

T^{le}

Spé

Maths

1 DEVOIR



PAR SEMAINE

*Devenez incollable
à l'écrit !*

ellipses

T^{le}

Spé

Maths

1 DEVOIR

PAR SEMAINE



Nicolas RAUWEL

Professeur agrégé de mathématiques à l'Université Paris Nanterre



Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits
sur www.editions-ellipses.fr



Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

Conception graphique intérieur : Agathe GALLET DUCARROY

Mise en pages : Nord Compo

ISBN 9782340-115835

Dépôt légal : juin 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Ce livre est à destination des élèves de Terminale faisant la spécialité Mathématiques. L'objectif est de se préparer sur chaque chapitre et sur l'épreuve du baccalauréat de Mathématiques.

Vous y trouverez 29 devoirs sur des notions précises, ou sur un mélange de notions d'un même thème ou sur un mélange de plusieurs thèmes comme si vous aviez un devoir bilan. Et il y a également 4 sujets entiers de baccalauréat.

Les devoirs comportent régulièrement des questions sur les algorithmes ou Python. Vous y trouvez le barème par exercice ainsi que le temps à y accorder. Ce temps est approximatif et dépendra bien sûr de votre aisance dans les notions abordées.

Sommaire

Table thématique	7
Introduction	9
1. Présentation de l'année	9
2. Méthodes de travail	10
3. Méthodes face aux contrôles	12

Devoirs

■ Devoir 1	15	■ Devoir 16	51
■ Devoir 2	17	■ Devoir 17	54
■ Devoir 3	19	■ Devoir 18	57
■ Devoir 4	21	■ Devoir 19	59
■ Devoir 5	23	■ Devoir 20	63
■ Devoir 6	25	■ Devoir 21	66
■ Devoir 7	30	■ Devoir 22	69
■ Devoir 8	32	■ Devoir 23	74
■ Devoir 9	34	■ Devoir 24	78
■ Devoir 10	36	■ Devoir 25	83
■ Devoir 11	38	■ Devoir 26	89
■ Devoir 12	40	■ Devoir 27	92
■ Devoir 13	43	■ Devoir 28	97
■ Devoir 14	45	■ Devoir 29	101
■ Devoir 15	49		

Corrigés

■ Corrigé du devoir 1	110	■ Corrigé du devoir 9	141
■ Corrigé du devoir 2	112	■ Corrigé du devoir 10	146
■ Corrigé du devoir 3	115	■ Corrigé du devoir 11	149
■ Corrigé du devoir 4	117	■ Corrigé du devoir 12	152
■ Corrigé du devoir 5	122	■ Corrigé du devoir 13	156
■ Corrigé du devoir 6	126	■ Corrigé du devoir 14	160
■ Corrigé du devoir 7	132	■ Corrigé du devoir 15	163
■ Corrigé du devoir 8	135	■ Corrigé du devoir 16	167

■ Corrigé du devoir 17	173	■ Corrigé du devoir 24	199
■ Corrigé du devoir 18	179	■ Corrigé du devoir 25	206
■ Corrigé du devoir 19	181	■ Corrigé du devoir 26	212
■ Corrigé du devoir 20	184	■ Corrigé du devoir 27	214
■ Corrigé du devoir 21	188	■ Corrigé du devoir 28	218
■ Corrigé du devoir 22	191	■ Corrigé du devoir 29	222
■ Corrigé du devoir 23	196		

Les épreuves du Bac

Annales corrigés	230
Pistes et conseil pour le Grand Oral	279

Annexes

Glossaire	283
Formulaire	285

Table thématique

Grands thèmes du programme

Combinatoire, Géométrie dans l'espace, Analyse (suite, fonction, continuité, dérivation, trigonométrie, logarithme, primitive, équation différentielle, calcul intégral), Probabilité (conditionnelle, variable aléatoire, inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Combinatoire		Géométrie dans l'espace			Analyse												Probabilité		
	Additif et multiplicatif	Permutation, combinaison	Vecteurs de $\mathbb{R}^3$	Orthogonalité et distance	Représentation et équation	Limite de suite	Récurrance	Opération et limite de fonctions	Propriété et limite	Continuité, TVI	Dérivée seconde, convexité	Logarithme	Fonction trigonométrique	Primitive	Équation différentielle	Calcul intégral	Valeur moyenne, IPP	Probabilité, Bernoulli, binomiale	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
1	X																		
2		X																	
3			X																
4				X															
5					X														
6			X	X	X														
7						X													
8							X												
9								X											
10									X										
11										X									
12										X									
13											X								
14						X	X			X									
15												X							
16						X	X	X		X									
17													X						
18														X					
19														X	X				
20														X		X			
21														X			X		
22						X	X		X	X				X		X	X		
23						X				X		X		X		X			
24						X	X			X	X			X		X	X		
25						X	X	X		X				X	X	X	X		
26																		X	
27																		X	
28																			X
29	X	X				X	X											X	X
30			X	X	X													X	X
31			X	X	X	X	X	X		X	X	X			X	X		X	X
32			X	X	X	X	X			X	X	X						X	
33			X	X	X		X	X	X	X	X	X						X	

Introduction

1 Présentation de l'année

L'année de Terminale est l'année de synthèse du lycée avec une épreuve finale permettant de valider tout ce travail effectué. C'est une année assez compliquée avec en grande partie son orientation post-bac.

