldots\}$
- $\mathcal{M}(21) = \{0;\ 21;\ 42;\ 63;\ 84;\ 105;\ 126;\ 147;\ 168;\ 189;\ 210;\ldots\}$
- $\mathcal{M}(23) = \{0;\ 23;\ 46;\ 69;\ 92;\ 115;\ 138;\ 161;\ 184;\ 207;\ 230;\ldots\}$
- $\mathcal{M}(24) = \{0;\ 24;\ 48;\ 72;\ 96;\ 120;\ 144;\ 168;\ 192;\ 216;\ 240;\ldots\}$
- $\mathcal{M}(31) = \{0;\ 31;\ 62;\ 93;\ 124;\ 155;\ 186;\ 217;\ 248;\ 279;\ 310;\ldots\}$
- $\mathcal{M}(32) = \{0;\ 32;\ 64;\ 96;\ 128;\ 160;\ 192;\ 224;\ 256;\ 288;\ 320;\ldots\}$
- $\mathcal{M}(45) = \{0;\ 45;\ 90;\ 135;\ 180;\ 225;\ 270;\ 315;\ 360;\ 405;\ 450;\ldots\}$
- $\mathcal{M}(58) = \{0;\ 58;\ 116;\ 174;\ 232;\ 290;\ 348;\ 406;\ 464;\ 522;\ 580;\ldots\}$

Exercice 6.

- Le plus petit nombre premier est le nombre 2. Tout multiple de 2, autre que 2, n'est pas premier car il est divisible par 1, 2 et lui-même. Donc le seul entier pair qui soit premier est l'entier 2. Dans la suite de l'exercice, on n'a donc pas besoin de tester les nombres pairs.
- L'entier 3 est un nombre premier, car il n'est pas divisible par 2. De plus, tout multiple de 3, autre que 3, n'est pas premier.
- L'entier 5 est un nombre premier, car il n'est divisible ni par 2, ni par 3. De plus, tout multiple de 5, autre que 5, n'est pas premier.
- L'entier 7 est un nombre premier, car il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. De plus, tout multiple de 7, autre que 7, n'est pas premier.
- Poursuivons avec le prochain entier qui n'est multiple ni de 2, ni de 3, ni de 5, ni de 7 : il s'agit de 11 qui est donc un nombre premier.
- Poursuivons avec le prochain entier qui n'est multiple ni de 2, ni de 3, ni de 5, ni de 7, ni de 11 : il s'agit de 13 qui est donc un nombre premier.
- Et ainsi de suite.

Au final, voici la liste des nombres premiers qui ne dépassent pas 50 :

$$2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 5\ ;\ \ 7\ ;\ \ 11\ ;\ \ 13\ ;\ \ 17\ ;\ \ 19\ ;\ \ 23\ ;\ \ 29\ ;\ \ 31\ ;\ \ 37\ ;\ \ 41\ ;\ \ 43\ ;\ \ 47$$

Exercice 7.

a) 79 est premier.
b) 83 est premier.
c) 89 est premier.
d) 97 est premier.
e) 107 est premier.
f) 149 est premier.
g) 167 est premier.
h) 179 est premier.
i) $143 = 11 \times 13$
j) 173 est premier.
k) 181 est premier.
l) $187 = 11 \times 17$
m) 193 est premier.
n) $221 = 13 \times 17$
o) 241 est premier.

Exercice 8.

- $4 = 2 + 2$
- $6 = 3 + 3$
- $8 = 3 + 5$
- $10 = 3 + 7 = 5 + 5$
- $12 = 5 + 7$
- $14 = 3 + 11 = 7 + 7$
- $16 = 3 + 13 = 5 + 11$
- $18 = 5 + 13 = 7 + 11$
- $20 = 3 + 17 = 7 + 13$
- $22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11$
- $24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$
- $26 = 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13$
- $28 = 5 + 23 = 11 + 17$
- $30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$
- $32 = 3 + 29 = 13 + 19$
- $34 = 3 + 31 = 5 + 29 = 11 + 23 = 17 + 17$
- $36 = 5 + 31 = 7 + 29 = 13 + 23 = 17 + 19$
- $38 = 7 + 31 = 19 + 19$
- $40 = 3 + 37 = 11 + 29 = 17 + 23$
- $42 = 5 + 37 = 11 + 31 = 13 + 29 = 19 + 23$
- $44 = 3 + 41 = 7 + 37 = 13 + 31$
- $46 = 3 + 43 = 5 + 41 = 17 + 29 = 23 + 23$
- $48 = 5 + 43 = 7 + 41 = 11 + 37 = 17 + 31 = 19 + 29$
- $50 = 3 + 47 = 7 + 43 = 13 + 37 = 19 + 31$

Exercice 9. On barre les multiples de 2, 3, 5, 7, 11 et 13. En effet, le carré du prochain nombre premier 17 dépasse 200 ($15 \times 15 = 225$). La liste cherchée est donc : 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97; 101; 103; 107; 109; 113; 127; 131; 137; 139; 149; 151; 157; 163; 167; 173; 179; 181; 191; 193; 197; 199. On trouve 46 nombres premiers inférieurs à 200.

SOLUTIONS

Exercice 10.

- 2 est premier.
- 3 est premier.
- $4 = 2^2$
- 5 est premier.
- $6 = 2 \times 3$
- 7 est premier.
- $8 = 2^3$
- $9 = 3^2$
- $10 = 2 \times 5$
- 11 est premier.
- $12 = 2^2 \times 3$
- 13 est premier.
- $14 = 2 \times 7$
- $15 = 3 \times 5$
- $16 = 2^4$
- 17 est premier.
- $18 = 2 \times 3^2$
- 19 est premier.
- $20 = 2^2 \times 5$
- $21 = 3 \times 7$
- $22 = 2 \times 11$
- 23 est premier.
- $24 = 2^3 \times 3$
- $25 = 5^2$
- $26 = 2 \times 13$
- $27 = 3^3$
- $28 = 2^2 \times 7$
- 29 est premier.
- $30 = 2 \times 3 \times 5$
- 31 est premier.

- $32 = 2^5$
- $33 = 3 \times 11$
- $34 = 2 \times 17$
- $35 = 5 \times 7$
- $36 = 2^2 \times 3^2$
- 37 est premier.
- $38 = 2 \times 19$
- $39 = 3 \times 13$
- $40 = 2^3 \times 5$
- 41 est premier.
- $42 = 2 \times 3 \times 7$
- 43 est premier.
- $44 = 2^2 \times 11$
- $45 = 3^2 \times 5$
- $46 = 2 \times 23$
- 47 est premier.
- $48 = 2^4 \times 3$
- $49 = 7^2$
- $50 = 2 \times 5^2$
- $51 = 3 \times 17$
- $52 = 2^2 \times 13$
- 53 est premier.
- $54 = 2 \times 3^3$
- $55 = 5 \times 11$
- $56 = 2^3 \times 7$
- $57 = 3 \times 19$
- $58 = 2 \times 29$
- 59 est premier.
- $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
- 61 est premier.
- $62 = 2 \times 31$
- $63 = 3^2 \times 7$
- $64 = 2^6$
- $65 = 5 \times 13$
- $66 = 2 \times 3 \times 11$
- 67 est premier.
- $68 = 2^2 \times 17$
- $69 = 3 \times 23$
- $70 = 2 \times 5 \times 7$
- 71 est premier.
- $72 = 2^3 \times 3^2$
- 73 est premier.
- $74 = 2 \times 37$
- $75 = 3 \times 5^2$
- $76 = 2^2 \times 19$
- $77 = 7 \times 11$
- $78 = 2 \times 3 \times 13$
- 79 est premier.
- $80 = 2^4 \times 5$
- $81 = 3^4$
- $82 = 2 \times 41$
- 83 est premier.
- $84 = 2^2 \times 3 \times 7$
- $85 = 5 \times 17$
- $86 = 2 \times 43$
- $87 = 3 \times 29$
- $88 = 2^3 \times 11$
- 89 est premier.
- $90 = 2 \times 3^2 \times 5$
- $91 = 7 \times 13$
- $92 = 2^2 \times 23$
- $93 = 3 \times 31$
- $94 = 2 \times 47$
- $95 = 5 \times 19$
- $96 = 2^5 \times 3$
- 97 est premier.
- $98 = 2 \times 7^2$
- $99 = 3^2 \times 11$
- $100 = 2^2 \times 5^2$
- 101 est premier.
- $102 = 2 \times 3 \times 17$
- 103 est premier.
- $104 = 2^3 \times 13$
- $105 = 3 \times 5 \times 7$
- $106 = 2 \times 53$
- 107 est premier.
- $108 = 2^2 \times 3^3$
- 109 est premier.
- $110 = 2 \times 5 \times 11$
- $111 = 3 \times 37$
- $112 = 2^4 \times 7$
- 113 est premier.
- $114 = 2 \times 3 \times 19$
- $115 = 5 \times 23$
- $116 = 2^2 \times 29$
- $117 = 3^2 \times 13$
- $118 = 2 \times 59$
- $119 = 7 \times 17$
- $120 = 2^3 \times 3 \times 5$
- $121 = 11^2$

