

PCSI

MATHS

**1 DEVOIR CORRIGÉ
PAR SEMAINE**



*avec copies
& corrigés commentés*

Éric Billault



PCSI

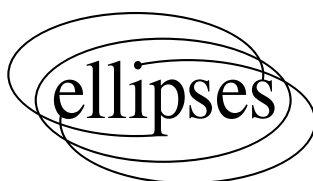
MATHS

**1 DEVOIR CORRIGÉ
PAR SEMAINE**



Éric BILLAULT

Professeur de chaire supérieure en CPGE au Lycée Kerichen de Brest



Conception graphique couverture: Nathalie FOULLOY

Conception graphique intérieur et mise en pages: Lise GARREAU

ISBN 9782340-114531

Dépôt légal : juin 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Ce livre regroupe 30 devoirs de Mathématiques donnés en classe préparatoire scientifique en filière PCSI. Bien sûr, dans la pratique, en PCSI, il n'y a pas un devoir de Mathématiques par semaine. Les Maths alternent avec les autres matières. Il y a environ une dizaine de devoirs de Maths sur l'année scolaire. À cela s'ajoutent bien souvent des interrogations pour contrôler les connaissances du cours. Dans ce livre sont proposées plusieurs devoirs de longueur et de niveaux différents sur un même thème.

Les devoirs proposés suivent la progression du cours de Mathématique sur l'année scolaire. Les solutions proposées n'utilisent donc que les techniques disponibles à l'instant t . Par exemple, le premier devoir sur les matrices n'utilise pas la notion de déterminant pour l'inversabilité d'une matrice - cette notion arrivant plus tard dans l'année. Cependant on indiquera dans le corrigé au sein d'un commentaire l'existence d'autres techniques pour la résolution de la question.

Les corrigés proposés sont agrémentés de commentaires, de points méthodes, de rappels de cours ainsi que des extraits de copies d'élèves mettant en exergue certaines erreurs de rédaction ou de raisonnement à éviter.

Bon travail.

Sommaire

Index thématique	7
------------------------	---

Devoirs

■ Devoir 1	10	■ Devoir 16	46
■ Devoir 2	13	■ Devoir 17	48
■ Devoir 3	15	■ Devoir 18	51
■ Devoir 4	17	■ Devoir 19	54
■ Devoir 5	20	■ Devoir 20	57
■ Devoir 6	23	■ Devoir 21	59
■ Devoir 7	26	■ Devoir 22	62
■ Devoir 8	28	■ Devoir 23	64
■ Devoir 9	30	■ Devoir 24	66
■ Devoir 10	33	■ Devoir 25	68
■ Devoir 11	35	■ Devoir 26	71
■ Devoir 12	37	■ Devoir 27	76
■ Devoir 13	40	■ Devoir 28	78
■ Devoir 14	42	■ Devoir 29	83
■ Devoir 15	44	■ Devoir 30	89

Corrigés

■ Corrigé du devoir 1	96	■ Corrigé du devoir 16	244
■ Corrigé du devoir 2	104	■ Corrigé du devoir 17	255
■ Corrigé du devoir 3	114	■ Corrigé du devoir 18	261
■ Corrigé du devoir 4	122	■ Corrigé du devoir 19	272
■ Corrigé du devoir 5	140	■ Corrigé du devoir 20	282
■ Corrigé du devoir 6	155	■ Corrigé du devoir 21	289
■ Corrigé du devoir 7	162	■ Corrigé du devoir 22	296
■ Corrigé du devoir 8	173	■ Corrigé du devoir 23	304
■ Corrigé du devoir 9	180	■ Corrigé du devoir 24	313
■ Corrigé du devoir 10	191	■ Corrigé du devoir 25	318
■ Corrigé du devoir 11	201	■ Corrigé du devoir 26	330
■ Corrigé du devoir 12	209	■ Corrigé du devoir 27	344
■ Corrigé du devoir 13	223	■ Corrigé du devoir 28	350
■ Corrigé du devoir 14	228	■ Corrigé du devoir 29	376
■ Corrigé du devoir 15	238	■ Corrigé du devoir 30	401

