Guy Barles
Emmanuel Chasseigne
Christine Georgelin

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Cours, exercices et problèmes

Licence
Master
Agrégation

ellipses

Références sciences

Licence
Master
Agrégation

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Cours, exercices et problèmes

Guy Barles, Emmanuel Chasseigne, Christine Georgelin

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-114555
Dépôt légal : juin 2026

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage est basé sur un cours d'introduction à l'Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles, réellement enseigné en Maîtrise de Mathématiques puis en Master 1ère année à l'Université de Tours à partir du début des années 1990, sous une forme et avec des contenus qui ont été adaptés chaque année ; nous y avons ajouté des énoncés d'exercices plus ou moins longs, inspirés des travaux dirigés et des examens qui ont été donnés tout au long de cette période d'enseignement.

Ce cours avait initialement un objectif multiple :

(i) fournir aux étudiants quelques bases d'Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles, en commençant par décrire des idées essentielles utilisées pour l'étude de ces équations, tout en restant dans des cadres les plus simples possibles ;

(ii) leur faire manipuler un large spectre de Mathématiques élémentaires « in vivo », c'est-à-dire sur un problème concret devant être résolu du début à la fin, par opposition aux cours classiques qui ciblent un domaine particulier de la discipline et qui l'approfondissent de manière souvent abstraite ;

(iii) leur apprendre que l'on peut faire (de temps en temps) des Mathématiques non rigoureuses – c'est-à-dire sans se soucier des justifications nécessaires qui pourront être données a posteriori –, l'important étant d'en être conscient.

Certains passages de ce cours n'ont donc pour objectif que de faire revoir certaines notions ou certaines techniques aux étudiants et ils pourront sembler artificiels.

En tout cas, l'ensemble est présenté de la manière la plus accessible possible pour des étudiants possédant de bonnes connaissances du programme de Licence. Cette facilité d'accès nous paraît l'intérêt majeur de ce livre. Également, nous utiliserons parfois des résultats de niveau Master afin de démontrer certains autres résultats plus délicats, mais qui pourront être admis sans problème.

D'un point de vue plus scientifique, nous avons tenté de faire passer auprès de nos étudiants l'idée (qui semble maintenant bien admise et même évidente pour tous les mathématiciens appliqués), que, pour bien résoudre numériquement une équation, il faut la connaître aussi bien que possible du point de vue théorique et que, par conséquent, le travail du numéricien doit être une démarche complète de la modélisation – au moins la compréhension des phénomènes en jeu – jusqu'à la simulation numérique, en passant par l'étude théorique des équations (même sommaire) et l'implémentation de méthodes de résolution adaptées. Nous avons illustré ce propos par plusieurs exemples où nous décrivons les diverses étapes de la résolution numérique d'équations simples, depuis l'étude théorique de l'équation jusqu'à (quasiment) la programmation des algorithmes. En revanche, nous avons délibérément délaissé l'aspect modélisation pour maintenir le cours dans des limites raisonnables.

Ce livre s'articule en deux parties, la première sur les méthodes de différences finies, la seconde sur la méthode des éléments finis, ce qui correspondait initialement aux deux semestres d'enseignement du cours dont il est inspiré. La date de création du cours explique en partie pourquoi la *méthode des volumes finis* n'est pas abordée : au début des années 1990, cette méthode était beaucoup moins développée que les deux autres et, de toute façon, là aussi, il aurait été difficile d'imposer ce thème supplémentaire aux étudiants. Nous renvoyons le lecteur(1) intéressé par la méthode des volumes finis au livre de Di Menza [15]. De même, nous ne traitons pas les problèmes spectraux et les méthodes de calcul approché des valeurs propres pour lesquels nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage de Sainsaulieu [19].

La partie « différences finies » traite de manière complètement élémentaire les trois types d'équations en dimension 1 d'espace (une variable de temps s'y rajoutera dans le cas des équations d'évolution), en mettant en évidence leur particularités et leurs propriétés essentielles :

1. Les équations elliptiques avec les deux approches « solutions classiques/principe du maximum » et « solutions généralisées/espace de Sobolev/approche variationnelle ».
2. Les équations de transport avec la méthode des caractéristiques et l'impor-

(1) Nous profitons de cette première adresse au « lecteur » pour indiquer que nous utiliserons cette forme neutre tout au long de ce livre comme un terme générique qui signifie aussi bien lecteur que lectrice. Et nous espérons que nos lectrices seront nombreuses !

tance de la vitesse (finie) de propagation ainsi que l'idée essentielle de cône de dépendance.

3. Les équations paraboliques où l'aspect vitesse infinie de propagation se mêle à l'aspect équation d'évolution.

Évidemment la résolution de ces équations – et en particulier le cas des équations elliptiques – conduit naturellement aux thèmes « analyse numérique matricielle » et « algorithmes de gradient » et, pour l'équation de transport de même que pour les équations paraboliques, à étudier la stabilité des schémas numériques. Sans oublier de parler un peu de convergence et même d'estimations de convergence.

Le choix de se limiter à la dimension 1 d'espace pour cette partie est motivé par le désir de ne pas obliger le lecteur à se plonger dans un premier temps dans la théorie des Distributions et l'Analyse Fonctionnelle « pure et dure ».