Sans vouloir donner un énorme stress avant de commencer sa dernière année de lycée, la Terminale sera le moment d'une très grande autonomie dans sa méthodologie et de sa gestion du temps face au travail et tout ce qui est lié à l'orientation.

Le programme se décompose en 4 thèmes : la combinatoire, la géométrie dans l'espace, l'analyse et les probabilités. Parmi l'ensemble de ces thèmes sont parsemés des algorithmes et de la logique. De façon plus détaillée :

- Combinatoire : principes additif et multiplicatif, liste d'éléments distincts et combinaison
- Géométrie dans l'espace : vecteurs, orthogonalité, distance, représentation paramétrique et équation cartésienne
- Analyse : suite, récurrence, limite de suite, limite de fonction et les opérations, continuité, T.V.I., dérivée seconde, convexité, logarithme, fonction trigonométrique, primitive, équation différentielle, calcul intégral, valeur moyenne, IPP
- Probabilités : probabilité conditionnelle, variable aléatoire, Bernoulli, binomiale, paramètres d'une variable aléatoire, loi des grands nombres, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Tous ces thèmes sont répartis sur l'année de façon à y revenir de façon régulière, cela permet de s'accaparer ces notions.

À travers chacun de ces thèmes, vous y trouverez de l'algorithmique et de la programmation. Pour cela, vous devez être capable de décrire ce que fait un algorithme, son objectif ; d'écrire un programme ou un algorithme simple et enfin de modifier, compléter un programme donné.

Dans ce livre, j'ai utilisé le langage de programmation Python avec l'éditeur PyCharm et pour le côté algorithmique, j'ai utilisé Algobox, la version 1.0.2. Évidemment, vous pouvez utiliser les logiciels avec lesquels vous êtes habitué, cela ne changera (presque) rien !

Vous y trouverez également du vocabulaire ensembliste et de la logique :

- Le vocabulaire ensembliste est utilisé en cours et en exercices. Vous les trouverez principalement dans les thèmes combinatoire et probabilité.

- La logique est principalement présente dans les cours. C'est la base des mathématiques mais cela n'est pas simple. On peut, en premier lieu, la laisser de côté pour y revenir par la suite. Vous n'aurez que peu l'occasion de l'utiliser durant les exercices (ou alors certains, très spécifiques). Par contre, si vous souhaitez faire des études scientifiques, il faudra maîtriser ces notions.

2 Méthodes de travail

Concernant les contrôles

Il faut évidemment être préparé avant un contrôle. Cela commence par avoir appliqué les conseils précédents. Puis dormir correctement afin que sa concentration soit maximale pendant l'épreuve. Et enfin, avoir son matériel : les piles de sa calculatrice, copies, brouillon, de quoi écrire, effaceur, correcteur, etc.

Durant l'épreuve, la première étape commence par lire le sujet globalement (et rapidement) pour pouvoir estimer le temps que l'on va consacrer aux différents exercices (s'il y a un barème, c'est plus simple, sinon, on peut le demander à son professeur s'il veut bien le donner). La deuxième consiste à faire le sujet :

- Si on sait faire la question, on justifie bien sa réponse, de façon soignée.
- Si on bloque, on peut s'aider de la calculatrice, d'un graphique, d'un schéma afin de débloquer la situation. Si c'est un QCM et que l'on sait qu'à chaque question, il n'y a qu'une seule bonne réponse, on peut raisonner par élimination : éliminer les mauvaises réponses plutôt que de trouver la bonne... Si on bloque toujours, on peut mettre le maximum d'informations afin de grappiller quelques points.
- Structurer votre copie de sorte que ce soit bien lisible pour le correcteur, cela donne une bonne image globale et évite de mettre le correcteur dans de mauvaises conditions.

Après l'épreuve

Il s'agit plutôt à la remise de votre copie. Vous voyez votre résultat et ce qui n'a pas été compris, vous devez voir la correction afin de comprendre ce qui vous bloque (pour pas que cela se reproduise). Éventuellement, quelque temps après la correction, vous pouvez (devez) refaire le sujet dans les mêmes conditions que le vrai contrôle.