Exercice 11.

a) $2^4 \times 3^2$
b) $2^4 \times 11$
c) 13×17
d) 2×5^3
e) $2 \times 3 \times 7^2$
f) $2^5 \times 3^3$
g) $3^4 \times 13$
h) $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$
i) $2 \times 3 \times 5^2 \times 17$
j) $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11$

Exercice 12.

a) $\text{ppcm}\,(2^2 \times 3\ ;\ 2^3 \times 3) = 24$
b) $\text{ppcm}\,(2^2 \times 3\ ;\ 2 \times 3^2) = 36$
c) $\text{ppcm}\,(2 \times 3^2\ ;\ 2^3 \times 3) = 72$
d) $\text{ppcm}\,(2^2 \times 3\ ;\ 2^4) = 48$
e) $\text{ppcm}\,(2^4\ ;\ 2^3 \times 3) = 48$
f) $\text{ppcm}\,(2 \times 5\ ;\ 3 \times 5) = 30$
g) $\text{ppcm}\,(3 \times 5\ ;\ 2 \times 3^2) = 90$
h) $\text{ppcm}\,(17\ ;\ 2^2 \times 17) = 68$
i) $\text{ppcm}\,(2^2 \times 3 \times 5\ ;\ 2 \times 5 \times 7) = 420$
j) $\text{ppcm}\,(3^2 \times 5\ ;\ 2 \times 23) = 2070$
k) $\text{ppcm}\,(2 \times 3 \times 7\ ;\ 3^2 \times 7) = 126$
l) $\text{ppcm}\,(2^2 \times 3 \times 5\ ;\ 2^4 \times 5) = 240$

Exercice 13.

a) $\text{ppcm}\,(2^2 \times 3^2\ ;\ 2 \times 5^2) = 900$

b) $\text{ppcm}\,(5^2\ ;\ 2^3 \times 3^2) = 1800$

c) $\text{ppcm}\,(2^4\ ;\ 2^2 \times 3^2) = 144$

d) $\text{ppcm}\,(3 \times 5 \times 7\ ;\ 5^2 \times 7) = 525$

e) $\text{ppcm}\,(2^2 \times 3\ ;\ 2 \times 3^2\ ;\ 2^3 \times 3) = 72$

f) $\text{ppcm}\,(2 \times 5\ ;\ 2^2 \times 3\ ;\ 3 \times 5) = 60$

Exercice 14.

a) Dans $\text{ppcm}(12; 15) = 60$ minutes.

b) Dans 44 minutes, car $4 \times 12 - 4 = 3 \times 15 - 1$.

Exercice 15.

a) $\text{pgcd}\,(2^2 \times 3\ ;\ 2^3 \times 3) = 12$

b) $\text{pgcd}\,(2^2 \times 3\ ;\ 2 \times 3^2) = 6$

c) $\text{pgcd}\,(2 \times 3^2\ ;\ 2^3 \times 3) = 6$

d) $\text{pgcd}\,(2^2 \times 3\ ;\ 2^4) = 4$

e) $\text{pgcd}\,(2^4\ ;\ 2^3 \times 3) = 8$

f) $\text{pgcd}\,(2 \times 5\ ;\ 3 \times 5) = 5$

g) $\text{pgcd}\,(3 \times 5\ ;\ 2 \times 3^2) = 3$

h) $\text{pgcd}\,(17\ ;\ 2^2 \times 17) = 17$

i) $\text{pgcd}\,(2^2 \times 3 \times 5\ ;\ 2 \times 5 \times 7) = 10$

j) $\text{pgcd}\,(3^2 \times 5\ ;\ 2 \times 23) = 1$

k) $\text{pgcd}\,(2 \times 3 \times 7\ ;\ 3^2 \times 7) = 21$

l) $\text{pgcd}\,(2^2 \times 3 \times 5\ ;\ 2^4 \times 5) = 20$

On remarque que $\boxed{a \times b = \text{pgcd}(a; b) \times \text{ppcm}(a; b)}$

Exercice 16.

a) $\text{pgcd}\,(3 \times 7\ ;\ 2^2 \times 5^2) = 1$

b) $\text{pgcd}\,(2 \times 3^2 \times 7\ ;\ 2^2 \times 3 \times 11) = 6$

c) $\text{pgcd}\,(2 \times 19 \times 53; 5 \times 13 \times 31) = 1$, ou mieux : deux entiers consécutifs ont un seul diviseur commun : 1 !

d) $\text{pgcd}\,(2^9\ ;\ 2^{10}) = 512$

e) $\text{pgcd}\,(2^2 \times 3\ ;\ 2^4\ ;\ 2^3 \times 3) = 4$

f) $\text{pgcd}\,(2^2 \times 3\ ;\ 2^2 \times 7\ ;\ 2^2 \times 3^2) = 4$

Exercice 17. Étant donné deux entiers consécutifs, un diviseur commun divise leur différence qui vaut 1. Or le seul diviseur de 1 est lui-même. Donc deux entiers consécutifs ont un seul diviseur commun, à savoir l'unité.

Exercice 18. Le pgcd de 252 et 324 est 36. Tout diviseur commun de 252 et 324 est donc diviseur de 36. Parmi les diviseurs de 36, le seul qui soit compris entre 15 et 20 est le nombre 18.
Les marches devront avoir 18 cm de haut et il y en aura 32.

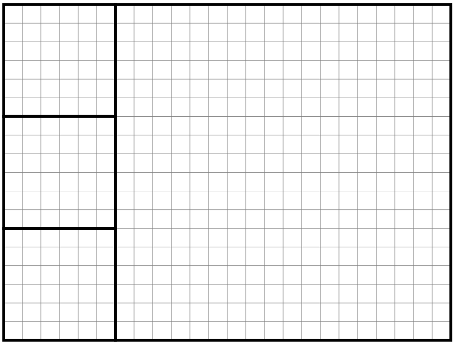
Exercice 19.

- Soit d un diviseur commun à a et b. Alors d divise leur différence $a - b$. Donc d est un diviseur commun à $a - b$ et b.
- Réciproquement, soit d un diviseur commun à $a - b$ et b. Alors d divise leur somme $(a - b) + b = a$. Donc d est un diviseur commun à a et b.

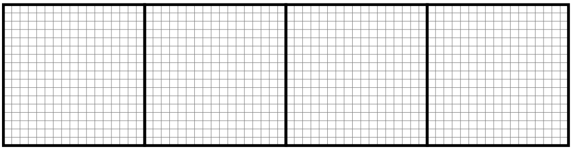
Ainsi l'ensemble des diviseurs communs à a et b est exactement le même que l'ensemble des diviseurs communs à $a - b$ et b. Le plus grand élément de ces deux ensembles est donc pgcd de a et b et pgcd de $a - b$ et b.

Exercice 20.

