

Charles Cochet

400 exercices de mathématiques

posés aux

oraux des concours

MP/MPI

- CCINP
- CCMP
- CCS
- CMT
- ENSEA
- Navale
- Saint-Cyr
- Polytechnique



Exercices niveau Sup

1.1 Énoncés

1.1.1 Nombres complexes, calculs algébriques

Exercice 1.1 : CMT 2018

Démontrer que les affixes des racines du polynôme :

$$P(X) = X^3 + (1+i)X^2 + (4-i)X + (12-6i)$$

à coefficients complexes forment un triangle isocèle.

Exercice 1.2 : CMT 2015

Soit $u \in [0, \pi]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2(1 - \cos(u))z + 2(1 - \cos(u)) = 0$.
2. Trouver le module et l'argument des solutions.

Exercice 1.3 : CMT 2014

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sin z = 3$.

Exercice 1.4 : ENSEA 2014

Déterminer les $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :
$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n &= n \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 &= n \end{cases}.$$

1.1.2 Algèbre linéaire

Exercice 1.5 : Saint-Cyr 2012

On définit $\Phi_a : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ par $\Phi_a(P) = P(X+a)$, où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.

1. Démontrer que Φ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice M_a de Φ_a dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Démontrer que M_a est inversible et calculer M_a^{-1} .

Exercice 1.6 : CMT 2018

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$.

1. Démontrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
2. Si E est de dimension finie, alors donner la nature de f . La représenter géométriquement. Sous quelle forme matricielle peut-on mettre f ?
3. Donner un exemple d'endomorphisme de E vérifiant 1 mais tel que $f \circ f \neq f$.
4. Supposons E de dimension au moins 2. Donner un exemple d'endomorphisme de E qui ne vérifie pas 1.

Exercice 1.7 : CMT 2022

Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

Exercice 1.8 : Navale 2015

1. Soit u l'application définie sur $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad u(P) = P(X+1) - P(X).$$

Prouver qu'il s'agit d'un endomorphisme de E .

2. Démontrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad P = \sum_{k=1}^n a_k P(X+k).$$

Exercice 1.9 : Navale 2017

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

1. Considérons un endomorphisme u de E .
Démontrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\dim(\text{Ker}(u^k)) \leq k \dim(\text{Ker}(u))$.
2. Déterminer les endomorphismes u de E tels que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:
 $\dim(\text{Ker}(u^k)) = k \dim(\text{Ker}(u))$.

Exercice 1.10 : Polytechnique 2017 et Navale 2016

Soit E un K -espace vectoriel. Considérons $p+1$ formes linéaires : d'une part $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ formant une famille libre, d'autre part g .

Démontrer que $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(g)$ si et seulement si $g \in \text{Vect}\left((f_i)_{1 \leq i \leq p}\right)$.

Exercice 1.11 : CMT 2013

Soit E un K -espace vectoriel (K étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et p, q , deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$. On suppose désormais cette condition vérifiée.
En déduire $\text{Im}(p+q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.
2. Déterminer $\text{Ker}(p+q)$.

1.1.3 Algèbre matricielle

Exercice 1.12 : CMT 2013 et 2015

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Résoudre l'équation $X + \text{tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.13 : CMT 2014

Calculer $\det(A_n)$ où $A_n = (a_{i,j})_{i,j}$ vérifie $a_{i,j} = \begin{cases} 2 \cos \theta & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 1.14 : ENSEA 2018

Notons $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé.

1. Donner une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
2. Démontrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$.

Exercice 1.15 : CMT 2018

Soit A une matrice réelle d'ordre n telle que $A^5 + A = I_n$. Démontrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 1.16 : ENSEA 2019

Considérons la matrice $K = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer K^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.17 : ENSEA 2022

Pour quelles valeurs du réel m le système linéaire défini par :

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 0 \\ x + my + z + mt = 0 \\ x + y + mz + t = 0 \\ x + y + z + mt = 0 \end{cases}$$

est-il de Cramer ? Pour ces valeurs de m , le résoudre.