Au lycée, on vous laisse plus d'autonomie (ce qui vous prépare grandement aux années universitaires). Pour un élève, c'est génial cette autonomie supplémentaire mais cela signifie aussi qu'il faut gérer son quotidien !

En premier lieu, l'organisation est principale : pour éviter de se laisser déborder (ne pas avoir plein d'exercices à faire pour le lendemain, tout en devant réviser pour deux contrôles après une longue journée de lycée alors qu'il y a une éventuelle activité extrascolaire). Cela peut paraître fastidieux et un peu inutile mais vous gagnerez beaucoup de temps au final. En fonction de votre emploi du temps, vous devez vous organiser pour répartir vos devoirs à la maison (ou en heure libre au lycée), ainsi que l'apprentissage et la relecture des cours, des révisions pour les contrôles et enfin

pour refaire les contrôles afin de corriger et comprendre ses erreurs. Ça fait beaucoup mais c'est une gymnastique à prendre et vous verrez que vous n'y passerez que peu de temps au final (et sûrement de moins en moins au fil de l'année).

Mieux vaut pas beaucoup tout le temps qu'énormément d'un coup.

Les conseils sont les suivants pour atteindre cet objectif (si ce n'est pas déjà le cas) :

- ❶ Le premier moment où vous apprenez est en classe : il faut donc être attentif, bien noté le cours afin de pouvoir le réviser tranquillement chez soi.
- ❷ Les devoirs à la maison sont à faire régulièrement avec l'aide du cours, des exercices déjà faits en classe, d'une calculatrice et d'un brouillon. Ne pas hésiter à travailler en groupe (quand je dis «travailler», cela ne signifie pas les faire par quelqu'un d'autre mais il faut que cela soit une aide), cela permet de débloquer une situation. Il ne faut pas passer 5 heures sur une petite question, cela n'a aucun intérêt. Les devoirs à la maison sont importants car cela permet d'assimiler le cours, de s'entraîner régulièrement, de voir si on a bien compris les notions et également savoir si l'on est prêt pour les contrôles. C'est pourquoi, on peut en faire plus et demander une correction à son professeur. En plus de lui montrer que vous êtes motivé, il remarquera vos efforts (pour Parcoursup, cela ne peut être que bénéfique).
- ❸ L'apprentissage du cours est assez essentiel car il y a les notions en soi que vous allez rencontrer en contrôles, des exemples et contre exemples qu'il faut connaître. Vous y trouverez des «exercices» corrigés avec la méthode de votre professeur et qu'il est bon de connaître car il y a de fortes chances qu'elle soit demandée en contrôles. Les définitions sont à connaître par cœur, sans ça, vous aurez quelques difficultés à démontrer parfaitement.
- ❹ La relecture du cours peut se faire la veille d'une journée où on a «Mathématiques» pour remettre ses idées au clair. Elle peut se faire aussi quand on a le temps pour ne pas en perdre dans notre organisation. Le cerveau a besoin de temps pour «digérer» les informations, plus vous relirez, plus vous retiendrez. Cette lecture doit être active et efficace. Cela veut dire que l'on ne doit pas être perturbé toutes les 10 secondes (par quelqu'un, quelque chose ou par des pensées qui n'ont rien à voir) et que l'on doit avoir un brouillon et un crayon car on peut être amené à faire un schéma pour retenir ce qu'on lit ou vérifier une propriété, un exemple ou mettre en valeur une définition, etc.
- ❺ Les révisions pour les contrôles commencent par tout ce qui vient d'être dit. La veille de l'examen, on ne doit pas passer 10 heures à réviser. Cela aura été réparti correctement pendant plusieurs jours. On voit déjà un gain de temps. Le fait d'y avoir passé plusieurs jours permet aussi de poser quelques questions à son professeur, à ses camarades lorsque l'on rencontre un problème sur un point du cours, d'un exercice et donc d'être plus efficace.
- ❻ Refaire le contrôle à l'aide du corrigé pour comprendre pourquoi on a bloqué et si cela n'est pas suffisant, demander à son professeur. Cela peut être également des révisions pour le prochain contrôle...

3 Méthodes face aux contrôles

Te voilà face à ta copie avec tout ce que tu as accompli pour être dans les meilleures conditions. Il ne reste plus qu'à remplir cette copie !

Encore quelques petits conseils :

► **Regarde l'énoncé dans sa globalité**

Cela permet de savoir par quoi tu vas commencer, ce qui apporte le plus de points, ce que tu maîtrises le plus, le moins...

► **L'organisation**

En fonction du nombre de points et des difficultés des exercices, tu dois pouvoir accorder un certain timing par exercice pour ne pas perdre trop de temps sur des choses qui ne t'apporteront pas beaucoup de points au final.