La partie « éléments finis » est plus abstraite et plus technique car le cadre des « espaces de Sobolev » est moins simple dans le cas multi-dimensionnel (même bi-dimensionnel) qu'il ne l'est en dimension 1. Mais cette partie passe un message important aux étudiants : alors que, dans le cas des différences finies, on a l'impression de « bricoler » des schémas, l'idée sous-jacente aux « éléments finis » est de fournir des méthodes basées sur la théorie : pour chercher une solution dans un espace fonctionnel V – typiquement un espace de Sobolev –, on considère des sous-espaces $V_h \subset V$ de dimensions finies qui « approchent » V et on résout une équation dans V_h, ce qui est plus simple puisque l'on est en dimension finie. La méthode numérique se réduit donc au choix des V_h et, dans le cadre simple que nous considérons où le théorème de Lax-Milgram s'applique, on a des estimations de convergence via des estimations d'erreurs d'interpolation dans les espaces de Sobolev, pour lesquelles le Lemme de Peetre fait des merveilles.

Pour conclure cet avant-propos, nous ne résistons pas au plaisir de reproduire ici (par pure provocation) la célèbre boutade de Stan Osher, UCLA(2) qui, nous l'espérons, motivera le lecteur dans l'apprentissage de l'Analyse Numérique (donc à lire ce livre !) :

« Savoir si la solution d'une équation existe ou si elle est unique, peu importe ! Mais trouver un moyen efficace pour la calculer, voilà la vraie question ... »

(2) University of California in Los Angeles.

À propos des exercices

Ou de la bonne manière d'aborder un exercice de Maths afin qu'il soit profitable.

La résolution d'un exercice de Maths comporte trois étapes importantes : la première consiste à bien comprendre la question posée, la seconde à trouver un moyen d'y répondre, et dans la troisième il s'agit de rédiger de façon la plus claire et la plus convaincante possible, la ou les solutions. On se polarise souvent sur la deuxième étape car elle semble essentielle mais l'expérience montre que beaucoup d'étudiants sont bloqués à cause de la première : faute de bien concevoir ce qui est demandé, ils ne peuvent en aucun cas fournir une réponse un tant soit peu satisfaisante.

C'est la raison pour laquelle nous conseillons de prendre un peu de temps – voire beaucoup au début d'un apprentissage – pour bien analyser chaque question avant d'essayer de la traiter : à quelle partie du cours cet exercice semble-t-il associé ? pourquoi n'est-ce pas évident ? quelle est la difficulté ? que dois-je faire pour la résoudre ? En fait, l'intérêt des premiers exercices que l'on fait sur un sujet donné est bien d'en comprendre l'utilité et de voir comment le cours peut aider à trouver des pistes pour aboutir à une solution.

La seconde étape est souvent l'objet de tous les fantasmes car, évidemment, beaucoup d'étudiants pensent que la plupart des « exos » sont « infaisables » – souvent d'ailleurs à cause de l'incompréhension de l'énoncé – et on observe trop souvent un goût immodéré pour les corrections d'exercices. Mais lire un corrigé n'est profitable que si l'on a suffisamment « séché » sur l'exercice en question car alors on comprend bien pourquoi la solution proposée passe outre les difficultés que l'on a rencontrées. Sinon on assiste plus ou moins à de la prestidigitation : fascinant mais pas tout à fait reproductible...

Enfin, c'est souvent au cours de la rédaction finale – la troisième étape – que l'on se rend compte qu'un argument fait défaut ou qu'une erreur s'est glissée : que la personne qui n'a jamais oublié de vérifier qu'un inoffensif ε dépendait d'un autre paramètre avant de le faire tendre vers zéro jette la première pierre ! Rédiger proprement une démonstration est donc un excellent moyen de vérifier qu'elle est tout à fait correcte. De plus, l'exercice qui consiste à “nettoyer” la preuve, la simplifier et trouver les arguments les plus pertinents voire les plus élégants fait toujours considérablement progresser.

Voici nos conseils pour s'attaquer à la résolution d'un exercice en général (et aux nôtres en particulier) :

1. Ne pas hésiter à réfléchir longuement tout seul devant sa feuille (ce n'est *jamais* du temps perdu).
2. En cas d'échec, aller voir un camarade pour voir s'il en sait plus (apprentissage de la collaboration scientifique, niveau 1).
3. Si la solution 2 échoue également, s'enquérir auprès d'un enseignant (apprentissage de la collaboration scientifique, niveau 2).
4. Éventuellement chercher des indications/une solution sur internet *avec un grand esprit critique* (d'expérience, les solutions trouvées sur des sites internet non universitaires contiennent souvent des erreurs...).
5. En cas de désespoir absolu, vous pourrez contacter les auteurs aux adresses :

   – christine.georgelin@idpoisson.fr
   – emmanuel.chasseigne@idpoisson.fr
   – ou guy.barles@idpoisson.fr.

   Ils ne vous fourniront peut-être pas des solutions complètes mais vous guideront vers la solution que vous trouverez vous-même.

Les solutions collaboratives (contact avec un humain) sont à privilégier car non seulement on peut parvenir à résoudre *un* exercice mais on se confronte aussi à un autre point de vue, une autre façon d'aborder une question, voire une autre manière de penser. Il n'y a rien de plus efficace pour progresser. Les chercheurs savent combien ces collaborations sont profitables sur le moyen et sur le long terme et commencer très tôt à fonctionner de la sorte ne peut pas être une mauvaise idée... Des discussions avec d'autres étudiants ou avec des enseignants apportent *beaucoup plus* qu'une solution toute prête et d'ailleurs l'expérience montre que ces solutions prémâchées n'apportent rien sur le long terme (sauf éventuellement quelques erreurs qui peuvent, hélas, s'ancrer dans le cerveau).