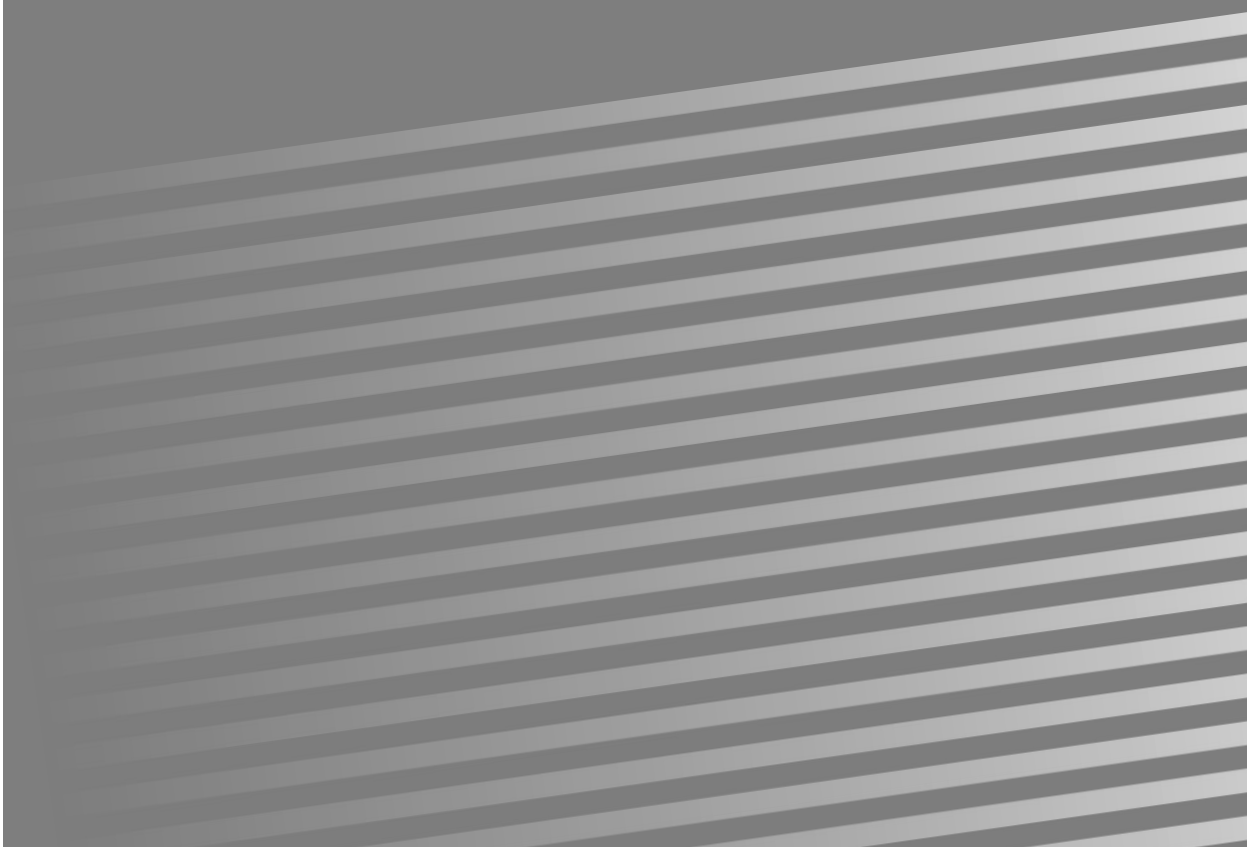
Index thématique

Les chiffres renvoient aux énoncés des numéros des devoirs. Par exemple, 4-3 renvoie au devoir n° 4 exercice n° 3.

Application réciproque	Voir Bijection
Bijection	4-3, 30
Borne supérieure/inférieure, plus petit/grand élément	2-3, 4-1
Continuité	7-3 , 8-2
Classe \mathcal{C}^1	14-3, 22
Dénombrement	6-1 , 10-3
Dérivabilité	4-2, 4-3, 10 , 14-3, 22, 28
Dérivée successive	10-3, 12-3
Développement limité	13, 28
Égalité de Taylor-Lagrange avec reste intégral	29-2
Équation différentielle linéaire d'ordre 1	9-1 , 14-2, 28, 30
Équation différentielle linéaire d'ordre 2	9-2
Équation fonctionnelle	8-2, 30
Équivalent, négligeabilité d'une fonction	7-3 , 8-1
Espace euclidien	24, 25, 26
Espace vectoriel	15, 16, 30
Espace vectoriel de dimension finie	17, 18, 19, 24, 25, 26, 28, 29-1, 30
Fonction de deux variables	26
Fonctions trigonométriques réciproques	3, 4-1, 4-2, 12-3, 14-1, 27-1
Inégalité de Taylor-Lagrange	18
Intégration	22, 23, 28, 29-2
Limite d'une fonction	4-3, 7-1, 8-1
Matrice	11, 18, 19, 20, 25, 28, 29-1, 30
Nombres complexes	2, 3, 22, 28, 30
Partie entière	7-3
Polynôme	2-3, 12 , 13 , 14-4, 28, 29-2, 30
Probabilité	6, 14-5, 20, 21, 29-3
Produit scalaire	Voir Espace euclidien
Produit de nombres	Voir Somme et produit
Projecteur	15, 16
Prolongement par continuité	7-2, 14-3, 28
Série	27
Somme et produit	1, 2-1, 22, 27, 30
Suite récurrente linéaire d'ordre 1	6-2

Suite récurrente linéaire d'ordre 2	5-1
Suite définie par récurrence	5-2, 10-2
Suite définie implicitement	7-2
Suite	5-3, 7-3, 8-2, 22, 27-2, 28, 29-2, 30
Variable aléatoire	20, 21, 29-3

DEVOIRS





Devoir 1

Calcul de sommes et produits

Thèmes abordés : calcul de sommes et de produits.

Durée du devoir : 2h.

Niveau : ★

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Q1 Calculer $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 57$.

Q2 Soit x un réel différent de 1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $B_n(x) = \sum_{j=1}^n x^j$.

Q3 Calculer $C = \frac{\binom{19}{16}}{\binom{20}{18}}$.

Q4 Développer avec la formule du binôme de Newton l'expression $D(x, y) = (x - y)^4$ pour x et y des réels.

Q5 Calculer la somme $E = \sum_{k=1}^{100} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice n° 2

Soit n un entier naturel non nul fixé. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on définit la somme $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$.

Q6 Rappeler sans démonstration les valeurs de S_1 et S_2 .

Q7 On définit la somme

$$A = \sum_{k=0}^n [(k+1)^4 - k^4]$$

Exprimer A de deux façons différentes. L'une des expressions est uniquement en fonction de n et l'autre est en fonction de n , S_1 , S_2 et S_3 .

Q8 En déduire l'expression de S_3 en fonction de n .

Exercice n° 3

Q9 Rappeler la relation de Pascal.

Q10 Pour $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose

$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} \right)$$

Simplifier au maximum P_n .

Exercice n° 4

Soit n un entier naturel non nul fixé. Le but de cet exercice est de calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n k3^k$$

Q11 On définit la fonction f_n sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

Calculer $f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Q12 Calculer de deux façons différentes la dérivée f'_n de f_n . L'une des expressions est sous forme de somme, l'autre sous forme d'un quotient.

Q13 Exprimer la somme S_n en fonction de $g_n : x \mapsto xf'_n(x)$ puis en déduire le calcul de S_n .

Q14 Calculer la somme $L_n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots + (-1)^n n$.

Mots clés

Somme ; produit ; coefficient binomial ; somme géométrique ; binôme de Newton ; somme télescopique ; relation de Pascal ; dérivée d'une fonction polynomiale.