Prends tout le temps nécessaire. Ce n'est pas un sprint. Le premier à rendre sa copie n'a pas de point supplémentaire. Par contre, tu peux grappiller le maximum de points en allant jusqu'au bout.

► **Face aux exercices**

Tu fais les questions dans l'ordre, en structurant bien ta copie. Ce que tu as réussi à faire, tu peux noter un V sur l'énoncé à la question correspondante. Ce que tu n'as pas réussi, tu peux y mettre une croix sur l'énoncé afin de pouvoir y revenir plus facilement si tu as du temps. Tu peux également laisser un espace sur la copie.

Pour chaque question, tu peux (et souvent tu dois) utiliser les résultats précédents. Par contre, tu n'utilises jamais les résultats des questions suivantes ! Quand on bloque, n'hésite pas à laisser des traces de ton raisonnement. Quand il n'y a rien, il n'y a aucun point. Quand il y a quelque chose, on peut espérer quelques points, même si le raisonnement n'a pas abouti. Si tu bloques, la calculatrice (si elle est autorisée) peut éventuellement t'aider. Essaie de faire des liens avec un théorème, un exemple... vus dans tes révisions.

Relis bien la question, parfois au bout de quelques minutes dans une réflexion on ne sait plus ce qu'il fallait faire et on risque de faire quelque chose qui n'a plus rien à voir.

► **Du soin**

Soigne ta copie. Imagine-toi à la place du professeur qui va être face à ta copie (et en fait à plusieurs tas de copies). C'est une tâche assez déplaisante pour un enseignant que de corriger. C'est long et pénible. Assure-toi de ne pas lui compliquer cette mission par un déchiffrement de chaque ligne car tu aurais mal écrit ou mal structuré ta copie. Le temps perdu et l'agacement ne sont pas des gages pour avoir sa clémence.



Devoirs





Notions abordées

- ▶ Combinatoire
- ▶ Principes additif et multiplicatif

Exercice 1.1

6/20 pts

25 min

Partie A

Dans une classe de 35 élèves, il y en a 20 qui font l'option sport, 12 qui font du latin et 10 qui ne font aucune de ces deux options.

Combien de personnes font à la fois l'option sport et l'option latin ?

Partie B

Soit A , B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E .

- 1 Montrer que l'on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) \\ &\quad - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Indication :

On pourra utiliser la relation : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- 2 On considère un groupe de 32 personnes françaises. Parmi ces personnes, 26 parlent anglais, 20 parlent espagnol et 7 parlent allemand. Chaque personne du groupe parle au moins une de ces trois langues. De plus, 4 parlent anglais et allemand, 15 parlent anglais et espagnol et 3 parlent espagnol et allemand. Y a-t-il (au moins) une personne dans ce groupe qui parle les trois langues ?

Exercice 1.2

3/20 pts

10 min

La formule proposée par un restaurant permet de prendre soit une entrée et un plat, soit un plat et un dessert.

Sachant que la carte contient trois entrées, quatre plats et deux desserts, combien de repas différents sont compatibles avec la formule ?

Exercice 1.3

11/20 pts

40 min

Les 5 questions sont indépendantes les unes des autres.

- 1 On effectue n tirages successifs avec remise dans une urne contenant p jetons distincts, avec n et p entiers non nuls.
Combien de tirages possibles peut-on obtenir ?

- 2 Une plaque d'immatriculation en France se présente depuis 2009, sous la forme :

$$AA - 123 - AA$$

Pour chaque lettre, toutes celles de l'alphabet sont autorisées sauf *I*, *O* et *U*.
Pour les trois chiffres au centre, la série démarre à 001 et se termine à 999 sans exception.

- a. Donner le nombre de plaques possibles avec ces règles.
- b. Pour être exact, les séries *SS* et *WW* du bloc de gauche sont interdites et la série *SS* du bloc de droite est interdite.

Donner le nombre réel de plaques possibles.

- 3 On construit un nombre à 3 chiffres à l'aide des chiffres 2, 3, 5, 7 et 8, en autorisant la répétition.

- a. Combien est-il possible de construire de tels nombres ?
- b. Combien de ces nombres sont inférieurs à 500 ?
- c. Combien de ces nombres sont pairs ?

- 4 On considère un cadenas à 4 chiffres allant de 0000 à 9999.

On ne se souvient plus du code mais l'on sait qu'il ne possède pas de 0.

Combien y a-t-il de codes possibles ?

- 5 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Dans notre alphabet de 26 lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?



Notions abordées

- ▶ Combinatoire, permutations
- ▶ k -liste
- ▶ Combinaison

Exercice 2.1

7/20 pts

20 min

Les trois questions sont indépendantes.