Table des matières

Avant-propos **i**

À propos des exercices **v**

Introduction générale **1**

I Introduction à la méthodes des différences finies **5**

1 Introduction **7**

1.1 Équations elliptiques . . . 7
1.2 Équations hyperboliques . . . 8
1.3 Équations paraboliques . . . 9

2 Le problème de Dirichlet : étude théorique **11**

2.1 Quelques propriétés des solutions du problème de Dirichlet . . . 12
2.2 Le Principe du Maximum . . . 14
2.3 L'approche variationnelle du problème de Dirichlet . . . 18
2.3.1 L'approche élémentaire . . . 18
2.3.2 Les espaces fonctionnels $H^1(]0,1[)$ et $H^1_0(]0,1[)$ . . . 22
2.3.3 Résolution directe du problème variationnel dans l'espace $H^1_0(]0,1[)$ . . . 31

3 Discrétisation de l'équation : les schémas numériques et leurs propriétés **39**

3.1 Les schémas numériques « différences finies » pour le problème de Dirichlet . . . 39

3.2 Étude du système linéaire donné par le schéma 44
3.2.1 Les valeurs propres de la matrice d'approximation . . . 45
3.2.2 Monotonie et stabilité 48

4 Rappels sur quelques méthodes numériques de résolution de systèmes linéaires 55
4.1 Les méthodes directes 56
4.1.1 Rappels sur la méthode de Gauss 56
4.1.2 Factorisation LU d'une matrice 60
4.1.3 Factorisation de Cholesky 63
4.2 Les méthodes itératives 66
4.2.1 Le principe général 68
4.2.2 Quelques exemples de méthodes itératives 71
4.3 Conditionnement d'une matrice ou d'un système linéaire 79

5 Une autre méthode numérique pour calculer la solution du problème de Dirichlet : l'approche variationnelle 83
5.1 Discrétisation du problème variationnel 83
5.2 Systèmes linéaires et problèmes d'optimisation : un résultat fondamental 85

6 Méthodes de gradient pour la résolution de problème d'optimisation 93
6.1 Premier essai : méthode du gradient à pas constants 93
6.2 Deuxième essai : méthode de plus grande pente 94
6.3 Troisième essai : méthode du gradient conjugué 101
6.3.1 Présentation de la méthode 101
6.3.2 Justification de la méthode du gradient conjugué (I) : l'approche analytique. 102
6.3.3 Justification de la méthode du gradient conjugué (II) : l'approche géométrique 104
6.3.4 Convergence de la méthode du gradient conjugué 106

7 Un résultat de convergence pour le schéma numérique 113

8 Annexe : rappels d'analyse hilbertienne 119
8.1 Les résultats fondamentaux 119
8.2 Convergence faible 122
8.2.1 Quelques résultats utiles 124

Problèmes de révision 129

9 Équations hyperboliques 137
9.1 L'étude théorique 137
9.2 L'approche numérique 143
9.2.1 Les schémas explicites les plus standard 144
9.2.2 Étude de la stabilité des principaux schémas explicites . 145
9.2.3 Étude de la stabilité des principaux schémas implicites . 150
9.2.4 Un résultat de convergence 154
9.2.5 Schémas d'ordre supérieur 158
9.2.6 Approximation par un domaine de calcul borné 159

10 Équations paraboliques 163
10.1 Approche théorique 163
10.2 Approche numérique 170
10.3 Convergence des schémas 173
10.4 Aproximation par un domaine de calcul borné 175

II Introduction à la méthode des éléments finis 177

11 Les principes généraux de la méthode des éléments finis 179
11.1 Introduction 179
11.2 L'approche abstraite 180
11.2.1 Le théorème de Lax-Milgram 180
11.2.2 La méthode de Galerkin 182
11.3 Éléments finis de Lagrange en dimension 1 185

12 EDP en dimension supérieure : un peu de théorie 193

12.1 Un problème modèle 193
12.2 Les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ 194
12.2.1 L'espace $H^1(\Omega)$ 194
12.2.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$. 197
12.2.3 Un outil efficace pour prouver des équivalences de normes : le Lemme de Peetre 199
12.2.4 L'inégalité de Poincaré et l'équivalence des normes sur $H_0^1(\Omega)$ 204

13 La méthode des éléments finis en dimension supérieure 209

13.1 Présentation générale d'une méthode d'éléments finis 209
13.2 Exemples d'éléments finis et études de leurs propriétés d'unisolvance 211
13.2.1 Éléments de Lagrange 211
13.2.2 Élements de Hermite 213
13.2.3 Triangle d'Argyris 214
13.3 Interpolation de fonctions de $H^m(\Omega)$ et erreurs d'interpolation sur le triangle de référence 216
13.3.1 Cas des éléments de Lagrange 217
13.3.2 Cas des éléments de Hermite 218
13.3.3 Cas du triangle d'Argyris 218
13.4 Erreurs d'interpolation dans le cas d'un triangle quelconque . . 218
13.4.1 Retour sur l'estimation de $u - u_h$ 224

14 Un exemple de mise en œuvre 229

Appendice : correction des problèmes de révision 237

Introduction générale

Comme énoncé dans le titre puis l'avant-propos, l'objectif de ce livre est de donner une introduction élémentaire à l'Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles (EDP ou edp en abrégé) en parcourant le spectre allant de la modélisation jusqu'à l'implémentation de schémas numériques, en passant par l'étude théorique des edps ou des schémas et la description des méthodes d'analyse numérique matricielle ou des méthodes de gradient.