Cours utilisé

- ▶ Somme des n premiers entiers.
- ▶ Somme géométrique.
- ▶ Définition d'un coefficient binomial.
- ▶ Formule du binôme de Newton.
- ▶ Relation de Pascal.



Les nombres complexes

Thèmes abordés : nombres complexes.

Durée du devoir : 2h.

Niveau : ★

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Q1 Calculer le module de $A = \frac{(16\sqrt{2} - 32\sqrt{3}i)^{12}}{(28 - 4\sqrt{7}i)^{10}}$. On mettra le résultat sous la forme $2^n q$ avec $(n, q) \in \mathbf{N}^2$.

Q2 On rappelle que les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2 avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer $(1 + j)^{2020}$ puis en déduire le calcul de la somme $S = \sum_{k=0}^{2020} \binom{2020}{k} j^k$.

Q3 Linéariser l'expression $A(x) = \cos^3(2x) \sin^2(3x)$.

Exercice n° 2

Q4 Résoudre l'équation $u^4 = 4$ d'inconnue complexe u .

Q5 En déduire la résolution de l'équation $(z+1)^4 - 4(z-1)^4 = 0$ d'inconnue complexe z .

Exercice n° 3

Si z est un complexe non réel, on pose

$$Q(z) = \frac{\operatorname{im}(z^5)}{(\operatorname{im}(z))^5}$$

où $\operatorname{im}(z)$ désigne la partie imaginaire de z . On se propose de déterminer le minimum de cette quantité $Q(z)$ lorsque z décrit $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ (l'ensemble des complexes non réels), autrement dit on cherche la valeur de

$$\min\{Q(z) \mid z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}\} = \min_{z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}} Q(z)$$

Q6 Soit $a = 1 + i$. Donner la forme exponentielle de a . En déduire a^5 puis la valeur de $Q(a)$.

Q7 Énoncer la formule du binôme de Newton.

On pose $z = x + iy$, un complexe non réel, où $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Q8 Calculer $\text{im}(z^5)$ en fonction de x et y .

Q9 On pose $t = \frac{x}{y}$. Montrer qu'il existe un polynôme P à déterminer tel que $Q(z) = P(t)$.

Q10 En déduire pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} : Q(z) \geq -4$. Pour quelle(s) valeur(s) de z a-t-on égalité?

Q11 Conclure.

Mots clés

Module; racine cubique de l'unité; partie imaginaire d'un nombre complexe; linéarisation; formules d'Euler; racine n^e d'un nombre complexe; formule du binôme de Newton; minimum d'une fonction.

Cours utilisé

- ▶ Somme des racines n^e de l'unité.
- ▶ Module d'un nombre complexe et propriétés du module vis-à-vis d'un produit, d'un quotient de nombres complexes et de la puissance d'un complexe.
- ▶ Méthode pour linéariser une expression trigonométrique.
- ▶ Mise sous forme exponentielle d'un nombre complexe.
- ▶ Définition de la racine n^e d'un nombre complexe et méthode pour les obtenir.
- ▶ Formules de Moivre et d'Euler.
- ▶ Formule du binôme de Newton.



Nombres complexes et fonctions trigonométriques réciproques

Thèmes abordés : nombres complexes, fonctions trigonométriques réciproques.

Durée du devoir : 1h

Niveau : **

Q1 Rappeler la définition ainsi que les graphes des fonctions arcsin, arccos et arctan.

On pose $\alpha := \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$, $\beta := \arctan(2)$ et $\gamma := \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

Q2 Justifier l'existence de α , β et γ puis les encadrer au mieux (en justifiant) à l'aide des angles de référence.

Q3 Déterminer l'écriture algébrique de $e^{i\alpha}$. Plus précisément, on écrira $e^{i\alpha} = x + iy$ avec x et y des nombres rationnels. On rappelle qu'un nombre rationnel est un nombre de la forme $\frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$.

Q4 Déterminer des nombres complexes a , b et c dont les parties réelles et imaginaires sont entières et tels qu'ils admettent respectivement α , β et γ comme arguments.

Q5 Calculer le produit $z = abc$.

Q6 En déduire la valeur exacte de la somme $s := \alpha + \beta + \gamma$.

On se propose de calculer s d'une autre façon.

Q7 Calculer $\tan(\beta + \gamma)$.

Q8 Exprimer \tan^2 en fonction de \sin^2 .

Q9 En déduire le calcul de $\tan(\alpha)$.

Q10 Montrer que $\tan(s) = -1$.

Q11 Retrouver alors la valeur de s .

Mots clés

arcsin ; arctan ; nombre rationnel ; argument d'un nombre complexe ; fonction tangente.

Cours utilisé

- ▶ Définition des fonctions trigonométriques réciproques.
- ▶ Formule de simplification avec les fonctions trigonométriques réciproques.
- ▶ Écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique, trigonométrique et exponentielle.
- ▶ Argument d'un nombre complexe.
- ▶ Propriétés de l'argument.
- ▶ Tangente d'une somme.



Les fonctions

Thèmes abordés : fonctions trigonométriques réciproques, borne supérieure, bijection.

Durée du devoir : 3h.

Niveau : ★★

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Q1 Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.

Q2 On pose

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{m} \mid (n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2 \right\}$$

Déterminer (si cela existe) la borne supérieure, la borne inférieure, le plus petit élément, le plus grand élément de \mathcal{A} .

Q3 Résoudre l'équation (E) : $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.

Exercice n° 2

Soit les fonctions $f : x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ et $\phi : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Q4 Montrer que ϕ est paire.

Q5 Déterminer la limite de ϕ en $+\infty$ et en déduire celle en $-\infty$.

Q6 Calculer ϕ' et dresser le tableau de variations de ϕ .

Q7 Déterminer le domaine de définition de f . Quelle est sa parité ?

Q8 Montrer que f est dérivable sur \mathbf{R}^* et calculer $f'(x)$ pour x non nul.