- 1 On considère le mot UPLET.
 - a. Combien y a-t-il d'anagrammes de ce mot ?
 - b. Combien y a-t-il d'anagrammes de ce mot terminant par T ? puis commençant par P et finissant par T ?
- 2 On considère le mot ELEMENT.
 - a. En distinguant les trois lettres E, combien y a-t-il d'anagrammes de ce mot ?
 - b. Dédurre le nombre d'anagrammes différents du mot ELEMENT.
- 3 En généralisant le principe, donner le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT

Exercice 2.2

4/20 pts

15 min

On considère un club de tennis de table avec n joueurs.

Le président du club souhaite créer une équipe de p joueurs (avec $1 \leq p \leq n$) dont un des joueurs sera le capitaine de l'équipe.

- 1 **Première méthode :**

Il souhaite commencer par choisir le capitaine, puis compléter l'équipe par les $p - 1$ joueurs restants.

Dénombrer le nombre de situations possibles pour le président du club.
- 2 **Deuxième méthode :**

Il souhaite commencer par choisir l'équipe, soit les p joueurs et enfin choisir l'un d'entre eux comme capitaine.

Dénombrer le nombre de situations possibles pour le président du club.
- 3 Que peut-on déduire ?
- 4 Démontrer le résultat cette fois-ci, par calcul.

Exercice 2.3

9/20 pts

40 min

Partie A

- 1 On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 4; 6; 8; 9\}$.
 - a. Combien de nombres à 4 chiffres distincts pris dans l'ensemble E peut-on écrire ?
 - b. Parmi tous ces nombres, combien y en a-t-il qui commence par 1 ? par 2 ?
 - c. Parmi tous ces nombres, combien y en a-t-il qui se termine par 1 ? par 2 ?
 - d. Que vaut la somme de tous ces nombres à 4 chiffres ?
- 2 Reprendre les questions précédentes en acceptant que les chiffres ne soient pas distincts dans le nombre à 4 chiffres.

Partie B

Voici une fonction écrite en Python :

```
def mystere(n):  
    m=[]  
    for i in range(1,n-1):  
        for j in range(i+1,n):  
            for k in range(j+1,n+1):  
                m.append([i, j, k])  
    return(len(m))
```

Précision : **for i in range(a,b)** est une boucle qui donne à la variable i les valeurs successives de a à $b - 1$. Si $a \geq b$, la variable i ne prend aucune valeur.

- 1 Que contiendra la variable **m** à la fin de l'exécution de la fonction **mystere** pour une valeur **n** donnée où **n** est un entier supérieur ou égal à 3 ?
- 2 Quel est le rôle de cette fonction ?

Partie C

Créer une fonction qui pour un argument **n** donné, renvoie la liste des 2-listes d'éléments distincts de l'ensemble $E = \{1; 2; 3; \dots; n\}$.

Liste des mots à surligner dans les énoncés

- ❖ **Mot** : k -liste.
- ❖ **Formule** : factorielle, coefficient binomial



Notions abordées

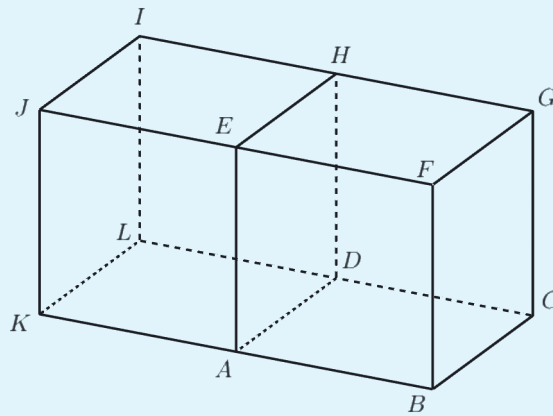
- Géométrie vectorielle
- Espace
- Base
- Colinéarité
- Coplanaire
- Combinaison linéaire

Exercice 3.1

9/20 pts

30 min

Considérons les deux cubes accolés, comme sur la figure ci-dessous :



- 1 Par lecture graphique, les vecteurs $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{KD}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
- 2 Dans le repère $(L; \overrightarrow{LK}, \overrightarrow{LD}, \overrightarrow{LI})$, donner les coordonnées des points L, K, A, D, J, E, H et I .
- 3 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{KD}$.
- 4 Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{KD}$ ne sont pas colinéaires.
- 5 a. Montrer que l'équation vectorielle $\overrightarrow{KE} = \alpha \overrightarrow{KH} + \beta \overrightarrow{KD}$ équivaut au système

$$\begin{cases} 0 = -\alpha - \beta \\ 1 = \alpha + \beta \\ 1 = \alpha \end{cases}$$
 - b. En déduire que l'équation vectorielle n'admet pas de solution ?
 - c. Les vecteurs $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{KD}$ forment-ils une base de l'espace ?

Exercice 3.2

11/20 pts

40 min

On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les points $A(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; 3)$, $C(0; 1; 1)$, $D(1; 0; -2)$ et $E(2; -1; 1)$.