De façon un peu plus précise, quand on s'attaque à un problème concret, plusieurs étapes sont nécessaires, certaines plus mathématiques que d'autres qui sont le plus souvent l'apanage de physiciens, de chimistes, de biologistes, d'économistes ou d'informaticiens. Ce parcours peut se résumer ainsi :

1. La première étape est celle de la **Modélisation** : il s'agit ici de bien comprendre les *lois* physiques, chimiques, biologiques ou économiques qui régissent un phénomène et être capable d'écrire des équations *assez simples* pour le décrire. Par exemple, dans le cadre de la météorologie – peut-être regardez-vous tous les jours des prévisions qui sont obtenues grâce à cette démarche de modélisation puis de simulation qui feront l'objet des étapes suivantes –, ces équations qui sont des EDP très complexes concernent en particulier la température, la pression de l'air ou la vitesse du vent. Dans certains autres cas, on est amené à un problème d'optimisation : je suis marin, quel cap dois-je suivre pour atteindre tel port le plus rapidement possible ? On ne se préoccupera pas ici de cette première étape : même si les mathématiciens interviennent de plus en plus dans la modélisation, en renfort des physiciens, chimistes, biologistes ou économistes, c'est une activité très spécique. En revanche, nous étudierons trois types d'EDP classiques et des problèmes d'optimisation qui sont apparus dans la modélisation de phénomènes dans toutes les disciplines que nous avons mentionnées.

2. Une fois ces équations ou ces problèmes d'optimisation écrits, le but du mathématicien est de les analyser : dans les cas concrets, nous devons admettre que la complexité des équations rend cette tâche quasi-impossible mais l'étude de modèles simplifiés à outrance – on parle souvent de *toy models* – permet de tirer des enseignements intéressants qui permettront de choisir une approche numérique adaptée pour la simulation. Dans ces cas simples, on essaie d'établir que les équations sont *bien posées*, c'est- à-dire qu'elles possèdent une unique solution qui dépend de manière continue des paramètres :

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl\‘eme_bien_pos\’e`

On pourrait se dire que cette étape n'est pas fondamentale – et d'autant plus que, soyons honnêtes, on ne sait que très rarement prouver qu'un problème est bien posé –, mais nous espérons convaincre le lecteur que même la simple détermination de la nature d'une équation (elliptique, hyperbolique ou parabolique) joue un rôle fondamental pour mettre au point une méthode numérique adaptée. Et dans les meilleurs cas, pour être certain que le schéma fournit bien une approximation de LA solution cherchée.

3. Une fois cette étape théorique terminée, il s'agit de déterminer une **méthode numérique** si possible performante pour calculer ce que l'on espère être de bonnes approximations de la réalité. En pratique, il faut construire un schéma numérique *discret* – c'est-à-dire un problème ou l'on ne doit plus avoir qu'à calculer qu'un nombre fini de valeurs –, approchant l'EDP ou le problème d'optimisation. Ce schéma prend alors la forme mathématique soit d'une équation linéaire ou non linéaire, soit d'un problème d'optimisation ; dans les deux cas, on est ramené à s'intéresser à des problèmes en *dimension finie*, dépendant d'un paramètre de discrétisation. Les solutions de ces problèmes approchés sont censés fournir une bonne approximation des solutions du problème initial lorsque la discrétisation devient plus fine, ce qui signifie généralement qu'on calcule une approximation de la solution en un nombre plus grand de points, de plus en plus proches.

4. L'étape suivante consiste en la **résolution du schéma numérique**, c'est-à-dire trouver une méthode pratique efficace pour résoudre l'équation discrète (ou le système d'équations) ou le problème d'optimisation, ce qui n'est pas une tâche si facile car on aura en général affaire à des matrices ou des problèmes d'optimisation de grandes tailles. Certes les ordinateurs modernes ont de grandes capacités de calcul et on se dit que ce ne sera pas si difficile que cela mais, de nos jours, on veut toujours plus de précision donc résoudre des problèmes de tailles de plus en plus grandes et ainsi, au changement d'échelle près, les mêmes problèmes se posent[3] . Dans cet ouvrage, nous décrirons diverses méthodes classiques (méthodes directes, méthodes itératives, méthodes de gradient, *etc.*) et nous étudierons leur efficacité.

5. Nous ne parlerons ici ni de **programmation** – pourtant les méthodes décrites sont faites pour être programmées –, ni de **simulation** – pourtant l'étape essentielle pour savoir si le modèle « tient la route », c'est-à-dire s'il permet bien de reproduire *in silico* une bonne approximation de la réalité. Si ce n'est pas le cas, il faudra retourner à la première étape et tenter de corriger les défauts du modèle...

6. Terminons cette description par une étape mathématique : la démonstration de la **convergence du schéma**. Bien sûr, cette étape ne sera réalisable que dans des cas relativement simples mais là aussi ce type d'étude nous confirmera qu'effectivement la solution approchée converge bien vers la solution recherchée et nous donnera une évaluation de la rapidité de convergence afin d'avoir une idée du degré de précision de l'approximation pour chaque choix du paramètre de discrétisation. Le but ultime serait de savoir ainsi quel type de finesse de discrétisation on doit employer pour espérer une précision donnée.

Nous balaierons donc un spectre assez large du point de vue mathématique et d'autant plus que nous considèrerons aussi bien les approches par différences finies que celles par éléments finis. Dans le cas des différences finies nous aborderons les trois types d'équations : elliptiques d'abord puis hyperboliques et enfin parabolique.

Nous n'insisterons jamais trop sur le point le plus important déjà décrit dans l'avant-propos : il s'agit pour nous de (*i*) fournir aux étudiants quelques bases d'Analyse Numérique ; (*ii*) leur faire manipuler un large spectre de Mathématiques élémentaires sur des problèmes concrets devant être résolus du début à la fin ; (*iii*) les inciter à faire parfois des Mathématiques non rigoureuses, en gardant présent à l'esprit que des justifications nécessaires devront être données a posteriori.

Nous n'en dirons pas plus dans cette introduction générale et renvoyons le lecteur aux introductions de chacune des parties.

[3] Et l'expérience prouve qu'entre une méthode de résolution astucieuse et une autre, les écarts de temps de calcul peuvent être gigantesques...