Exercice 1.18 : CCINP 2016

Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon la valeur du paramètre réel m :

$$\begin{cases} 2mx + y + z = 2, \\ x + 2my + z = 4m, \\ x + y + 2mz = 2m^2. \end{cases}$$

Exercice 1.19 : Saint-Cyr 2017

Déterminer les matrices M telles que $M^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.20 : CMT 2017 et 2018

Considérons un corps K .

1. Notons $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$. Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$.
2. Prouver que $\text{Vect}\{AB - BA \mid (A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2\} = \text{Ker}(\text{tr})$.
3. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$. Démontrer qu'il existe un scalaire λ tel que $\varphi = \lambda \text{tr}$.
4. Déterminer un supplémentaire de $\text{Ker}(\text{tr})$.

Exercice 1.21 : Navale 2022

Soit A et B deux matrices réelles d'ordre n telles que $\text{rg}(B) = 1$. Démontrer que $\det((A - B)(A + B)) \leq \det(A^2)$.

Exercice 1.22 : Navale 2016

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que si $\text{tr}(AM) = \text{tr}(MB)$ pour toute M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A = B$.

Exercice 1.23 : Navale 2016 (tombé deux fois !)

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. $\text{tr}(MAB) = \text{tr}(MBA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
2. Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $M = kI_n$.

Exercice 1.24 : CMT 2015

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A^p = I_p$.

1. Démontrer que $B = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p A^k$ est une matrice de projection.
2. Montrer que $\text{Ker}(B - I) = \text{Im}(B)$.
3. En déduire que $\dim(\text{Ker}(B - I_p)) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \text{tr}(A^k)$.

Exercice 1.25 : CMT 2014

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée des vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_n$. Soit A' la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée des vecteurs colonnes $C'_1, \dots, C'_n$ tels que :

$$C'_i = \sum_{k \neq i} C_k.$$

Exprimer $\det(A')$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 1.26 : CMT 2012 – théorème de Bézout pour les matrices

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2$. Supposons que $\text{pgcd}(\det A, \det B) = 1$. Démontrer qu'il existe $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2$ tel que $AU + BV = I_n$.

Exercice 1.27 : CMT 2012

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Fixons un plan vectoriel P et une droite vectorielle D non incluse dans P . Vérifier que $G = \{u \in \mathcal{L}(E) ; u(P) \subset D, u(D) \subset P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Déterminer sa dimension.

Exercice 1.28 : ENSEA 2013

$$\text{Calculer } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1.29 : CMT 2013

$$\text{Calculer } \det(A) \text{ pour } A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ où } a_{i,j} = \begin{cases} 5 & \text{si } i = j, \\ 2 & \text{si } i = j + 1, \\ 3 & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.1.4 Algèbres des polynômes et des fractions rationnelles**Exercice 1.30 : CMT 2022**

Soit $(a_0, \dots, a_n)$ une famille de $n+1$ nombres complexes distincts. Soit $(b_0, \dots, b_n)$ une famille de $n+1$ nombres complexes.

1. Démontrer qu'il existe une unique famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ de polynômes vérifiant $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$.
2. Démontrer que $(L_i)_i$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $(P(a_0), \dots, P(a_n)) = (b_0, \dots, b_n)$. Expliciter P .

Exercice 1.31 : ENSEA 2019

1. Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes $X^2 + X + 1$ et $X^2 - X + 1$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X) = (X - 1)^{n+2} - X^{2n+1}$ par $X^2 - X + 1$.

Exercice 1.32 : CMT 2018

$$\text{Calculer la fraction rationnelle } F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k} \text{ où } \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Exercice 1.33 : CCINP 2018

Notons l'application f de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à $P(X)$ associe $P(X) + P(X+1)$.