On considère les plans P passant par les points A , B et C , et, P' passant par les points C , D et E .

- 1 Donner la position relative des plans P et P' .
- 2 Déterminer deux vecteurs directeurs de P (que l'on notera $\vec{u}$ et $\vec{v}$) puis de P' (que l'on notera $\vec{w}$ et $\vec{z}$).
- 3 Notons $\vec{a}$ un vecteur directeur de la droite d'intersection des plans P et P' .
Le vecteur $\vec{a}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ ($\vec{a} = k\vec{u} + k'\vec{v}$) et le vecteur $\vec{a}$ est une combinaison linéaire de $\vec{w}$ et de $\vec{z}$ ($\vec{a} = t\vec{w} + t'\vec{z}$) où k , k' , t et t' sont des réels.
 - a. Exprimer k , k' et t' en fonction de t .
 - b. Donnons à t la valeur 4. Déduire la valeur de k , k' et t' .
 - c. Donner les coordonnées de $\vec{a}$.

- 4 On considère la droite (d) passant par le point $F(1; 4; -1)$ de vecteur directeur

$$\vec{b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et de la droite d'intersection des plans P et P' , si un tel point existe.

Liste des mots à surligner dans les énoncés

- ❖ Coplanaire
- ❖ Base



Notions abordées

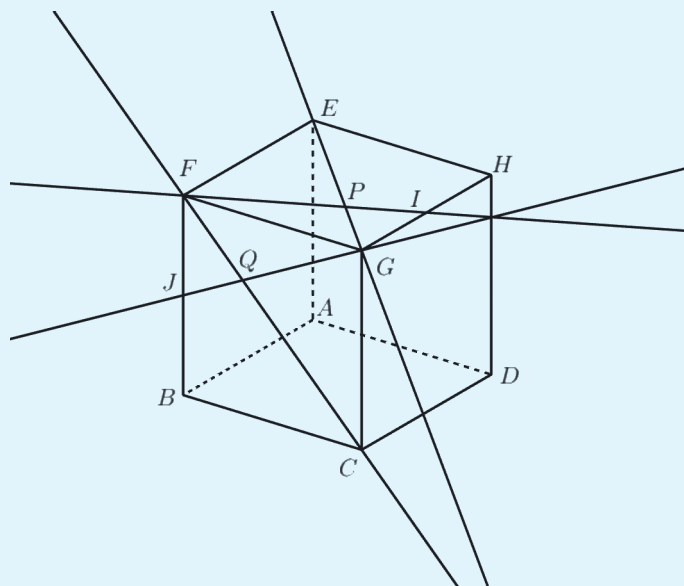
- Géométrie vectorielle
- Orthogonalité
- Vecteur normal
- Équation cartésienne

Exercice 4.1

11/20 pts

40 min

Dans un repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on construit le cube $ABCDEFGH$. Soit I le milieu de $[HG]$, J le milieu de $[BF]$.



- 1 Donner la position relative des droites (IF) et (EG) , puis des droites (FC) et (GJ) .
- 2 Notons P le point d'intersection des droites (IF) et (EG) , et, Q le point d'intersection des droites (FC) et (GJ) .
Donner les coordonnées de tous les points.
- 3 Déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GJ}$ et déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{EGJ}$ à 0,1 degré près.
- 4 Donner la nature exacte du triangle GJE .
- 5 Montrer que la droite (QP) est perpendiculaire aux droites (EG) et (FC) .
- 6 Notons K un point de la droite (AD) . On admet que les coordonnées de K peuvent se noter $(0; x; 0)$ où x est un réel.
Existe-t-il un point K de la droite (AD) tel que la droite (GK) soit orthogonale au plan (FIC) ?

- 7 Notons L un point du plan (ADE) . On admet que les coordonnées de L peuvent se noter $(0; x; y)$ où x et y sont des réels.

Montrer qu'il existe un unique point L du plan (ADE) tel que la droite (GL) soit orthogonale au plan (FIC) et préciser la position de ce point L sur la face $(ADHE)$.

Exercice 4.2

9/20 pts

30 min

Dans un repère orthonormé, on donne quatre points $A(1; 1; 1)$, $B(-3; -1; 1)$, $C(2; 3; 2)$ et $D(3; -3; 7)$.

- 1 La droite (AD) est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

- 2 Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan (ABC) .

- 3 On définit le plan médiateur du segment $[AC]$ par le plan passant par le milieu du segment $[AC]$ tel que $\overrightarrow{AC}$ soit orthogonal au plan.

Déterminer les coordonnées d'un point appartenant au plan médiateur du segment $[AC]$, un vecteur normal de ce plan et une équation cartésienne du plan.