Première partie

Introduction à la méthodes des différences finies

Chapitre 1

Introduction

Nous allons présenter dans cette partie les idées de base de la méthode des différences finies qui est sans doute la méthode la plus intuitive, la plus simple et la plus utilisée pour *résoudre numériquement* des équations aux dérivées partielles (EDP ou edp dans le jargon des spécialistes). En fait, *résoudre numériquement* une EDP signifie calculer de bonnes approximations de la solution (encore faut-il que le problème ait une solution unique) en un nombre (généralement grand) de points bien répartis sur l'ensemble où elle est définie.

Pour simplifier la présentation, nous ne considérerons presque exclusivement que des équations en dimension 1 d'espace, une variable temporelle pouvant éventuellement s'y rajouter. Nous nous intéresserons à la résolution des trois types classiques d'EDP : elliptique, parabolique et hyperbolique. Chacune de ces classes d'équations possèdent des propriétés particulières que nous rappellerons brièvement. Commençons par indiquer quelques problèmes modèles pour ces trois classes d'équation.

1.1 Équations elliptiques

Le problème modèle est ici l'équation de Poisson :

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{dans }]0,1[\tag{1.1}$$

où f est une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on cherche une fonction u qui est au moins de classe $\mathcal{C}^2$ dans $]0,1[$ qui satisfait (1.1), donc une solution au sens « classique ».

Pour résoudre (1.1), il faut lui associer des *conditions aux limites*. Nous étudierons en détails le cas où (1.1) est associé à des conditions de Dirichlet *homogènes* :

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{1.2}$$

Plus généralement on peut prescrire les valeurs de $u(0)$ et $u(1)$, ce sont les conditions de Dirichlet non-homogènes :

$$u(0) = \alpha\,, \qquad u(1) = \beta\,, \tag{1.3}$$

où α et β sont deux nombres réels donnés.

Il existe aussi des *conditions de Neumann* où ce sont les dérivées qui sont prescrites sur le bord de l'intervalle :

$$u'(0) = \alpha\,, \qquad u'(1) = \beta\,, \tag{1.4}$$

ou encore des *conditions mixtes*, par exemple :

$$u'(0) = \alpha\,, \qquad u(1) = \beta\,. \tag{1.5}$$

Nous étudierons les propriétés du problème de Dirichlet (1.1)-(1.2) : formule (quasi-)explicite pour la solution, principe du maximum, caractérisation variationnelle, *etc.* Puis nous montrerons comment résoudre numériquement (1.1)-(1.2) par la méthode des différences finies. Nous introduirons à cette occasion les notions de grille (ou maillage), de pas de discrétisation, de discrétisation de l'équation, de schémas numériques, de consistance et de monotonie. Nous discuterons également des propriétés de convergence de certains schémas. L'ouvrage essayant d'être aussi *self-contained* que possible, nous indiquerons un certain nombre de méthodes de résolutions des systèmes linéaires auxquels conduisent inévitablement les différents schémas. Bien entendu, des références seront proposées pour que le lecteur puisse en découvrir d'autres. Les exercices proposés seront l'occasion de généraliser ou d'approfondir quelques notions (en particulier en Analyse Fonctionnelle) ou de découvrir les propriétés de l'équation (1.1) associée à d'autres conditions aux limites.

1.2 Équations hyperboliques

L'exemple modèle est ici celui de l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}\times]0,T[\tag{1.6}$$

où la vitesse de transport $c \in \mathbb{R}$ et le temps $T > 0$ sont donnés. On cherche une solution u qui est une fonction de $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Il s'agit d'une équation d'évolution et, pour pouvoir la résoudre, il faut lui associer une *donnée initiale* qui décrit la fonction à l'instant initial supposé ici être $t = 0$. Cette donnée initiale s'écrit :

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \mathbb{R}\,, \tag{1.7}$$

la fonction u_0 sera supposée au moins continue.

Nous étudierons les propriétés de l'équation (1.6) : méthode des caractéristiques, vitesse finie de propagation, *etc.* Puis nous montrerons comment résoudre (1.6)-(1.7) par la méthode des différences finies. Nous introduirons les notions de schémas stables, monotones, implicites, explicites et celles de dissipation et de dispersion. Les propriétés de convergence de certains schémas seront étudiées, d'autres vues en exercice. Les exercices proposeront aussi l'étude de l'équation des ondes, de la résolution d'autres équations par la méthode des caractéristiques, *etc.*

1.3 Équations paraboliques

L'exemple modèle est ici celui de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}\times]0, T[\,, \tag{1.8}$$

à laquelle on associe la donnée initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \mathbb{R}\,, \tag{1.9}$$

où u_0 est ici aussi une fonction continue donnée, satisfaisant certaines conditions de croissance à l'infini. Dans le Chapitre 10 seront étudiées là encore d'une part les propriétés de l'équation puis celles de quelques schémas numériques envisagés pour résoudre numériquement (1.8)-(1.9). Compte tenu des analogies avec les équations hyperboliques, nous insisterons plus particulièrement sur les différences – vitesse infinie de propagation en particulier.

L'intérêt de ces trois équations est de posséder des solutions explicites (données par des formules relativement simples) au moins si les données ont une certaine régularité. Cela permet de tester la validité des méthodes numériques proposées, en particulier leurs précisions. Testées sur des exemples simples, les méthodes peuvent être ensuite adaptées pour traiter des cas plus complexes.

Chapitre 2

Le problème de Dirichlet : étude théorique

On s'intéresse ici à l'équation (1.1) avec la condition de Dirichlet homogène (1.2) et, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, nous allons calculer une solution explicite de ce problème (en fait, LA solution de ce problème).