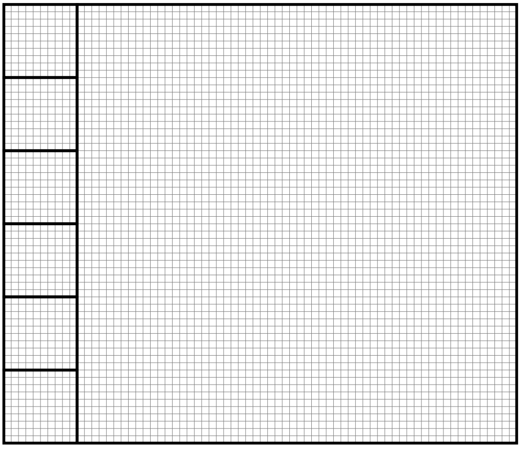
a) $\text{pgcd}(24;18) = \text{pgcd}(24-18;18) = \text{pgcd}(6;\underbrace{18}_{6\times 3}) = 6$



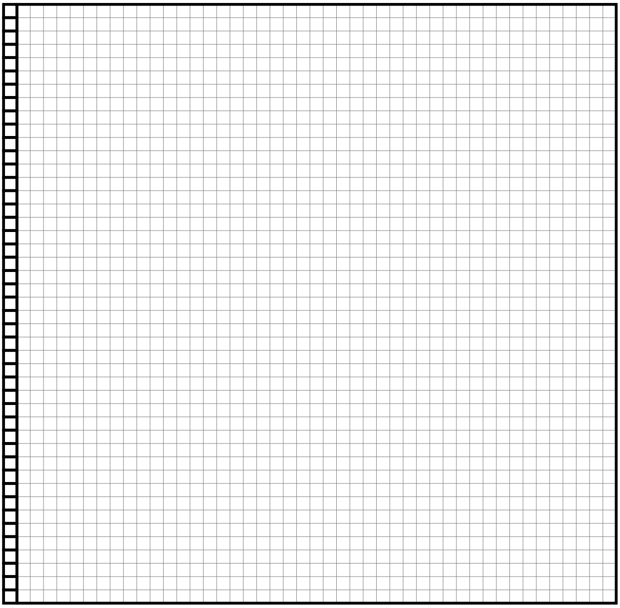
b) $\text{pgcd}(68;17) = \text{pgcd}(\underbrace{68}_{4\times 17};17) = 17$



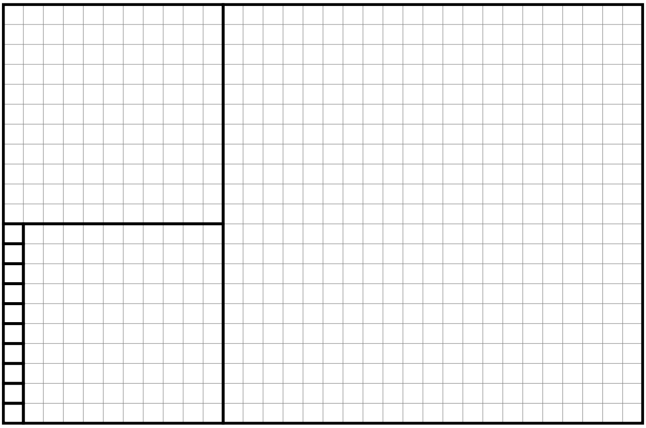
c) $\text{pgcd}(70;60) = \text{pgcd}(70-60;60) = \text{pgcd}(10;\underbrace{60}_{10\times 6}) = 10$



d) $\text{pgcd}(46;45) = \text{pgcd}(46-45;45) = \text{pgcd}(1{,}45) = 1$



e) $\mathrm{pgcd}(32;21)=\mathrm{pgcd}(11;21)=\mathrm{pgcd}(11;10)=\mathrm{pgcd}(1;10)=1$



f) $\mathrm{pgcd}(180;144)=\mathrm{pgcd}(180-144;144)=\mathrm{pgcd}(36;\underbrace{144}_{36\times 4})=36$

Nombres relatifs | 3

Sommaire

1. Généralités sur les relatifs

Je place un nombre relatif sur la droite numérique

Un nombre relatif comprend :

- un signe + ou − appelé *signe prédicatoire* ;
- un nombre appelé sa *valeur absolue*.

Exemple. $(-4{,}7)$ est un nombre relatif de signe négatif et de valeur absolue $4{,}7$.

Notation. La valeur absolue d'un nombre a se note $|a|$.
Par exemple, $|(-4{,}7)| = |(+4{,}7)| = 4{,}7$.

Les nombres relatifs peuvent être représentés sur un axe : si l'axe est orienté de gauche à droite, les nombres négatifs sont placés à gauche de l'origine 0 de l'axe et les nombres positifs à droite de l'origine. La valeur absolue peut alors s'interpréter comme étant la distance du nombre relatif à l'origine 0.

L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

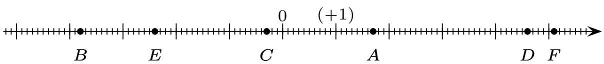
L'ensemble des nombres décimaux relatifs est noté $\mathbb{D}$.

Exercice 1.

a) Dessine une droite graduée et place les nombres relatifs suivants :

$a = (-1{,}5)$; $b = (+3{,}25)$; $c = (-0{,}5)$; $d = (-2{,}7)$; $e = (-3)$; $f = (+5{,}5)$

b) Quelle est l'abscisse des points dessinés ci-dessous ?



Je compare deux nombres relatifs

Règle.

- Un nombre positif est toujours supérieur à un nombre négatif.
- Entre deux nombres positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue.
- Entre deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue.

Exercice 2. Ordonne les nombres suivants du plus petit au plus grand.

$(-4{,}42)$;	$(-3{,}9)$;	$(-7{,}43)$;	$(+1{,}96)$;	$(+8{,}18)$;
$(+1{,}33)$;	$(-1{,}61)$;	$(+6{,}29)$;	$(+8{,}8)$;	$(+0{,}85)$.

Exercice 3. Ordonne les nombres suivants du plus petit au plus grand.

$(+55{,}81)$; $(+78{,}84)$; $(+60{,}84)$; $(-69{,}7)$; $(+71{,}44)$;
$(-54{,}9)$; $(+3{,}01)$; $(-62{,}53)$; $(-31{,}41)$; $(-52{,}07)$.

2. Addition et soustraction

J'additionne deux nombres relatifs de même signe

Règle. Pour additionner deux nombres relatifs *de même signe*,
- on additionne leur valeur absolue,
- et on donne au résultat le signe commun.

Exemples. $(+2)+(+3)=(+5)$
$(-2)+(-3)=(-5)$

Exercice 4. Calcule.

a) $(+68)+(+49)$; $(-68)+(-49)$
b) $(+11)+(+37)$; $(-11)+(-37)$
c) $(+33)+(+6)$; $(-33)+(-6)$
d) $(+16)+(+15)$; $(-16)+(-15)$
e) $(+88)+(+21)$; $(-88)+(-21)$
f) $(+73)+(+61)$; $(-73)+(-61)$

Exercice 5. Calcule.

a) $(+1{,}6)+(+5{,}5)$; $(-1{,}6)+(-5{,}5)$
b) $(-3{,}1)+(-5{,}2)$; $(+3{,}1)+(+5{,}2)$
c) $(+1{,}2)+(+2{,}9)$; $(-1{,}2)+(-2{,}9)$
d) $(-9{,}3)+(-7{,}1)$; $(+9{,}3)+(+7{,}1)$
e) $(+2{,}5)+(+7{,}6)$; $(-2{,}5)+(-7{,}6)$
f) $(-3{,}7)+(-2{,}3)$; $(+3{,}7)+(+2{,}3)$

J'additionne deux nombres relatifs de signes opposés

Règle. Pour additionner deux nombres relatifs *de signes opposés*,
- on retranche la plus petite valeur absolue à la plus grande,
- et on donne au résultat le signe du nombre relatif qui a la plus grande valeur absolue.

Attention : On donne au résultat non pas le signe du nombre relatif le plus grand (sinon le résultat serait toujours positif), mais le signe du nombre relatif qui a la plus grande valeur absolue !

Exemples. $(+2)+(-3)=(-1)$
$(-2)+(+3)=(+1)$

À retenir : C'est le « champion » des valeurs absolues qui impose son signe.