Q9 Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbf{R}^*$.

Q10 f est-elle dérivable en 0 ?

Q11 Représenter f sur \mathbf{R} .

Exercice n° 3

On considère la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{1 - e^x}$$

Q12 Déterminer l'ensemble de définition de f .

On considère à présent la restriction de la fonction précédente à l'intervalle $]0, +\infty[$.
On appelle cette fonction g :

$$\begin{aligned} g :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x}{1 - e^x} \end{aligned}$$

Q13 Justifier que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Q14 Dresser le tableau de variations de g sur $]0, +\infty[$ en précisant les limites ainsi que les asymptotes éventuelles.

Q15 Tracer soigneusement l'allure de la courbe de g ainsi que les asymptotes éventuelles.

Q16 Montrer que g est bijective de $]0, +\infty[$ dans J où J est un intervalle à préciser.

Q17 On note $g^{-1} : J \rightarrow]0, +\infty[$ la fonction réciproque de g . Quelle est la monotonie de g^{-1} ? Tracer soigneusement l'allure de la courbe de g^{-1} (sur un autre dessin que le précédent) ainsi que les asymptotes éventuelles.

Q18 Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = g(x) + g(x)^2$.

Q19 Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur J et calculer sa dérivée.

Q20 En déduire une expression de g^{-1} .

(On écrira $\frac{1}{x+x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ avec a et b des constantes réelles à déterminer.)

Q21 Retrouver directement l'expression de g^{-1} en partant de g .

Mots clés

Arctan ; arccos ; arcsin ; borne supérieure ; borne inférieure ; plus petit élément ; plus grand élément ; fonction paire ; primitive ; restriction ; limite ; asymptote ; bijection ; application réciproque.

Cours utilisé

- ▶ Les fonctions trigonométriques réciproques.
- ▶ Le théorème des valeurs intermédiaires.
- ▶ Borne supérieure/inférieure, plus petit/grand élément d'une partie de \mathbf{R} .
- ▶ Restriction d'une fonction.
- ▶ Théorème de la bijection.
- ▶ Graphe d'une application réciproque.
- ▶ Théorème sur la dérivabilité d'une application réciproque.



Devoir 5

Les suites

Thèmes abordés : suites de nombres réels.

Durée du devoir : 3h.

Niveau : ★★

Exercice n° 1

Q1 Déterminer la nature (c'est-à-dire la convergence ou la divergence) de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Exercice n° 2

Q2 Soit un réel a positif. Étudier la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Exercice n° 3

On définit la suite $(H_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Q3 Déterminer les variations de la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(x) - \ln(x-1) - \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

Q4 Déterminer la limite de φ en $+\infty$ et en déduire le signe de φ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

Q5 Montrer de la même façon que

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad \ln(x) - \ln(x-1) \leq \frac{1}{x-1}$$

Q6 En déduire que :

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1) \leq \frac{1}{k-1}$$

Q7 En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

Q8 En déduire la nature de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$.

Q9 Montrer que la suite $H_n \overset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. Que peut-on en déduire sur la vitesse de divergence de la suite (H_n) ?

On définit les suites :

$$(u_n) := (H_n - \ln(n))_{n \geq 1} \quad \text{et} \quad (v_n) := \left(u_n - \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$$

Q10 Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

Q11 Notons γ la limite commune des suites (u_n) et (v_n) . Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\varepsilon_n := H_n - \ln(n) - \gamma$. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{n}$$

Q12 Décrire une méthode pour obtenir une valeur approchée de γ à 10^{-2} près et proposer un programme en Python permettant de calculer cette valeur approchée.

On définit la suite $(K_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1, \quad K_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Q13 Étudier le sens de variation de la suite (K_n) .

Q14 Montrer que la suite (K_n) est majorée puis qu'elle converge.

Q15 Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n \geq \frac{1}{2}$.

Q16 Chercher une relation entre K_n , H_n et H_{2n} puis établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \ln(2)$.

On pose pour $n \geq 1$,

$$A_n := \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Q17 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $A_{2n} = K_n$.

Q18 En déduire que la suite (A_{2n}) converge puis montrer la convergence et déterminer la limite de la suite (A_n) .

Mots clés

Suite ; suite définie par récurrence ; suite récurrente linéaire d'ordre 2 ; théorème de comparaison ; suite équivalente à une autre ; suites adjacentes ; valeur approchée ; sous-suite ou suite extraite.

Cours utilisé

- ▶ Notion d'intervalle stable.
- ▶ Expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- ▶ Théorème de la minoration.
- ▶ Théorème de l'encadrement.
- ▶ Définition de deux suites équivalentes.
- ▶ Définition et théorème relatifs aux suites adjacentes.
- ▶ Théorème de la convergence monotone.
- ▶ Théorème de passage à la limite.
- ▶ Théorème sur la convergence d'une suite et ses sous-suites.
- ▶ Programme Python.



Probabilité et dénombrement

Thèmes abordés : probabilité, dénombrement.

Durée du devoir : 2h.

Niveau : ★

Exercice n° 1

Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de 20 sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent successivement. Le premier choisit au hasard deux sujets simultanément puis le second candidat choisit lui aussi deux sujets (simultanément) parmi ceux non choisis par le premier candidat. On note

- A_1 l'événement « les deux sujets choisis par le candidat 1 ont été préparés par le même examinateur ».
- A_2 l'événement « les deux sujets choisis par le candidat 2 ont été préparés par le même examinateur ».

Q1 Déterminer le nombre total de tirages différents que peut réaliser le premier candidat.

Q2 Démontrer que $P(A_1) = \frac{1}{19}$.

Q3 Déterminer $P_{A_1}(A_2)$.

Q4 Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\frac{1}{323}$.

Q5 Déterminer $P_{\bar{A}_1}(A_2)$ où \bar{A}_1 désigne l'événement contraire de A_1 .

Q6 Calculer $P(A_2)$.