Si u est une solution de (1.1)-(1.2), on commence par intégrer (1.1) de 0 à $y \in]0,1[$ en utilisant la continuité de la fonction f :

$$u'(0) - u'(y) = \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

puis on ré-intègre de 0 à $x \in]0,1[$:

$$u'(0)x - u(x) = \int_0^x \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y, \tag{2.1}$$

où on a utilisé le fait que $u(0) = 0$. Reste à calculer $u'(0)$, ce qui est immédiat en prenant $x = 1$ dans (2.1) et en tenant compte du fait que $u(1) = 0$: $u'(0) = \int_0^1 \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y$, d'où finalement

$$u(x) = \Big(\int_0^1 \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\Big)\,x - \int_0^x \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y. \tag{2.2}$$

En intégrant par parties les deux termes du membre de droite ci-dessus, en interprétant l'intégrande comme $1 \cdot \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$, on peut réécrire (2.2) sous la forme :

$$u(x) = \int_0^1 (1-y)xf(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^x (x-y)f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.3}$$

On retrouve ainsi la forme générale des solutions d'équations du second ordre, dite de *Sturm-Liouville*, qui conduirait à écrire de manière plus générale :

$$u(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

où K est un « noyau » positif et symétrique, *cf.* [22]. Ici :

$$K(x,y) = \begin{cases} (1-x)y & \text{si } y \leq x, \\ (1-y)x & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.1 Quelques propriétés des solutions du problème de Dirichlet

Commençons par énoncer les propriétés élémentaires qui découlent des formules (2.2) ou (2.3).

Proposition 2.1.1

1. *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}([0,1])$*, il existe une unique solution* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *du problème de Dirichlet homogène (1.1)-(1.2).*
2. *Si* $f \in \mathcal{C}^k([0,1])$ *pour* $k \geq 1$*, la solution* u *de (1.1)-(1.2) est de classe* $\mathcal{C}^{k+2}$ *sur* $[0,1]$ *et :*

$$||u^{(l)}||_\infty \leq ||f^{(l-2)}||_\infty \quad \textit{pour} \quad 2 \leq l \leq k+2.$$

3. *Si* $g \in \mathcal{C}([0,1])$ *et si* v *est l'unique solution de (1.1)-(1.2) associée au second membre* g*, on a :*
   - *(i)* *Si* $f \leq g$ *sur* $[0,1]$ *alors* $u \leq v$ *sur* $[0,1]$*,*
   - *(ii)* $||u - v||_\infty \leq \dfrac{1}{8}||f-g||_\infty$*,*
   - *(iii)* $||u' - v'||_\infty \leq \dfrac{3}{2}||f-g||_\infty$*.*

Preuve.
1. L'existence, l'unicité et la régularité de la fonction u découlent de l'expression trouvée précédemment.
2. C'est encore une conséquence de (2.2), l'inégalité s'obtenant soit par (2.2),

soit par l'équation (dérivée un certain nombre de fois) pour les dérivées d'ordre supérieures à 2.
3. La linéarité de l'équation entraîne que la fonction $w = u - v$ est LA solution de l'équation associée à la fonction $h = f - g$. On utilise alors l'égalité (2.3) pour w,

$$w(x) = \int_0^x [(1-y)x - (x-y)]h(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 (1-y)xh(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

ou encore :

$$w(x) = \int_0^x [(1-x)y]h(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 (1-y)xh(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Comme $(1-x)y \geq 0$ et $(1-y)x \geq 0$ si $x, y \in [0,1]$ (le noyau K est positif), on déduit que la fonction w a le même signe sur $[0,1]$ que h, *i.e.* w est négative. De plus, en utilisant encore la positivité de K :

$$\max_{x\in[0,1]} w(x) \leq \max_{x\in[0,1]} \left(\int_0^x (1-x)y\,\mathrm{d}y + \int_x^1 (1-y)x\,\mathrm{d}y\right) ||h||_\infty\,.$$

Par ailleurs, des calculs élémentaires donnent

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,1]} \left(\int_0^x (1-x)y\,\mathrm{d}y + \int_x^1 (1-y)x\,\mathrm{d}y\right) &= \max_{x\in[0,1]} \left(\frac{1}{2}(1-x)x^2 + \frac{1}{2}(1-x)^2x\right)\\ &= \max_{x\in[0,1]} \left(\frac{1}{2}(1-x)x\right) = \frac{1}{8}\,.\end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat pour w', on dérive l'équivalent de l'égalité (2.2) obtenue pour w et on obtient :

$$w'(x) = \int_0^1 \int_0^y h(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y - \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où :

$$\begin{aligned}|w'(x)| &\leq \int_0^1 \int_0^y ||h||_\infty\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y + \int_0^x ||h||_\infty\,\mathrm{d}t\\ &\leq \left(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y + x\right)||h||_\infty = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)||h||_\infty\\ &\leq \frac{3}{2}||h||_\infty\,.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.1 *Évidemment le fait d'avoir une formule explicite permet de prouver, sans trop de difficultés, que la solution du problème de Dirichlet a beaucoup de propriétés intéressantes. Mais comment faire dans des cas plus compliqués ? La section suivante fournit un outil pour en obtenir quelques-unes, à moindre coût.*

2.2 Le Principe du Maximum

La propriété 3-(i) de la Proposition 2.1.1 est un cas particulier d'un résultat plus général : le *Principe du Maximum* que l'on énonce maintenant dans le cas particulier de notre problème.

Théorème 2.2.1 *Soient u et v deux fonctions de $\mathcal{C}^2(]0,1[) \cap \mathcal{C}([0,1])$ satisfaisant :*

1. $-u'' \leq f$ *sur* $]0,1[$ *; on dit que u est sous-solution de (1.1) ;*
2. $-v'' \geq g$ *sur* $]0,1[$ *; on dit que v est sur-solution de (1.1) ;*
3. $u(0) \leq v(0)$ *et* $u(1) \leq v(1)$.