Exercice 6. Calcule.

a) $(-68)+(+49)$; $(+68)+(-49)$
b) $(-11)+(+37)$; $(+11)+(-37)$
c) $(-33)+(+6)$; $(+33)+(-6)$
d) $(-16)+(+15)$; $(+16)+(-15)$
e) $(-88)+(+21)$; $(+88)+(-21)$
f) $(-73)+(+61)$; $(+73)+(-61)$

Exercice 7. Calcule.

a) $(+1{,}6)+(-5{,}5)$; $(-1{,}6)+(+5{,}5)$
b) $(-3{,}1)+(+5{,}2)$; $(+3{,}1)+(-5{,}2)$
c) $(+1{,}2)+(-2{,}9)$; $(-1{,}2)+(+2{,}9)$
d) $(-9{,}3)+(+7{,}1)$; $(+9{,}3)+(-7{,}1)$
e) $(+2{,}5)+(-7{,}6)$; $(-2{,}5)+(+7{,}6)$
f) $(-3{,}7)+(+2{,}3)$; $(+3{,}7)+(-2{,}3)$

J'additionne deux nombres relatifs

On utilise l'une des deux règles précédentes suivant le cas.

Exercice 8. Calcule.

a) $(+90)+(+50)$
b) $(+4)+(+71)$
c) $(+4)+(+16)$
d) $(+57)+(+49)$
e) $(+53)+(+43)$
f) $(+57)+(+21)$
g) $(-90)+(-50)$
h) $(-4)+(-71)$
i) $(-4)+(-16)$
j) $(-57)+(-49)$
k) $(-53)+(-43)$
l) $(-57)+(-21)$
m) $(-90)+(+50)$
n) $(-4)+(+71)$
o) $(-4)+(+16)$
p) $(-57)+(+49)$
q) $(-53)+(+43)$
r) $(-57)+(+21)$
s) $(+90)+(-50)$
t) $(+4)+(-71)$
u) $(+4)+(-16)$
v) $(+57)+(-49)$
w) $(+53)+(-43)$
x) $(+57)+(-21)$

Exercice 9. Calcule.

a) $(-7)+(-8{,}7)$
b) $(-1{,}2)+(+4{,}8)$
c) $(+6)+(-5{,}3)$
d) $(-1{,}1)+(+0{,}5)$
e) $(+1{,}7)+(+0{,}3)$
f) $(-1{,}9)+(+0{,}6)$
g) $(+7)+(+8{,}7)$
h) $(+1{,}2)+(-4{,}8)$
i) $(-6)+(+5{,}3)$
j) $(+1{,}1)+(-0{,}5)$
k) $(-1{,}7)+(-0{,}3)$
l) $(+1{,}9)+(-0{,}6)$
m) $(+7)+(-8{,}7)$
n) $(+1{,}2)+(+4{,}8)$
o) $(-6)+(-5{,}3)$
p) $(+1{,}1)+(+0{,}5)$
q) $(-1{,}7)+(+0{,}3)$
r) $(+1{,}9)+(+0{,}6)$
s) $(-7)+(+8{,}7)$
t) $(-1{,}2)+(-4{,}8)$
u) $(+6)+(+5{,}3)$
v) $(-1{,}1)+(-0{,}5)$
w) $(+1{,}7)+(-0{,}3)$
x) $(-1{,}9)+(-0{,}6)$

J'effectue une suite d'additions de nombres relatifs

Pour effectuer une suite d'additions, il est plus simple de regrouper séparément les termes positifs et les termes négatifs et de sommer ces deux groupes de termes, puis de sommer les résultats ainsi obtenus. Au préalable, on simplifie les termes opposés * deux à deux s'il y en a.

Exemple.
$$\begin{aligned} A &= (-3) + \cancel{(+17)} + (-5) + (+6) + (-4) + \cancel{(-17)} + (+7) \\ &= (+6) + (+7) + (-3) + (-4) + (-5) \\ &= \underbrace{\underbrace{\big((+6) + (+7)\big)}_{(+13)} + \underbrace{\big((-3) + (-4) + (-5)\big)}_{(-12)}}_{(+1)} \\ &= (+13) + (-12) \\ &= (+1) \end{aligned}$$

Exercice 10. Calcule.

a) $(-44) + (+92) + (-38)$

b) $(-65) + (+76) + (-42)$

c) $(+52) + (-92) + (+50)$

d) $(-61) + (+63) + (+71)$

e) $(+30) + (-32) + (+94)$

f) $(-7{,}3) + (+8{,}8) + (-5{,}3)$

g) $(-5{,}3) + (+5{,}1) + (+4{,}1)$

h) $(+9{,}6) + (-3{,}8) + (+3{,}5)$

i) $(-5{,}5) + (-4{,}3) + (+8{,}5)$

j) $(+9{,}1) + (-3{,}3) + (-1{,}2)$

k) $(+7{,}2) + (+9{,}9) + (-3{,}8)$

l) $(-1) + (+9{,}9) + (-6{,}5)$

Exercice 11. Calcule.

a) $(+68) + (+41) + (-20) + (-8) + (-64)$

b) $(+23) + (+82) + (+62) + (-40) + (-18)$

c) $(+45) + (-15) + (-5) + (+82) + (-54)$

d) $(-11) + (+78) + (+40) + (-3) + (+56)$

e) $(+19) + (+21) + (-74) + (-72) + (-21)$

f) $(-47) + (+95) + (+35) + (-23) + (+83)$

g) $(-5) + (-93) + (+85) + (+76) + (+37)$

h) $(+6) + (+0{,}7) + (-8{,}9) + (-1{,}4) + (+5{,}4)$

i) $(-0{,}5) + (+1{,}8) + (+2{,}4) + (+5{,}1) + (-9{,}2)$

j) $(+3{,}3) + (-7{,}7) + (-8) + (+9{,}5) + (+2{,}4)$

k) $(-3{,}1) + (+3{,}1) + (+3{,}9) + (-0{,}8) + (-3{,}8)$

l) $(+7{,}3) + (-10) + (+6{,}3) + (-6{,}4) + (+7{,}3)$

m) $(-6{,}9) + (+3{,}3) + (-4{,}5) + (+9{,}8) + (-7{,}1)$

n) $(+7{,}7) + (-0{,}7) + (-1{,}6) + (+2{,}2) + (+0{,}9)$

*Pour rappel, deux nombres sont dits *opposés* lorsque leur somme est nulle.

Exercice 12. Calcule.

a) $(+8) + (+35) + (-97) + (+64) + (-45)$

b) $(+98) + (-24) + (+71) + (+38) + (+30)$

c) $(-21) + (+93) + (-98) + (+89) + (-53)$

d) $(-67) + (+51) + (+80) + (+58) + (-92)$

e) $(-33) + (-3) + (+87) + (+13) + (+19)$

f) $(-89) + (+75) + (-88) + (-77) + (+25)$

g) $(-15) + (-51) + (-16) + (-67) + (+47)$

h) $(+7{,}4) + (-9{,}3) + (+7{,}1) + (+7) + (+3{,}2)$

i) $(+9{,}3) + (-9{,}8) + (+4) + (-7{,}6) + (-3{,}1)$

j) $(-1{,}1) + (-6{,}2) + (+2{,}7) + (-0{,}9) + (-5)$

k) $(-8{,}7) + (-9{,}1) + (+4{,}6) + (-7{,}8) + (+2{,}5)$

l) $(-6{,}1) + (-7{,}4) + (+5) + (-1{,}2) + (-5{,}5)$

m) $(-8{,}2) + (+1{,}4) + (-8{,}3) + (+7) + (+4{,}2)$

n) $(-8{,}6) + (+6{,}2) + (-1{,}2) + (+0{,}4) + (+0{,}7)$

Je soustrais deux nombres relatifs

Deux nombres sont dits *opposés* lorsque leur somme est nulle.

Exemple. (-8) et $(+8)$ sont opposés car $(-8) + (+8) = 0$.

On note alors $\text{op}(+8) = (-8)$ et $\text{op}(-8) = (+8)$.

⇨ Pour obtenir l'*opposé* d'un nombre relatif, on change son signe et on garde sa valeur absolue.

Grâce à cette notion, on peut ramener toute soustraction à une addition :

Règle. Pour soustraire un nombre, on additionne son opposé.