- 4 On considère le point $E\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Montrer que les points E , B et C sont alignés puis que la droite (AE) est perpendiculaire à la droite (BC) .

- 5 Déterminer l'aire du triangle ABC .

- 6 Déterminer D' , le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .

- 7 Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Liste des mots à surligner dans les énoncés

- ❖ Projeté orthogonal
- ❖ Produit scalaire
- ❖ Volume d'un tétraèdre



Notions abordées

- Équation cartésienne
- Représentation paramétrique
- Distance

Exercice 5.1

5/20 pts

20 min

Dans un repère orthonormé, on donne trois points $A(1; 1; 1)$, $B(-3; -1; 1)$ et $C(2; -1; 0)$.

- 1 Donner une représentation paramétrique de la droite (BC) .
- 2 Donner une représentation paramétrique du plan (ABC) .
- 3 Donner les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC) .
- 4 Donner les coordonnées du pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

Exercice 5.2

10/20 pts

45 min

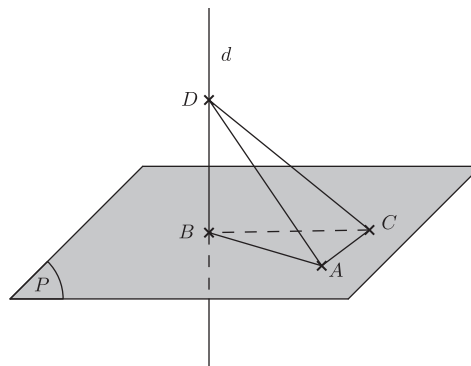
Inspiré du baccalauréat 2019 au Liban.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un plan P , on considère un triangle ABC rectangle en A .

Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B . On considère un point D de cette droite distinct du point B .



- 1 Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD) .
On appelle *bicoïn* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.
- 2 Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est un bicoïn.

- 3 a. Justifier que l'arête $[CD]$ est la plus longue arête du bicoïn $ABCD$.
 b. On note I le milieu de l'arête $[CD]$.
 Montrer que le point I est équidistant des quatre sommets du bicoïn $ABCD$.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point $A(3; 1; -5)$ et la

droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 9, \text{ où } t \in \mathbb{R}. \\ z = t - 3 \end{cases}$

- 1 Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A .
- 2 Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point $B(5; 5; -1)$.
- 3 Justifier que $C(7; 3; -9)$ appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A .
- 4 Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d .
 - a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.
 - b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.
 - c. En déduire les coordonnées des deux points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B .

Exercice 5.3

5/20 pts

20 min

On considère un repère orthonormé de l'espace.

- 1 Soit $A(3; 1; 2)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donner une équation cartésienne du plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

- 2 Soit $B(1; -1; 0)$, $C(0; 1; 1)$ et $D(2; 5; -3)$.
 Donner une équation cartésienne du plan (BCD) .

- 3 Soit un plan P d'équation cartésienne $2x - y + z + 1 = 0$.
 Donner un vecteur normal de P et un point du plan.

- 4 Déterminer la distance du point A au plan P .

Liste des mots à surligner dans les énoncés

» Distance d'un point à un plan



Notions abordées

- L'ensemble des notions de la géométrie dans l'espace

Exercice 6.1

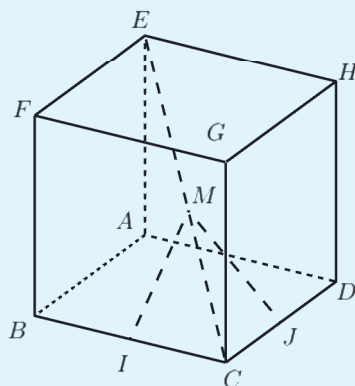
5/20 pts

30 min

Inspiré du baccalauréat 2011 de Centres Étrangers.

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. Soit M un point quelconque du segment $[CE]$. Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



- Donner, sans justification, les coordonnées des points C , E , I et J .
 - Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1 - t, 1 - t, t)$.
- Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment $[IJ]$.
 - En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M .
 - Exprimer IM^2 en fonction de t .
- Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment $[CE]$ pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale. On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{IMJ}$.

 - En admettant que la mesure appartient à l'intervalle $[0; \pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.
 - En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.
 - Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

- En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment $[CE]$ telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.
- Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment $[CE]$.

Exercice 6.2

10/20 pts

45 min

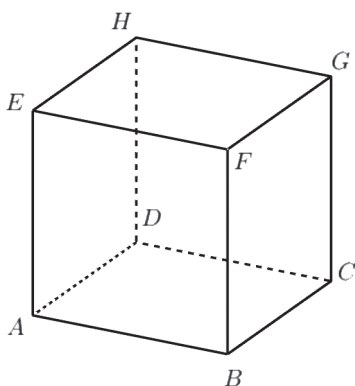
Inspiré du baccalauréat 2018 de Métropole – La Réunion.