Alors, si $f \leq g$ sur $[0,1]$, on a $u \leq v$ sur $[0,1]$.

Preuve. Dans le cas où les fonctions u et v sont des *solutions*, on a montré ci-dessus comment faire une preuve basée sur l'expression explicite de ces solutions. Mais une telle stratégie est inenvisageable ici, tout comme elle le serait dans les cas où le calcul explicite de la solution est impossible (équations avec des coefficients non constants, par exemple).

Pour montrer que $u \leq v$ sur $[0,1]$, on considère $M = \max_{x\in[0,1]}(u-v)$ et on va prouver que $M \leq 0$.

On commence par supposer que l'on a $f < g$ sur $[0,1]$, donc une hypothèse un peu plus forte que celle du Théorème 2.2.1. Comme u, v sont continues sur le compact $[0,1]$, il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que $M = u(x_0) - v(x_0)$. Deux cas se présentent :
– ou bien x_0 est « sur le bord de l'intervalle » donc $x_0 = 0$ ou 1 et dans ce cas le résultat est acquis par la 3ème propriété car on sait que $u(0) \leq v(0)$ et $u(1) \leq v(1)$,
– ou bien x_0 est un point intérieur (*i.e.* $0 < x_0 < 1$). Comme x_0 est un point

de maximum local de $w = u - v$, on a, par des résultats d'Analyse classique :

$$w'(x_0) = 0 \text{ et } w''(x_0) \leq 0\,.$$

Or, en combinant les propriétés 1 et 2 satisfaites par u et v, on a aussi :

$$-w''(x_0) \leq f(x_0) - g(x_0) < 0\,.$$

Les deux inégalités précédentes sur $w''(x_0)$ sont incompatibles et donc ce cas-là ne peut pas se produire ; le maximum ne peut être atteint que sur le « bord » de $[0,1]$[(4)] et on a bien $M \leq 0$.

Si on a seulement $f \leq g$ sur $[0,1]$, il faut se ramener au cas d'une inégalité stricte, ce que l'on va faire en remplaçant f par $f - \alpha$ pour $\alpha > 0$; alors on aura bien $f(x) - \alpha < g(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.

Un calcul élémentaire – ou encore la formule (2.2) – montre que la fonction $\phi_\alpha(x) = \frac{\alpha}{2}x(1-x)$ est solution du problème de Dirichlet homogène (1.1)-(1.2), avec pour second membre la fonction constante égale α. Considérons alors la fonction $\tilde{u}_\alpha = u - \phi_\alpha$: elle satisfait l'équation (1.1) avec second membre $f - \alpha$. De plus, $\tilde{u}_\alpha(0) = u(0)$ et $\tilde{u}_\alpha(1) = u(1)$. Les arguments précédents montrent donc que :

$$\tilde{u}_\alpha(x) \leq v(x) \quad \text{sur } [0,1]\,,$$

ce qui donne pour tout $\alpha > 0$:

$$u(x) - \frac{\alpha}{2}x(1-x) \leq v(x) \quad \text{sur} \quad [0,1]\,.$$

On conclut donc en faisant tendre α vers zéro, qui donne $u \leq v$ sur $[0,1]$. $\square$

Le lecteur pourra constater dans la liste d'exercices ci-dessous que les arguments de la preuve du Théorème 2.2.1 peuvent être généralisés pour traiter des cas beaucoup plus complexes, y compris en dimension supérieure ; en analysant cette preuve, on voit en effet qu'elle ne repose que sur la compacité de $[0,1]$ (pour que le maximum soit atteint) et les propriétés des dérivées premières et secondes en un point de maximum local. Il s'agit donc de deux résultats basiques qui s'étendent sans difficulté en toutes dimensions. Il est à noter enfin que, par des arguments de perturbation du type de celui que nous avons utilisé

(4) Le lecteur avisé reconnaîtra une propriété d'atteinte du maximum sur le bord déjà rencontrée en analyse classique.

dans la preuve (*cf.* $u \to \tilde{u}_\alpha$), on peut parfois se passer de la compacité du domaine.

Exercice 1.

1. On considère le problème de Dirichlet non homogène, avec $u(0), u(1) \in \mathbb{R}$, non nécessairement nuls. Comment déduire la solution de ce problème non-homogène à partir de la solution du problème homogène (1.1)-(1.2) ?
2. Le problème de Neumann (1.1)-(1.4) a-t-il toujours une solution ? Et si oui, est-elle unique ?

   Indication : On pourra déterminer une condition liant α, β et f pour que ce problème ait une solution.
3. Résoudre explicitement le problème mixte (1.1)-(1.5).

Exercice 2.

Soit a une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $a(x) \geq \alpha > 0$ sur $[0,1]$ et f une fonction continue sur $[0,1]$.

1. Résoudre explicitement le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -(a(x)u')' = f \quad \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

2. En déduire les propriétés de la solution en fonction de celles de a et f.
3. Montrer que cette équation satisfait le principe du maximum.

   Indication : si v est une sous-solution et w une sursolution (on précisera, au vu du thérorème (2.2.1), ce que satisfont les fonctions v et w), on pourra considérer, pour $0 < \eta \ll 1$ et pour une constante $K > 0$ bien choisie, la quantité $\max_{[0,1]} (v(x) - w(x) + \eta \exp(Kx))$.

Exercice 3.

1. Résoudre explicitement le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(On pourra utiliser l'équation différentielle ordinaire satisfaite par le couple $(u(t), u'(t))$.)