Exemples.

$$\begin{aligned}
(+5) - (+8) &= (+5) + \text{op}(+8) = (+5) + (-8) = (-3)\\
(-5) - (+8) &= (-5) + \text{op}(+8) = (-5) + (-8) = (-13)\\
(+5) - (-8) &= (+5) + \text{op}(-8) = (+5) + (+8) = (+13)\\
(-5) - (-8) &= (-5) + \text{op}(-8) = (-5) + (+8) = (+3)
\end{aligned}$$

Exercice 13. Calcule.

a) $(-44) - (+49)$	e) $(-7) - (+30)$	i) $(+8{,}8) - (+2{,}6)$	m) $(+7{,}1) - (+6{,}6)$
b) $(-43) - (-37)$	f) $(-99) - (-78)$	j) $(-3{,}5) - (-9{,}9)$	n) $(+6{,}5) - (-3{,}8)$
c) $(-14) - (+15)$	g) $(+35) - (-18)$	k) $(+4{,}5) - (+5{,}8)$	o) $(-3{,}1) - (-8{,}7)$
d) $(-46) - (+24)$	h) $(-99) - (+37)$	l) $(-3{,}5) - (+9{,}1)$	p) $(-9{,}9) - (+1{,}7)$

Exercice 14. Calcule.

a) $(+53)-(-99)$	e) $(-77)-(+64)$	i) $(+47)-(+73)$	m) $(+73)-(-8)$
b) $(-66)-(-98)$	f) $(+97)-(-30)$	j) $(-89)-(+99)$	n) $(+61)-(-5)$
c) $(-21)-(+80)$	g) $(-55)-(+21)$	k) $(+67)-(-78)$	o) $(-74)-(-34)$
d) $(-2)-(+58)$	h) $(-77)-(-94)$	l) $(-83)-(+23)$	p) $(+74)-(-75)$

Exercice 15. Calcule.

a) $(-9{,}9)-(-2{,}1)$	e) $(+7)-(+2{,}1)$	i) $(+5{,}9)-(+5{,}1)$	m) $(-8{,}5)-(-8{,}3)$
b) $(-4{,}2)-(+7{,}6)$	f) $(-8{,}6)-(+3{,}4)$	j) $(-7{,}5)-(-3{,}2)$	n) $(+3)-(-8{,}1)$
c) $(-5)-(-7{,}2)$	g) $(+9{,}5)-(-5{,}7)$	k) $(-3{,}7)-(-1{,}3)$	o) $(-6{,}6)-(+1{,}6)$
d) $(+1{,}2)-(-0{,}2)$	h) $(+4{,}4)-(+8{,}8)$	l) $(+4{,}4)-(-4{,}3)$	p) $(-7{,}7)-(-4{,}3)$

J'effectue une suite d'additions et de soustractions

Pour effectuer une suite d'additions et de soustractions, on se ramène à une suite d'additions en écrivant toutes les soustractions comme des additions de l'opposé.

Exemple.

$$\begin{aligned}
A &= (-3)-(-5)+(+6)+(-4)-(+7)\\
&= (-3)+\mathrm{op}(-5)+(+6)+(-4)+\mathrm{op}(+7)\\
&= (-3)+(+5)+(+6)+(-4)+(-7)\\
&= (+5)+(+6)+(-3)+(-4)+(-7)\\
&= \underbrace{\big((+5)+(+6)\big)}_{(+11)}+\underbrace{\big((-3)+(-4)+(-7)\big)}_{(-14)}\\
&= \underbrace{(+11)\quad+\quad(-14)}_{(-3)}\\
&= (-3)
\end{aligned}$$

Exercice 16. Calcule.

a) $(+46)+(-75)-(-96)-(-1)-(+90)$

b) $(+2)-(+65)-(+87)+(+40)-(-55)$

c) $(-52)+(-19)+(+88)-(+84)-(+16)$

d) $(+69)-(-8)-(-53)+(-3)+(-32)$

e) $(-32)+(+27)-(-78)+(-91)+(-36)$

f) $(-65)-(-9)-(+55)-(-46)-(+52)$

g) $(+12)+(+28)+(-67)+(+96)+(+74)$

h) $(+24)-(+88)+(+74)-(+24)-(+33)$

i) $(-8{,}5)-(-3{,}9)-(+2{,}3)-(-5{,}1)+(+3)$

j) $(+4{,}9)+(+3{,}4)+(-6{,}4)+(-0{,}8)+(+1{,}1)$

k) $(+8{,}8)+(+0{,}4)-(-1{,}9)-(-1)-(-3)$

l) $(+3{,}7)-(+5{,}2)+(-9{,}4)-(+7{,}5)+(-3{,}5)$

m) $(-4)+(+0{,}5)-(-1{,}1)-(-7{,}3)+(-1{,}4)$

n) $(+6{,}6) + (-2{,}7) + (-2{,}4) - (-6{,}9) + (+3{,}3)$

o) $(-3{,}1) + (-0{,}1) + (+4{,}1) + (+0{,}1) - (+3{,}5)$

p) $(+6{,}9) - (+4{,}3) - (-9{,}6) + (+4{,}2) - (+8{,}2)$

Exercice 17. Calcule.

a) $(-8) + (+44) - (+65) - (-4)$

b) $(-41) - (+1) + (-21) - (-68)$

c) $(+6) - (+10) - (-86) - (-28)$

d) $(+74) - (+18) + (-5) - (+41)$

e) $(-87) + (+53) - (+50) - (-15)$

f) $(+66) + (-79) - (-31) - (+99)$

g) $(+86) - (-82) + (-29) - (-39)$

h) $(+23) - (+45) + (-90) + (-87)$

i) $(+5{,}9) - (+5{,}3) + (+2{,}1) - (-10)$

j) $(+1{,}6) - (-3{,}3) - (-7{,}9) - (+6{,}5)$

k) $0 - (-6{,}1) - (-2{,}9) - (-8{,}2)$

l) $(+4{,}5) - (-7{,}2) - (+8{,}8) + (+7{,}9)$

m) $(-2{,}2) - (-1) + (-6{,}9) + (+6{,}8)$

n) $(-6{,}2) - (+7) - (-9) - (-1{,}4)$

o) $(+7{,}1) + (-9{,}5) - (+8{,}4) - (-0{,}7)$

p) $(-6{,}9) + (-2{,}2) + (-7{,}5) - (-0{,}4)$

Exercice 18. Calcule.

a) $(+46) + (-57) + (+20) + (-80) - (-18)$

b) $(+29) + (-23) - (-73) + (-80) + (+65)$

c) $(-3) + (-9) - (-75) + (-75) - (-69)$

d) $(-13) + (-85) - (-15) - (-93) + (+89)$

e) $(-48) - (+26) + (+56) - (-97) + (+73)$

f) $(-83) + (-77) + (-8) + (-88) + (+25)$

g) $(-57) + (-95) - (+5) + (+41) + (-42)$

h) $(-11) - (+21) - (-47) + (+35) + (+60)$

i) $(-8{,}2) + (+1{,}1) + (-8{,}8) - (+5{,}8) - (+7{,}4)$

j) $0 + (+5{,}1) + (-1{,}7) + (+4{,}8) - (-8{,}7)$

k) $(+1{,}5) + (-4{,}2) + (+8{,}8) - (-7) + (+9{,}3)$

l) $(-8{,}1) - 0 - (+6{,}4) - (+0{,}2) + (+4{,}5)$

m) $(+8{,}5) + (-6{,}4) - (-1) + (+4{,}1) - (+3{,}9)$

n) $(+3) - (+5{,}3) + (+5{,}4) + (-1{,}8) + (+1{,}5)$

o) $(-9{,}1) - (+7{,}8) + (-5{,}7) + (+2{,}5) + (-2{,}1)$

p) $(-9) + (-5{,}1) + (-8{,}7) - (+0{,}8) + (-1{,}7)$

J'interprète l'écriture simplifiée d'une somme

Pour simplifier l'écriture d'une somme de nombres relatifs, on peut supprimer :

- toutes les parenthèses ;
- les signes opératoires de l'addition (notés $\boldsymbol{+}$ ici) ;
- le signe prédicatoire $+$ s'il se trouve au début de la somme.

Exemple. $(+1) \boldsymbol{+} (-5) \boldsymbol{+} (+3)$ peut s'écrire $1 - 5 + 3$.