Q7 En déduire que $P(A_1 \cup A_2) = \frac{33}{323}$.

Exercice n° 2

On considère deux urnes U et V . L'urne U contient 2 boules blanches et 3 boules noires. L'urne V contient 4 boules blanches et 1 boule noire.

Pour le premier tirage, on procède ainsi :

- On commence par choisir une urne au hasard.
- Puis on tire une boule dans cette urne et on la remet dans cette même urne.

À partir du deuxième tirage, on procède ainsi :

- Si la boule qu'on a tiré précédemment est blanche, on recommence le tirage (toujours avec remise) dans cette même urne.
- Sinon, on recommence le tirage (toujours avec remise) dans l'autre urne.

On considère les événements suivants pour k dans \mathbf{N}^* :

- U_k : « Le k^{e} tirage s'effectue dans l'urne U . »
- V_k : « Le k^{e} tirage s'effectue dans l'urne V . »
- B_k : « On pioche une boule blanche au k^{e} tirage. »

Q8 Calculer $\mathbf{P}(U_1)$.

Q9 On note M_3 l'événement « les trois premiers tirages sont effectués dans l'urne U ». Exprimer M_3 en fonction des événements U_1 , U_2 et U_3 puis calculer $\mathbf{P}(M_3)$.

Q10 Justifier que la famille d'événements (U_1, V_1) est un système complet d'événements.

Q11 En déduire $\mathbf{P}(U_2)$.

Q12 Montrer que la probabilité de piocher une boule noire au 2^e tirage vaut $\frac{8}{25}$ et en déduire $\mathbf{P}(B_2)$.

Q13 Déterminer la probabilité que le 2^e tirage ait été fait dans l'urne U sachant qu'on a pioché une boule blanche à ce 2^e tirage.

Q14 Pour un entier naturel n non nul, on note $a_n := \mathbf{P}(U_n)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{5} + \frac{1}{5}$$

Q15 En déduire l'expression de a_n en fonction n .

Q16 Déterminer en fonction de n la probabilité d'obtenir une boule blanche au n^{e} tirage.

Q17 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n) = \frac{7}{10}$.

Mots clés

Dénombrement ; combinaison ; probabilité.

Cours utilisé

- ▶ Combinaison, coefficient binomial.
- ▶ Formule d'équiprobabilité.
- ▶ Probabilité conditionnelle.
- ▶ Probabilité d'une réunion et d'une intersection d'événements.
- ▶ Formule des probabilités totales.
- ▶ Formule des probabilités composées.
- ▶ Formule de Bayes.
- ▶ Formule explicite du terme général d'une suite arithmético-géométrique.



Devoir 7

Continuité et limite (1)

Thèmes abordés : continuité et limite d'une fonction.

Durée du devoir : 2h.

Niveau : ★★

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Q1 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$.

Q2 On définit la fonction f par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^3 - 1}$. Montrer qu'elle est prolongeable par continuité en 1 et écrire son prolongement.

Q3 Déterminer un équivalent en 0^+ et en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - \ln(x)}{2 + xe^{-x}}$.

Exercice n° 2

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère l'équation $(E_n) : xe^{nx} = 1$.

Q4 Montrer que l'équation admet une unique solution notée u_n sur \mathbf{R} .

Q5 Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est positive et décroissante.

Q6 En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Q7 Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice n° 3

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue en 0 et périodique ayant pour périodes $\sqrt{2}$ et 1.

Q8 Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, $a + b\sqrt{2}$ est encore une période de f .

Q9 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe des entiers relatifs a_n et b_n tels que

$$(\sqrt{2}-1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

Q10 Que peut-on en déduire pour f ?

Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on pose $p_n(x) := \left\lfloor \frac{x}{(\sqrt{2}-1)^n} \right\rfloor$ où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie réelle du réel t .

Q11 Démontrer que la suite $(p_n(x)(\sqrt{2}-1)^n)$ converge vers x .

Q12 En déduire que f est une fonction constante.

Mots clés

Limite d'une fonction; prolongement par continuité; analyse asymptotique; suite définie implicitement; fonction périodique; partie entière; suite géométrique; continuité en un point d'une fonction.

Cours utilisé

- ▶ Analyse asymptotique d'une fonction et d'une suite.
- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires.
- ▶ Théorème de la convergence monotone.
- ▶ Nature d'une suite géométrique (q^n).
- ▶ Définition de la partie entière.
- ▶ Critère séquentiel de la continuité.



Devoir 8

Continuité et limite (2)

Thèmes abordés : limite, analyse asymptotique, continuité, suite.

Durée du devoir : 2h.

Niveau : ★★

Exercice n° 1

Q1 Déterminer la limite des fonctions suivantes au point indiqué :

1. $f(x) = \frac{x e^{-x} + x^2}{x - \ln(x)}$ en $+\infty$.

2. $g(x) = \frac{\ln(x) + x^2}{\ln(x + x^2)}$ en 0^+ .

3. $h(x) = \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{x^2}$ en $+\infty$.

Exercice n° 2

On considère l'ensemble \mathcal{F} des fonctions f continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R} vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, & f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 & (1) \\ f(0) \geq 0 & & (2) \end{cases}$$

Dans la suite, f désigne une fonction de l'ensemble \mathcal{F} .

Q2 Vérifier que la fonction $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient à \mathcal{F} .

Q3 Écrire ce que devient la relation (1) dans chacun des cas suivants : $x = 0$, $y = 0$, $x = y$.

Q4 Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?

Q5 Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.

À partir de maintenant, on suppose que $f(0) \neq 0$.

Q6 Quelle est la valeur de $f(0)$?

Q7 En déduire que $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$.

Q8 On suppose dans cette question qu'il existe un réel a non nul tel que $f(a) = 0$.
On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0} = \left(\frac{a}{2^n}\right)_{n \geq 0}$. Montrer que pour tout entier n , $f(u_n) = 0$.