2. Formuler et prouver le principe du maximum pour cette équation.

Exercice 4.

On considère l'équation :

$$-u'' + u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}\,,$$

où f est une fonction périodique, au moins continue. Résoudre cette équation en utilisant des développements en séries de Fourier dont on étudiera soigneusement la convergence. (Le lecteur pusillanime pourra commencer par le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ ou même $\mathcal{C}^\infty$ puis refouiller ses anciens cours[5] à la recherche des meilleures hypothèses sur f...)

Exercice 5. *Existence via le principe du maximum et le théorème de point fixe le plus standard.*

On veut prouver que, pour tout $g \in \mathcal{C}([0,1])$ et pour tout $\mu > 0$, le problème :

$$(\mathcal{P}_\mu) \qquad \begin{cases} -w''(x) + \mu w(x) = g(x) & \text{dans }]0,1[\\ w(0) = w(1) = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution $w \in \mathcal{C}^2([0,1])$ qui satisfait $||w||_\infty \leq \dfrac{1}{\mu}||g||_\infty$.

1. On considère l'application $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ qui, à $v \in \mathcal{C}([0,1])$, fait correspondre $u = Tv$ l'unique solution de :

$$\begin{cases} -u''(x) = g(x) - \mu v(x) & \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

   Montrer que cette application est contractante si $0 < \mu < 8$ et en déduire que le problème ci-dessus est résolu pour $\mu \in]0,8[$.

2. Prouver, par un argument similaire, que si l'on sait résoudre $(\mathcal{P}_\mu)$ alors $(\mathcal{P}_\lambda)$ a une solution pour tout $\lambda < \mu + 1$.

[5] Ou les références citées dans ceux-ci.

3. En déduire que l'on peut résoudre $(\mathcal{P}_\mu)$ pour tout $\mu > 0$ et que la solution w satisfait alors $||w||_\infty \leq \dfrac{1}{\mu}||g||_\infty$.

2.3 L'approche variationnelle du problème de Dirichlet

On va montrer maintenant que la solution u de (1.1)-(1.2) possède une caractérisation variationnelle, c'est-à-dire que la fonction $u$est l'unique solution d'un problème d'optimisation.

2.3.1 L'approche élémentaire

On introduit d'abord l'espace fonctionnel :

$$\mathcal{C}_0^1([0,1]) = \left\{v \in \mathcal{C}^1(]0,1[) \cap \mathcal{C}^0([0,1]); v(0) = 0, v(1) = 0\right\}.$$

Il est à noter que cet espace est défini à la fois par une contrainte de régularité (classe $\mathcal{C}^1$ dans $]0,1[$ et continuité sur $[0,1]$) et par la valeur imposée des fonctions aux points 0 et 1. De plus, la solution u du problème de Dirichlet (1.1)-(1.2) est bien dans $\mathcal{C}_0^1([0,1])$.

Pour toute fonction $v \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$, on pose :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 [v'(t)]^2 \,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)v(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.4}$$

La première caractérisation variationnelle de la fonction u est donnée par la :

Proposition 2.3.1 *La solution u de (1.1)-(1.2) satisfait :*

$$J(u) = \min_{w \in \mathcal{C}_0^1([0,1])} J(w)\,.$$

Ce type de résultat sera important, tant du point de vue théorique que numérique car il signifie que pour calculer u, on peut envisager de résoudre un problème d'optimisation.

Preuve. Si $w \in \mathcal{C}^1_0([0,1])$, il existe une fonction h de $\mathcal{C}^1_0([0,1])$ telle que $w = u + h$. On a alors, par un calcul élémentaire :

$$J(w) = J(u+h) = J(u) + \int_0^1 u'(t)h'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)h(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \big(h'(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Grâce à la régularité des fonctions et la nullité au bord de h, on peut intégrer par parties pour obtenir :

$$J(w) = J(u) + \int_0^1 \big(-u''(t) - f(t)\big)h(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \big(h'(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Comme la fonction $u$vérifie (1.1) et $\int_0^1 (h'(t))^2\,\mathrm{d}t \geq 0$, on obtient bien que $J(w) \geq J(u)$. Cela démontre que le minimum de J sur $\mathcal{C}^1_0([0,1])$ est atteint pour $w = u$. □

Une question importante est celle de la réciproque : est-il vrai qu'une fonction $v \in \mathcal{C}^1_0([0,1])$ qui satisfait :

$$J(v) \leq J(w) \quad \text{pour tout } w \in \mathcal{C}^1_0([0,1]) \tag{2.5}$$

est solution du problème (1.1)-(1.2) ?

On se rend compte d'emblée que cette question comporte une difficulté fondamentale : la fonction J est définie pour tout $w \in \mathcal{C}^1_0([0,1])$ et on ne voit pas pourquoi un minimiseur v serait plus régulier que $\mathcal{C}^1$. Or, pour montrer que v est solution de l'équation (1.1), on a a priori besoin de savoir que v est de classe $\mathcal{C}^2$.

C'est la raison pour laquelle cette question est longtemps restée sans réponse totalement rigoureuse dans le cadre de la théorie dite du « Calcul des Variations ». Jusqu'à ce que Paul David Gustave du Bois-Reymond y apporte une solution très astucieuse car relativement simple. Nous renvoyons le lecteur à l'exercice 10 où son lemme fondamental est utilisé, *cf.* également le lien suivant :

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_fondamental_du_calcul_des_variations`

De nos jours, on utilise plutôt la théorie des distributions de Laurent Schwartz pour contourner cette difficulté. Cependant, en présupposant la fonction v de classe $\mathcal{C}^2$, on peut alors montrer relativement facilement qu'une réciproque partielle est vraie :