Le but de l'exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

On rappelle que dans un tétraèdre $MNPQ$, la hauteur issue de M est la droite passant par M orthogonale au plan (NPQ) .

Partie A : Étude de cas particuliers

On considère un cube $ABCDEFGH$.



On admet que les droites (AG) , (BH) , (CE) et (DF) , appelées «grandes diagonales» du cube sont concourantes.

1 On considère le tétraèdre $ABCE$.

- Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.
- Les quatre hauteurs du tétraèdre $ABCE$ sont-elles concourantes ?

2 On considère le tétraèdre $ACHF$ et on travaille dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

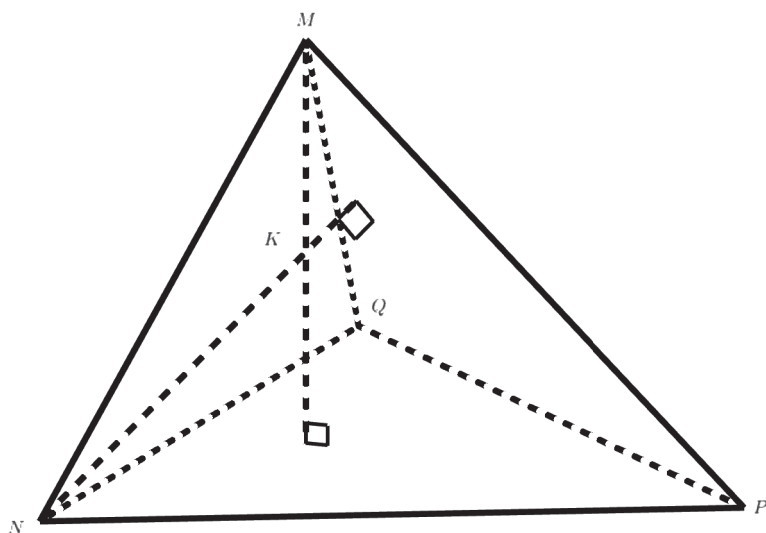
- Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.
- En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.
- Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre $ACHF$ issues respectivement des sommets A , C et H .

Les quatre hauteurs du tétraèdre $ACHF$ sont-elles concourantes ?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

Partie B : Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre $MNPQ$ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K . Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



- 1 a. Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.
- b. Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

- 2 Montrer que les arêtes $[MN]$ et $[PQ]$ sont orthogonales.

Ainsi, on obtient la propriété suivante :

Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

(On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont «opposées» lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Partie C : Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$R(-3, 5, 2), S(1, 4, -2), T(4, -1, 5) \text{ et } U(4, 7, 3).$$

- 1 Le tétraèdre $RSTU$ est-il orthocentrique ? Justifier.
- 2 Créer une fonction écrite en Python qui prend en argument les coordonnées de 4 points de l'espace et qui renvoie si le tétraèdre correspondant n'est pas orthocentrique ou s'il l'est peut-être.

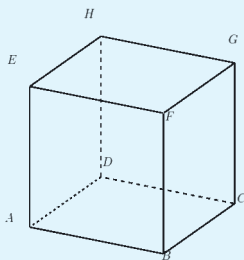
Exercice 6.3

5/20 pts 30 min

Inspiré du baccalauréat 2018 de Métropole – La Réunion.

Soit un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère les points M , N et P de coordonnées respectives $M\left(1, 1, \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ et $P\left(1, 0, -\frac{5}{4}\right)$.



- 1 Placer M , N et P sur la figure.
- 2 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
En déduire que les points M , N et P ne sont pas alignés.
- 3 On considère la fonction suivante écrite en Python où $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$ sont des réels saisis par l'utilisateur :

```
def mystere(xM, yM, zM, xN, yN, zN, xP, yP, zP):
    d=xN-xM
    e=yN-yM
    f=zN-zM
    g=xP-xM
    h=yP-yM
    i=zP-zM
    return(d*g+e*h+f*i)
```

- a. Exécuter à la main cette fonction avec les coordonnées des points M , N et P données ci-dessus.
- b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?
- 4 On considère la fonction suivante. Compléter la fin pour qu'elle teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M .

```
def mystere2(xM, yM, zM, xN, yN, zN, xP, yP, zP):
    d=xN-xM
    e=yN-yM
    f=zN-zM
    g=xP-xM
    h=yP-yM
    i=zP-zM
    k=d*g+e*h+f*i
```

- 5 On admet que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal au plan (MNP) .
- a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP) .
 - b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
- 6 Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ .
- a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}, \frac{24}{35}, \frac{23}{35}\right)$.
 - b. Montrer que $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$.
 - c. Calculer le volume du tétraèdre $MNPF$.