Q9 En étudiant la limite de la suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$, en déduire que f est strictement positive sur \mathbf{R} .

On considère à présent la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \ln(f(x))$.

Q10 Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y))$ (3).

Q11 Déterminer $g(0)$.

Q12 Montrer que g est une fonction paire.

Q13 Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, g(nx) = n^2 g(x)$.

Q14 Montrer que l'égalité précédente reste vraie si on prend n dans \mathbf{Z} .

Q15 Montrer que $\forall r \in \mathbf{Q}, g(r) = \lambda r^2$ avec $\lambda = g(1)$.

Indication : on pourra poser $r = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^$ et calculer $g(qr)$.*

Q16 En utilisant le fait que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres rationnels, montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = \lambda x^2$.

Q17 Déterminer l'ensemble \mathcal{F} .

Cours utilisé

- ▶ Analyse asymptotique des fonctions (croissance comparée des fonctions exponentielle, logarithme et puissance).
- ▶ Caractérisation séquentielle de la continuité.
- ▶ Théorème de l'unicité de la limite d'une suite.
- ▶ Parité d'une fonction.
- ▶ Densité de \mathbf{Q} dans \mathbf{R} .



Équation différentielle linéaire

Thèmes abordés : équation différentielle.

Durée du devoir : 2h.

Niveau : ★

Exercice n° 1

On considère l'équation différentielle $(E) : (1 + x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$.

Q1 Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.

Pour tout réel λ , on définit la fonction f_λ sur \mathbf{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, \quad f_\lambda(x) = \frac{\ln(x) + \lambda}{1 + x^2}$$

et on note \mathcal{C}_λ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé.

Q2 Soit M un point du plan de coordonnées (α, β) avec $\alpha > 0$. Montrer que par M passe une et une seule courbe \mathcal{C}_λ .

Q3 Montrer que pour tout réel λ , la fonction f_λ est dérivable sur \mathbf{R}_+^* .

Q4 Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) := 1 + x^2 - 2x^2(\ln(x) + \lambda)$.

Q5 Étudier les variations de g_λ . On montrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur \mathbf{R}_+^* ; cette solution sera notée m_λ .

Q6 Dresser le tableau de variations de f_λ . On calculera les limites de f_λ en 0 et $+\infty$, et on montrera que $f_\lambda(m_\lambda) = \frac{1}{2m_\lambda^2}$.

Q7 Déterminer la valeur exacte m_1 . Représenter graphiquement la fonction f_1 .

Exercice n° 2

Le but de l'exercice est de chercher toutes les fonctions f deux fois dérivables sur \mathbf{R} vérifiant l'équation différentielle suivante sur \mathbf{R} :

$$(E) : \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos(x)$$

Q8 Chercher les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y'' + y = \cos(x)$$

Q9 Chercher les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle

$$(E_2): \quad y'' - y = x$$

Soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbf{R} solution de l'équation (E) . On définit les fonctions g et h sur \mathbf{R} par

$$g(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Q10 Exprimer f en fonction de g et h .

Q11 Montrer que g est une fonction paire.

Q12 Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E_1) .

Q13 En déduire qu'il existe une constante réelle α telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad g(x) = \alpha \cos(x) + \frac{1}{2} x \sin(x)$$

Q14 Montrer que h est une fonction impaire.

Q15 Montrer que h est solution de l'équation différentielle (E_2) .

Q16 En déduire qu'il existe une constante réelle β telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = \beta \operatorname{sh}(x) - x$$

Q17 Déduire des questions précédentes la fonction f .

Q18 Conclure quant au problème posé initialement.

Mots clés

Équation différentielle linéaire du 1^{er} et du 2nd ordre; courbe intégrale; problème de Cauchy; représentation graphique d'une fonction; fonction paire et impaire.

Cours utilisé

- ▶ Résolution des équations différentielles linéaires du 1^{er} et du 2nd ordre.
- ▶ Méthode de variation de la constante.
- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires.



Dérivabilité

Thèmes abordés : dérivabilité.

Durée du devoir : 2h.

Niveau : ★★

Exercice n° 1

Q1 Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et f la fonction définie sur \mathbf{R}^+ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a et b afin que f soit de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}_+^* .

Q2 Tracer alors le graphe de f .

Exercice n° 2

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

Q3 Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie.

Q4 Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$. Déterminer les variations de f sur \mathbf{R}^+ et la limite de f en $+\infty$.

Q5 Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dans l'intervalle $[0, 1]$.

Q6 Montrer que la fonction f admet un point fixe α dans $[0, 1]$.

Indication : on sera amené à étudier la fonction $N : x \mapsto (x+1)e^x - (x+2)^2$.

Q7 Montrer que $\max_{t \in [0, 1]} |f'(t)| = \frac{2e}{9}$. On notera k ce maximum.

Q8 Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$.

Q9 En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n$ puis que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers α .

Exercice n° 3

Soit n un entier naturel. Le but de cet exercice est de démontrer de deux façons différentes l'identité

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (\star)$$

Q10 Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée k^e du monôme $x \mapsto x^n$.

Q11 En écrivant $x^{2n} = x^n x^n$ et en utilisant la formule de Leibniz, calculer la dérivée n^e de $x \mapsto x^{2n}$ puis montrer l'identité (\star) .

Q12 Dans cette question, on se propose de démontrer l'identité (\star) par un raisonnement combinatoire. Soit E un ensemble fini de cardinal $2n$. En dénombrant l'ensemble des parties de E de cardinal n , prouver la formule (\star) .

Indication : on pourra partager l'ensemble E en une réunion disjointe $E = E_1 \uplus E_2$ avec $|E_1| = |E_2| = n$.

Mots clés

Dérivée; dérivabilité en un point; classe \mathcal{C}^1 ; suite définie par récurrence; point fixe; inégalité des accroissements finis; coefficient binomial; formule de Leibniz; dénombrement.