Inversement, pour manipuler une somme écrite dans une écriture simplifiée, on peut revenir à l'écriture classique :

$$\begin{aligned} A &= -3 + 5 + 6 - 4 - 7 \\ &= (-3) \boldsymbol{+} (+5) \boldsymbol{+} (+6) \boldsymbol{+} (-4) \boldsymbol{+} (-7) = \ldots = (-3) \end{aligned}$$

Remarque. On utilise parfois une notation partiellement simplifiée dans laquelle on supprime uniquement les signes opératoires $\boldsymbol{+}$ (et parenthèses correspondantes) se trouvant devant un signe prédicatoire $+$.

$$(-3) \boldsymbol{+} (+5) \boldsymbol{+} (+6) \boldsymbol{+} (-4) = (-3) + 5 + 6 + (-4)$$

Avec cette notation, on comprend mieux pourquoi « un nombre (négatif) voyage toujours avec son signe » lorsqu'on le déplace dans une somme (en vertu de la commutativité de l'addition).

Exercice 19. Calcule.

a) $26 + 46 + 24 + 14 - 74$

b) $-94 - 5 - 19 + 54 - 68$

c) $3 - 20 + 26 + 52 + 45$

d) $-17 - 14 + 43 - 42 - 70$

e) $90 - 59 - 54 + 10 + 78$

f) $-0 + 28 - 1 - 18 + 10$

g) $14 - 11 - 66 - 66 + 42$

h) $-64 - 3 - 63 - 3 + 93$

i) $1 + 1{,}6 - 1{,}1 + 2{,}5 - 4$

j) $-5{,}6 - 5{,}1 - 3{,}6 - 9{,}7 + 2{,}3$

k) $2{,}5 - 8{,}6 + 2{,}9 + 7{,}8 - 3{,}9$

l) $-5{,}9 + 8{,}8 + 8{,}6 + 6{,}8 - 3{,}4$

m) $5{,}3 + 6{,}6 + 8{,}6 - 8{,}4 - 4{,}7$

n) $-0{,}1 - 4 - 1{,}8 - 6{,}3 - 7$

o) $3{,}3 - 8{,}7 + 0{,}6 + 6{,}7 - 2{,}3$

p) $-5{,}1 + 3{,}6 - 7{,}7 - 5{,}3 + 9{,}4$

Exercice 20. Calcule.

a) $34 + 86 - 50 + 96 + 74$

b) $-79 + 44 + 82 - 22 + 69$

c) $94 - 40 + 25 + 60 - 23$

d) $-4 - 48 + 25 - 96 + 43$

e) $36 - 86 + 36 + 53 - 58$

f) $-91 - 76 + 0 + 55 - 23$

g) $87 + 11 - 55 + 26 + 21$

h) $-32 + 89 + 98 + 36 + 81$

i) $2 - 3{,}8 - 8{,}1 + 0{,}6 - 6$

j) $-2{,}7 - 9{,}7 - 1{,}6 - 8{,}2 + 6{,}7$

k) $1{,}1 + 9{,}4 + 8{,}8 + 4{,}6 + 1{,}2$

l) $-4{,}8 + 7{,}6 - 6{,}3 - 0{,}1 - 7{,}6$

m) $7{,}3 + 3{,}6 - 3{,}2 - 6{,}6 + 6{,}1$

n) $-0{,}6 - 8{,}7 + 7{,}9 - 6{,}5 - 1{,}5$

o) $7{,}1 + 5{,}4 - 3{,}9 + 3{,}9 + 3{,}6$

p) $-9{,}3 - 9{,}9 - 4{,}3 + 3{,}6 - 0{,}3$

3. Multiplication et division

Je multiplie deux nombres relatifs

Règle. Pour multiplier deux nombres relatifs :
- on multiplie leurs valeurs absolues ;
- on donne au résultat :
  - le signe $+$ si les deux nombres sont de même signe ;
  - le signe $-$ si les deux nombres sont de signes opposés.

Exemples. $(+8) \times (+2{,}5) = (+20)$ $(-8) \times (+2{,}5) = (-20)$
$(-8) \times (-2{,}5) = (+20)$ $(+8) \times (-2{,}5) = (-20)$

Exercice 21. Calcule.

a) $(+10) \times (+4)$; $(-10) \times (-4)$
b) $(+10) \times (+14)$; $(-10) \times (-14)$
c) $(+3) \times (+3)$; $(-3) \times (-3)$
d) $(+8) \times (+1)$; $(-8) \times (-1)$
e) $(+11) \times (+15)$; $(-11) \times (-15)$
f) $0 \times (+7)$; $0 \times (-7)$
g) $(-10) \times (+4)$; $(+10) \times (-4)$
h) $(-10) \times (+14)$; $(+10) \times (-14)$
i) $(-3) \times (+3)$; $(+3) \times (-3)$
j) $(-8) \times (+1)$; $(+8) \times (-1)$
k) $(-11) \times (+15)$; $(+11) \times (-15)$
l) $0 \times (+7)$; $0 \times (-7)$

Exercice 22. Calcule.

a) $(+5) \times (+1{,}6)$; $(-5) \times (-1{,}6)$
b) $(+3{,}3) \times (-1{,}3)$; $(-3{,}3) \times (+1{,}3)$
c) $(+2{,}1) \times (+1{,}5)$; $(-2{,}1) \times (-1{,}5)$
d) $(-4) \times (+2{,}1)$; $(+4) \times (-2{,}1)$
e) $(+2{,}9) \times (+1{,}4)$; $(-2{,}9) \times (-1{,}4)$
f) $(-0{,}7) \times (-3{,}1)$; $(+0{,}7) \times (+3{,}1)$
g) $(-5) \times (+1{,}6)$; $(+5) \times (-1{,}6)$
h) $(-3{,}3) \times (-1{,}3)$; $(+3{,}3) \times (+1{,}3)$
i) $(-2{,}1) \times (+1{,}5)$; $(+2{,}1) \times (-1{,}5)$
j) $(+4) \times (+2{,}1)$; $(-4) \times (-2{,}1)$
k) $(-2{,}9) \times (+1{,}4)$; $(+2{,}9) \times (-1{,}4)$
l) $(+0{,}7) \times (-3{,}1)$; $(-0{,}7) \times (+3{,}1)$

J'effectue une suite de multiplications de relatifs

Règle. Pour multiplier plusieurs nombres relatifs entre eux :
- on multiplie leurs valeurs absolues ;
- on donne au résultat :
  - le signe $+$ si les facteurs négatifs sont en nombre pair ;
  - le signe $-$ si les facteurs négatifs sont en nombre impair.

Exemples. $(+2) \times (+2{,}5) \times (+3) = (+15)$ $(-2) \times (+2{,}5) \times (+3) = (-15)$
$(-2) \times (-2{,}5) \times (+3) = (+15)$ $(+2) \times (-2{,}5) \times (+3) = (-15)$
$(+2) \times (-2{,}5) \times (-3) = (+15)$ $(+2) \times (+2{,}5) \times (-3) = (-15)$
$(-2) \times (+2{,}5) \times (-3) = (+15)$ $(-2) \times (-2{,}5) \times (-3) = (-15)$

Exercice 23. Calcule.

a) $(+3) \times (+3) \times (-8) \times (+3)$
b) $(-9) \times 0 \times (+4) \times (+6)$
c) $(+1) \times (-6) \times (-2) \times (+8)$
d) $(+8) \times (-3) \times (+1) \times (-2)$
e) $(-3) \times (-1) \times (-7) \times (+7) \times (-1)$
f) $(-3) \times (+1) \times (-7) \times (+7) \times (-1)$
g) $(+4) \times (+1) \times (-6) \times (-1) \times (+4)$
h) $(-4) \times (+1) \times (+6) \times (+1) \times (+4)$
i) $(+1) \times (-3) \times (-2) \times (-9) \times (-5)$
j) $(-1) \times (-3) \times (-2) \times (-9) \times (-5)$
k) $(-6) \times (-2) \times (+3) \times (-2) \times (-10)$
l) $(-6) \times (-2) \times (-3) \times (+2) \times (+10)$

Je divise deux nombres relatifs

Règle. Pour diviser deux nombres relatifs :
- on divise leurs valeurs absolues ;
- on donne au résultat :
  - ∗ le signe + si les deux nombres sont de même signe ;
  - ∗ le signe − si les deux nombres sont de signes opposés.