Cours utilisé

- ▶ Définition de la classe \mathcal{C}^1 .
- ▶ Définition de la dérivabilité en un point.
- ▶ Définition de la continuité en un point.
- ▶ Étude d'une suite définie par récurrence.
- ▶ Inégalité des accroissements finis.
- ▶ Formule de Leibniz.
- ▶ Nombre de k -combinaisons d'un ensemble fini.



Matrice

Thèmes abordés : matrice.

Durée du devoir : 2h.

Niveau : ★

Une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ est dite diagonalisable s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ une matrice diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Q1 Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

Q2 Montrer que $P^{-1}AP = D$ et en déduire que A est diagonalisable.

Q3 Montrer que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

Q4 En déduire les 9 coefficients de A^n .

Q5 Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ avec $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ des réels. Montrer que N commute avec D (c'est-à-dire $ND = DN$) si, et seulement si, N est une matrice diagonale.

On considère à présent une racine carrée de la matrice A c'est-à-dire une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = A$.

Q6 On pose $N := P^{-1}MP$. Montrer que $N^2 = D$.

Q7 En déduire que N commute avec D .

Q8 En déduire que $N \in \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ avec

$$N_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$N_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad N_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Q9 En déduire que $M \in \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ où M_i est une matrice que l'on exprimera en fonction de N_i, P et P^{-1} . On ne cherchera pas à calculer les coefficients des matrices M_i .

Q10 En déduire toutes les racines carrées de la matrice A .

Q11 Déterminer la somme $\sum_{i=1}^4 M_i$.

Q12 Déterminer le produit $\prod_{i=1}^4 M_i$ en fonction de A .

On considère à présent la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On admet que

$$B^3 - 6B^2 = 18I_3$$

où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. On définit la fonction f sur \mathbf{R} par $f(x) = x^3 - 6x^2 - 18$. Le but des questions suivantes est de montrer que B n'est pas diagonalisable. Supposons par l'absurde que B soit diagonalisable. Il existe donc une matrice P inversible et une matrice diagonale $\Delta = \text{diag}(a, b, c)$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ telles que $P^{-1}BP = \Delta$.

Q13 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbf{R} . On ne demande pas de calculer α .

Q14 Montrer que $\Delta^3 - 6\Delta^2 - 18I_3 = 0_3$ et en déduire que les coefficients diagonaux de Δ sont des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Q15 En déduire que $\Delta = \alpha I_3$ et trouver une contradiction. Conclure.

Mots clés

Matrice diagonalisable; racine carrée d'une matrice.

Cours utilisé

- ▶ Calcul matriciel (et notamment notion de commutativité).
- ▶ Calcul de l'inverse d'une matrice.
- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires.



Polynôme, dérivabilité

Thèmes abordés : polynôme, dérivabilité.

Durée du devoir : 3h.

Niveau : ★ ★ ★

Exercice n° 1

Q1 Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par le polynôme $X^2 - 2X + 1$.

Exercice n° 2

Q2 Déterminer tous les polynômes de $\mathbf{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$.
N.B. : $P(X^2 + 1)$ est une composition de polynômes : $P \circ (X^2 + 1)$.

Indication : on pourra considérer la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ puis montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $P(u_n) = u_n$.

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x)$.

Q3 Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un polynôme $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

Q4 Déterminer une relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .

Q5 Préciser P_1 , P_2 et P_3 .

Q6 Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

Soit le polynôme de $\mathbf{C}[X]$ défini par $Q_n(X) := (X+i)^n - (X-i)^n$ où $n \in \mathbf{N}^*$.

Q7 Déterminer le degré de $Q_n(X)$ ainsi que son coefficient dominant.

Q8 Calculer le produit des racines de Q_n sans les déterminer explicitement.

Q9 Déterminer les racines de $Q_n(X)$ dans \mathbf{C} . On exprimera les racines à l'aide de la fonction $\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. En déduire la factorisation de $Q_n(X)$ dans $\mathbf{C}[X]$.

Q10 Montrer que la fonction \cot est strictement décroissante sur $]0, \pi[$.

Q11 En déduire que $Q_n(X)$ admet exactement $n - 1$ racines.

Q12 Quel est l'ordre de multiplicité des racines ?

Q13 Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n-1} \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Q14 Soit $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Pour tout entier n , calculer la dérivée n° de la fonction

$$\begin{aligned} \phi: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x+a} \end{aligned}$$

Q15 Chercher deux nombres complexes α et β tels que pour tout réel x :

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{\alpha}{x+i} + \frac{\beta}{x-i}$$

Q16 En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^*$, une expression de $f^{(n)}$ en fonction du polynôme Q_n .

Q17 En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad P_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i} Q_n$$

Q18 En déduire le calcul des nombres $P_k(0)$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ puis le développement limité de \arctan à l'ordre $n \in \mathbf{N}^*$ en 0.

Mots clés

Polynôme ; division euclidienne de polynômes ; degré d'un polynôme ; racine ; multiplicité d'une racine ; racine simple ; arctangente ; dérivées successives ; coefficient dominant ; nombre complexe ; développement limité.

Cours utilisé

- ▶ Théorème de la division euclidienne d'un polynôme par un autre.
- ▶ Dérivée de la fonction arctan.
- ▶ Produit des racines d'un polynôme.
- ▶ Définition et expression des racines n^{e} de l'unité.
- ▶ Formule de Taylor-Young.



Polynôme et développement limité

Thèmes abordés : relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme, développement limité d'une fraction rationnelle.

Durée du devoir : 2h.

Niveau : *

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + X^3$ avec $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3$ un polynôme unitaire de degré 3 ayant trois racines réelles distinctes α , β et γ . On suppose que le coefficient constant a_0 est non nul.

Q1 Justifier que les racines de P sont non nulles.

Q2 Déterminer en fonction de a_0 , a_1 et a_2 l'expression des quantités $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ et $\alpha\beta\gamma$.