Exemples. $(+7) : (+2) = (+3{,}5)$ $\quad$ $(-7) : (+2) = (-3{,}5)$
$(-7) : (-2) = (+3{,}5)$ $\quad$ $(+7) : (-2) = (-3{,}5)$

Exercice 24. Calcule.

a) $(+78) : (+6)$
b) $(+27) : (+3)$
c) $(+60) : (+12)$
d) $(+75) : (+15)$
e) $(+169) : (+13)$
f) $(+60) : (+5)$
g) $(+78) : (-6)$
h) $(+27) : (-3)$
i) $(+60) : (-12)$
j) $(+75) : (-15)$
k) $(+169) : (-13)$
l) $(+60) : (-5)$
m) $(-78) : (-6)$
n) $(-27) : (-3)$
o) $(-60) : (-12)$
p) $(-75) : (-15)$
q) $(-169) : (-13)$
r) $(-60) : (-5)$
s) $(-78) : (+6)$
t) $(-27) : (+3)$
u) $(-60) : (+12)$
v) $(-75) : (+15)$
w) $(-169) : (+13)$
x) $(-60) : (+5)$

J'effectue une suite d'opérations avec des relatifs

Dans l'exemple suivant, il te suffit d'effectuer d'abord les produits (règle de priorité des opérations), puis d'interpréter l'expression obtenue comme l'écriture simplifiée d'une somme.

Exemple.
$$\begin{aligned} A &= -3\times 2+5\times 4+6-8\times 5-7 \\ &= -6+20+6-40-7 \\ &= \cancel{(-6)} + (+20) + \cancel{(+6)} + (-40) + (-7) \\ &= (+20) + (-47) \\ &= (-27) \end{aligned}$$

Exercice 25. Calcule.

a) $3-5\times 2-3-7\times 2$
b) $9-9\times 2-7-5-8$
c) $6+1-3\times 4-1+3$
d) $9+3+2-5\times 7+1$
e) $3+9-5+8+8-4$
f) $2\times 4\times 4-6-8+8-3$
g) $4+3-9-6\times 4-4\times 4$
h) $4-5+3-7-5-9-1$
i) $8+6+2-3-8-8-2$
j) $2-7\times 1+6-3-1\times 2$
k) $8-2-9-4\times 7-6-2$
l) $6-8-3\times 2\times 8-1-6$
m) $2\times 8-5+3-1\times 8+2$
n) $1-7-2-4+4+5-8$
o) $3\times 3-9-6+9\times 8-4$
p) $7-5\times 1+1+9-6-2$
q) $7-1-1+7-7-5-9$
r) $7-7-3\times 8\times 3-5-3$
s) $4-5+7-7+1-6-4$
t) $1-2\times 8-1\times 8-3+2$
u) $8+6+5\times 4-2-9+6$

J'effectue une suite d'opérations avec des parenthèses

Dans des calculs avec parenthèses, on suit les règles de priorité des opérations. Pour faciliter les calculs, on peut remplacer toutes les soustractions par des additions d'opposés, y compris lorsque la quantité à soustraire est entre parenthèses.

Exemple.
$$\begin{aligned} A &= -23-(3-(4-7)\times(8-15)) \\ &= (-23) + \text{op}\Big[3 + \text{op}\big((4+(-7))\times(8+(-15))\big)\Big] \\ &= (-23) + \text{op}\Big[3 + \text{op}\big[(-3)\times(-7)\big]\Big] \\ &= (-23) + \text{op}\big[3 + \text{op}(+21)\big] \\ &= (-23) + \text{op}\big[3 + (-21)\big] \\ &= (-23) + \text{op}(-18) \\ &= (-23) + (+18) \\ &= (-5) \end{aligned}$$

Il est important de bien assimiler cette méthode : tu en auras constamment besoin lorsque tu aborderas le calcul littéral.

Exercice 26. Calcule.

a) $1-(2-3-4-5-6-7-8-9)$

b) $1-(2-(3-4-5-6-7)-8-9)$

c) $1-2-(3-4-5-(6-7-8)-9)$

d) $1-2-3-(4-5-(6-(7-8))-9)$

e) $1-(2-3)-4-(5-(6-(7-8)-9))$

f) $-1{,}2+2{,}4-3{,}5+4{,}8-5{,}1+6{,}8-7{,}7$

g) $-1{,}2+2{,}4-(3{,}5+4{,}8-5{,}1+6{,}8-7{,}7)$

h) $-1{,}2+2{,}4-(3{,}5+4{,}8-5{,}1)+6{,}8-7{,}7$

i) $-1{,}2+2{,}4-(3{,}5+4{,}8-(5{,}1+6{,}8-7{,}7))$

j) $-1{,}2+2{,}4-(3{,}5+4{,}8-(5{,}1+6{,}8)-7{,}7)$

Exercice 27. Calcule.

a) $4-1+3-(8+4+2-2)$

b) $-5\times 1\times(1+6)\times 8-(3+2)$

c) $3-(2-(8+9)+7-5)-2$

d) $-(5\times 4-4)+7-(7+8-2)$

e) $6\times(3-2)-2-(4-(3-6))$

f) $-9+1+[3-6-(3-9)-5]$

g) $5-9-[9-2\times(7-3)+5]$

h) $-\{1-[1+6\times(3-5-4)]\}\times 3$

i) $7\times[4-2-(9+6)]+(6-9)$

j) $-4\times 7\times(9-4-2)-8\times 4$

k) $2-9\times(1-6)-4\times(8+1)$

l) $-\{6-[1-(5-4)-6]-8\}+2$

m) $7+(9-7)+[1+4-(5-7)]$

n) $-1\times[6-5-(7\times 9+5)]-8$

o) $-9\times[3-(2-2)]-(4-6-2)$

p) $2-5\times[7+1-(2-9\times 8)]$

q) $(-3)\times 2\times(7-2)-(9+6-1)$

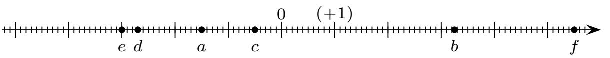
r) $6\times[2\times(4-5)-8]+(8+7)$

s) $-7-(9-4-8)+(9-7)\times 6$

t) $-4\times[1-(5+1-9)-9-8]$

4. Solutions

Exercice 1. a)



b) Notons x_A l'abscisse du point A, etc.

- $x_A = (+1{,}7)$
- $x_B = (-3{,}8)$
- $x_C = (-0{,}3)$
- $x_D = (+4{,}6)$
- $x_E = (-2{,}4)$
- $x_F = (+5{,}1)$

Exercice 2. $(-7{,}43) < (-4{,}42) < (-3{,}9) < (-1{,}61) < (+0{,}85) < (+1{,}33) < (+1{,}96) < (+6{,}29) < (+8{,}18) < (+8{,}8)$

Exercice 3. $(-69{,}7) < (-62{,}53) < (-54{,}9) < (-52{,}07) < (-31{,}41) < (+3{,}01) < (+55{,}81) < (+60{,}84) < (+71{,}44) < (+78{,}84)$

Exercice 4.

a) $(+117)$; (-117)	c) $(+39)$; (-39)	e) $(+109)$; (-109)
b) $(+48)$; (-48)	d) $(+31)$; (-31)	f) $(+134)$; (-134)

Exercice 5.

a) $(+7{,}1)$; $(-7{,}1)$	c) $(+4{,}1)$; $(-4{,}1)$	e) $(+10{,}1)$; $(-10{,}1)$
b) $(-8{,}3)$; $(+8{,}3)$	d) $(-16{,}4)$; $(+16{,}4)$	f) (-6) ; $(+6)$

Exercice 6.

a) (-19) ; $(+19)$	c) (-27) ; $(+27)$	e) (-67) ; $(+67)$
b) $(+26)$; (-26)	d) (-1) ; $(+1)$	f) (-12) ; $(+12)$

Exercice 7.

a) $(-3{,}9)$; $(+3{,}9)$	c) $(-1{,}7)$; $(+1{,}7)$	e) $(-5{,}1)$; $(+5{,}1)$
b) $(+2{,}1)$; $(-2{,}1)$	d) $(-2{,}2)$; $(+2{,}2)$	f) $(-1{,}4)$; $(+1{,}4)$

Exercice 8.

a) $(+140)$	e) $(+96)$	i) (-20)	m) (-40)	q) (-10)	u) (-12)
b) $(+75)$	f) $(+78)$	j) (-106)	n) $(+67)$	r) (-36)	v) $(+8)$
c) $(+20)$	g) (-140)	k) (-96)	o) $(+12)$	s) $(+40)$	w) $(+10)$
d) $(+106)$	h) (-75)	l) (-78)	p) (-8)	t) (-67)	x) $(+36)$

Exercice 9.

a) $(-15{,}7)$ e) $(+2)$ i) $(-0{,}7)$ m) $(-1{,}7)$ q) $(-1{,}4)$ u) $(+11{,}3)$
b) $(+3{,}6)$ f) $(-1{,}3)$ j) $(+0{,}6)$ n) $(+6)$ r) $(+2{,}5)$ v) $(-1{,}6)$
c) $(+0{,}7)$ g) $(+15{,}7)$ k) (-2) o) $(-11{,}3)$ s) $(+1{,}7)$ w) $(+1{,}4)$
d) $(-0{,}6)$ h) $(-3{,}6)$ l) $(+1{,}3)$ p) $(+1{,}6)$ t) (-6) x) $(-2{,}5)$

Exercice 10.

a) $(+10)$ c) $(+10)$ e) $(+92)$ g) $(+3{,}9)$ i) $(-1{,}3)$ k) $(+13{,}3)$
b) (-31) d) $(+73)$ f) $(-3{,}8)$ h) $(+9{,}3)$ j) $(+4{,}6)$ l) $(+2{,}4)$

Exercice 11.

a) $(+17)$ d) $(+160)$ g) $(+100)$ j) $(-0{,}5)$ m) $(-5{,}4)$
b) $(+109)$ e) (-127) h) $(+1{,}8)$ k) $(-0{,}7)$ n) $(+8{,}5)$
c) $(+53)$ f) $(+143)$ i) $(-0{,}4)$ l) $(+4{,}5)$

Exercice 12.

a) (-35) d) $(+30)$ g) (-102) j) $(-10{,}5)$ m) $(-3{,}9)$
b) $(+213)$ e) $(+83)$ h) $(+15{,}4)$ k) $(-18{,}5)$ n) $(-2{,}5)$
c) $(+10)$ f) (-154) i) $(-7{,}2)$ l) $(-15{,}2)$

Exercice 13.

a) $\ldots = (-44) + (-49) = (-93)$
b) $\ldots = (-43) + (+37) = (-6)$
c) $\ldots = (-14) + (-15) = (-29)$
d) $\ldots = (-46) + (-24) = (-70)$
e) $\ldots = (-7) + (-30) = (-37)$
f) $\ldots = (-99) + (+78) = (-21)$
g) $\ldots = (+35) + (+18) = (+53)$
h) $\ldots = (-99) + (-37) = (-136)$
i) $\ldots = (+8{,}8) + (-2{,}6) = (+6{,}2)$
j) $\ldots = (-3{,}5) + (+9{,}9) = (+6{,}4)$
k) $\ldots = (+4{,}5) + (-5{,}8) = (-1{,}3)$
l) $\ldots = (-3{,}5) + (-9{,}1) = (-12{,}6)$
m) $\ldots = (+7{,}1) + (-6{,}6) = (+0{,}5)$
n) $\ldots = (+6{,}5) + (+3{,}8) = (+10{,}3)$
o) $\ldots = (-3{,}1) + (+8{,}7) = (+5{,}6)$
p) $\ldots = (-9{,}9) + (-1{,}7) = (-11{,}6)$

Exercice 14.

a) $(+152)$ d) (-60) g) (-76) j) (-188) m) $(+81)$ p) $(+149)$
b) $(+32)$ e) (-141) h) $(+17)$ k) $(+145)$ n) $(+66)$
c) (-101) f) $(+127)$ i) (-26) l) (-106) o) (-40)

Exercice 15.

a) $(-7{,}8)$	d) $(+1{,}4)$	g) $(+15{,}2)$	j) $(-4{,}3)$	m) $(-0{,}2)$	p) $(-3{,}4)$
b) $(-11{,}8)$	e) $(+4{,}9)$	h) $(-4{,}4)$	k) $(-2{,}4)$	n) $(+11{,}1)$	
c) $(+2{,}2)$	f) (-12)	i) $(+0{,}8)$	l) $(+8{,}7)$	o) $(-8{,}2)$	

Exercice 16.

a) (-22)	d) $(+95)$	g) $(+143)$	j) $(+2{,}2)$	m) $(+3{,}5)$	p) $(+8{,}2)$
b) (-55)	e) (-54)	h) (-47)	k) $(+15{,}1)$	n) $(+11{,}7)$	
c) (-83)	f) (-117)	i) $(+1{,}2)$	l) $(-21{,}9)$	o) $(-2{,}5)$	

Exercice 17.

a) (-25)	d) $(+10)$	g) $(+178)$	j) $(+6{,}3)$	m) $(-1{,}3)$	p) $(-16{,}2)$
b) $(+5)$	e) (-69)	h) (-199)	k) $(+17{,}2)$	n) $(-2{,}8)$	
c) $(+110)$	f) (-81)	i) $(+12{,}7)$	l) $(+10{,}8)$	o) $(-10{,}1)$	

Exercice 18.

a) (-53)	d) $(+99)$	g) (-158)	j) $(+16{,}9)$	m) $(+3{,}3)$	p) $(-25{,}3)$
b) $(+64)$	e) $(+152)$	h) $(+110)$	k) $(+22{,}4)$	n) $(+2{,}8)$	
c) $(+57)$	f) (-231)	i) $(-29{,}1)$	l) $(-10{,}2)$	o) $(-22{,}2)$	

Exercice 19.

a) 36	d) -100	g) -87	j) $-21{,}7$	m) $7{,}4$	p) $-5{,}1$
b) -132	e) 65	h) -40	k) $0{,}7$	n) $-19{,}2$	
c) 106	f) 19	i) 0	l) $14{,}9$	o) $-0{,}4$	

Exercice 20.

a) 240	d) -80	g) 90	j) $-15{,}5$	m) $7{,}2$	p) $-20{,}2$
b) 94	e) -19	h) 272	k) $25{,}1$	n) $-9{,}4$	
c) 116	f) -135	i) $-15{,}3$	l) $-11{,}2$	o) $16{,}1$	

Exercice 21. Pour chaque question, les deux calculs mènent au même résultat.

a) $(+40)$	c) $(+9)$	e) $(+165)$	g) (-40)	i) (-9)	k) (-165)
b) $(+140)$	d) $(+8)$	f) 0	h) (-140)	j) (-8)	l) 0

Exercice 22. Pour chaque question, les deux calculs mènent au même résultat.

a) $(+8)$	c) $(+3{,}15)$	e) $(+4{,}06)$	g) (-8)	i) $(-3{,}15)$	k) $(-4{,}06)$
b) $(-4{,}29)$	d) $(-8{,}4)$	f) $(+2{,}17)$	h) $(+4{,}29)$	j) $(+8{,}4)$	l) $(-2{,}17)$

Exercice 23.

a) (-216)	c) $(+96)$	e) $(+147)$	g) $(+96)$	i) $(+270)$	k) $(+720)$
b) 0	d) $(+48)$	f) (-147)	h) (-96)	j) (-270)	l) (-720)

Exercice 24.

a) $(+13)$	e) $(+13)$	i) (-5)	m) $(+13)$	q) $(+13)$	u) (-5)
b) $(+9)$	f) $(+12)$	j) (-5)	n) $(+9)$	r) $(+12)$	v) (-5)
c) $(+5)$	g) (-13)	k) (-13)	o) $(+5)$	s) (-13)	w) (-13)
d) $(+5)$	h) (-9)	l) (-12)	p) $(+5)$	t) (-9)	x) (-12)

Exercice 25.

a) -24	e) 19	i) -5	m) 8	q) -9	u) 29
b) -29	f) 23	j) -4	n) -11	r) -80	
c) -3	g) -42	k) -39	o) 62	s) -10	
d) -20	h) -20	l) -57	p) 4	t) -24	

Exercice 26.

a) 41	c) 5	e) -9	g) $-1{,}1$	i) $-2{,}9$
b) -3	d) 13	f) $-3{,}5$	h) $-2{,}9$	j) $12{,}5$

Exercice 27.

a) -6	e) -3	i) -94	m) 16	q) -44
b) -285	f) -10	j) -116	n) 59	r) -45
c) 14	g) -10	k) 11	o) -23	s) 8
d) -22	h) -108	l) -2	p) -388	t) 52