Q3 On définit

$$\sigma_1 := \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \quad \sigma_2 := \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma} \quad \text{et} \quad \sigma_3 := \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\text{Montrer que } \sigma_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \sigma_2 = \frac{a_2}{a_0} \text{ et } \sigma_3 = -\frac{1}{a_0}.$$

On définit à présent les quantités

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, \quad S_k := \frac{1}{\alpha^k} + \frac{1}{\beta^k} + \frac{1}{\gamma^k}$$

Q4 Montrer que $S_2 = \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2}$.

Q5 Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on définit $f(x) = x^3 P\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) + f\left(\frac{1}{\beta}\right) + f\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ et en déduire que

$$S_3 = -\frac{1}{a_0} (3 + a_2 S_1 + a_1 S_2)$$

Q6 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\}$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma}$$

Q7 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \frac{P'(x)}{P(x)}$ au voisinage de 0 en fonction des S_k pour $k \in \{1, 2, 3\}$.

On considère le polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 1$ et la fonction $\phi : x \mapsto \frac{3x^2 - 12x}{x^3 - 6x^2 + 1}$.

Q8 Montrer que P admet 3 racines réelles distinctes que l'on note α , β et γ . On ne demande pas de calculer ces racines.

Q9 Calculer les sommes S_1 , S_2 et S_3 et en déduire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction ϕ au voisinage de 0.

Q10 Retrouver ce développement limité par un calcul direct.

Q11 Déterminer l'équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe $\mathcal{C} : y = \phi(x)$ au point d'abscisse 0 puis la position \mathcal{T} par rapport à \mathcal{C} .

Mots clés

Polynôme; relation entre les coefficients d'un polynôme et ses racines; développement limité.

Cours utilisé

- ▶ Formules donnant les relations entre les coefficients d'un polynôme et ses racines.
- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires.
- ▶ Développement limité d'un quotient de fonctions.
- ▶ Position relative d'une tangente en utilisant un développement limité.



Devoir 14

Devoir de synthèse (1^{er} semestre)

Thèmes abordés : fonction trigonométrique réciproque, équation différentielle, dérivabilité, polynôme, probabilité.

Durée du devoir : 2h.

Niveau : ★

Exercice n° 1

Q1 Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice n° 2

Q2 Résoudre l'équation différentielle $(1 + \operatorname{ch}(x))y' - \operatorname{sh}(x)y = (1 + \operatorname{ch}(x))\operatorname{sh}(x)$.

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$.

Q3 Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .

Q4 Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Q5 On note \tilde{f} le prolongement de f . Donner la définition de \tilde{f} .

Q6 Montrer que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{D}_f \cup \{0\}$.

Exercice n° 4

Q7 Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 1$.

Exercice n° 5

On dispose de trois pièces équilibrées dont l'une a deux « faces ». On prend une pièce au hasard et on effectue des lancers indépendants de cette pièce.

Q8 Quelle est la probabilité d'obtenir « face » au premier lancer ?

Q9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité d'obtenir « face » au cours des n premiers lancers.

Q10 Sachant que l'on a obtenu « face » au cours des n premiers lancers, déterminer la probabilité p_n que l'on ait choisi la pièce truquée.

Q11 Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \geq 0}$. Interpréter ce résultat.

Mots clés

Fonction arctan ; équation différentielle du 1^{er} ordre ; classe \mathcal{C}^1 ; prolongement par continuité ; développement limité ; polynôme ; probabilité.

Cours utilisé

- ▶ Équation différentielle du 1^{er} ordre.
- ▶ Fonctions trigonométriques hyperboliques.
- ▶ Définition d'un prolongement par continuité.
- ▶ Développements limités de $\ln(1+x)$ et $\sin(x)$.
- ▶ Définition de la classe \mathcal{C}^1 .
- ▶ Racines 4^e d'un nombre complexe.
- ▶ Formule des probabilités totales.
- ▶ Événements indépendants.



Espace vectoriel, projecteur

Thèmes abordés : projection, suites.

Durée du devoir : 1h.

Niveau : ★★

Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E vérifiant l'égalité :

$$f^2 - 2f - 3\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad (\star)$$

où f^2 désigne la composée $f \circ f$, Id_E l'application $E \rightarrow E$, $x \mapsto x$ et $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'application nulle $E \rightarrow E$, $x \mapsto 0_E$. On définit les applications g et h par

$$g := f - 3\text{Id}_E \quad \text{et} \quad h := f + \text{Id}_E$$

On définit $G := \ker(g)$ et $H := \ker(h)$.

Q1 Justifier, *sans calcul*, que g et h sont des endomorphismes de E .

Q2 Démontrer que G et H sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Indication : on pourra procéder par analyse-synthèse.

On note p (respectivement q) la projection sur G parallèlement à H (respectivement sur H parallèlement à G).

Q3 Montrer que $p = \frac{1}{4}(\text{Id}_E + f)$ et $q = \frac{1}{4}(3\text{Id}_E - f)$.

Q4 Que valent $p \circ q$ et $q \circ p$?

Q5 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^n = 3^n p + (-1)^n q$.

Q6 Exprimer f^n en fonction de l'entier n et des applications f et Id_E .

Soit f l'endomorphisme de \mathbf{R}^2 défini par $f(x, y) = (5x - 4y, 3x - 3y)$.

Q7 Vérifier que f satisfait la relation (\star) .

Q8 Déterminer une expression de $f^n((x, y))$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $n \in \mathbf{N}$.

Q9 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ les suites définies par $(u_0, v_0) = (1, 1)$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+1} = 5u_n - 4v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 3u_n - 3v_n$$

À l'aide de la question précédente, déterminer une expression explicite de u_n et v_n en fonction de l'entier n .

Mots clés

Lemme des noyaux ; projecteur ; endomorphisme ; suites entremêlées.

Cours utilisé

- ▶ Sous-espaces supplémentaires ; raisonnement par analyse-synthèse.
- ▶ Détermination d'un noyau.
- ▶ Calcul avec des projecteurs.