1. Démontrer que f est un isomorphisme.
2. Démontrer que pour tout entier naturel k , il existe un unique E_k dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $E_k(X+1) + E_k(X) = X^k$ et $E'_k = kE_{k-1}$.
3. Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$: $f^n(P(X)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P(X+k)$.

Exercice 1.34 : Navale 2019

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé, unitaire, de degré n , de racines $x_1, \dots, x_n$ et à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. Supposons que $P(0) \neq 0$. Démontrer que $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 3$.

Exercice 1.35 : CMT 2014, 2018 et 2019

Trouver tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1.36 : CMT 2017

1. Rappeler la définition d'une racine de multiplicité k d'un polynôme.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_3[X]$ fixés, prouver que a est racine d'ordre de multiplicité au moins 3 de $Q(X) = (X - a)(P'(X) - P'(a))^2 + (P(X) - P(a))^3$.

Exercice 1.37 : ENSEA 2015

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 1.38 : CCINP 2018

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle fixée. Construisons une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$. Considérons $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$ définie par $\varphi(X^k) = a_k$ pour tout k .

1. (a) Soit $Y = X + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\varphi(Y^n)$ en fonction des a_k .
(b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$.
2. (a) Soit $S_{q,n}$ le nombre de surjections d'un ensemble à q éléments dans un ensemble à n éléments. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer en fonction de $S_{q,k}$ le nombre de fonctions d'un ensemble à q éléments dans un ensemble à n éléments telles que le cardinal de l'image de f soit égal à k .
(b) En déduire que $n^q = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{q,k}$.

Exercice 1.39 : CCINP 2013

On définit une suite de polynômes par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

1. (a) Déterminer le degré et le terme de plus haut degré de T_n .
(b) Prouver que $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Soit $E_n = \{P \in \mathbb{R}[X] / (1 - X^2)P''(X) - XP'(X) + n^2P(X) = 0\}$.
(a) Démontrer que si $P \in E_n$ alors $\deg(P) = n$ ou $P = 0$.
(b) Prouver que $T_n \in E_n$.
(c) Montrer que si $P \in E_n$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda T_n$.

Exercice 1.40 : CCINP 2013

Notons $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$.

1. Écrire P sans le symbole $\sum$. En déduire les racines de P .
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 1.41 : CMT 2014

Factoriser $P(X) = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1.42 : CMT 2015

1. Déterminer toutes les racines de $P(X) = 4X^4 + 3X^2 + 1$.
2. Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. En déduire deux diviseurs de 40301.

1.1.5 Algèbre bilinéaire, produits scalaires

Exercice 1.43 : ENSEA 2015

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $(A|B) = \text{tr}(A^\top \cdot B)$.

1. Démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Démontrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\text{tr}(A^\top \cdot A)}$.

Exercice 1.44 : CCMP 2017 et ENSEA 2015 !

Soit E un espace préhilbertien réel, n un entier naturel non nul et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs normés de E telle que :

(H1) La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

(H2) Pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$.

Montrer que $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E .

Le résultat reste-t-il vrai si on remplace (H1) par l'hypothèse

(H3) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i \neq 0_E$?

Exercice 1.45 : CMT 2013

Soit E un espace vectoriel euclidien. Considérons une application f de E dans E telle que : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y)$. Démontrer que f est linéaire.

1.1.6 Suites et séries

Exercice 1.46 : CMT 2016

Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Considérons $X_p = \{n \in \mathbb{N}^* / H_n \geq p\}$ et $n_p = \min X_p$.

1. Démontrer que n_p existe.
2. Calculer n_0, n_1, n_2, n_3 .
3. Démontrer que $(n_p)_p$ est une suite divergente.

Exercice 1.47 : CMT 2014

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Démontrer que $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Exercice 1.48 : CMT 2016

On pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(x)}{1+x} dx$. Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$.

Exercice 1.49 : Navale 2021 et CMT 2017

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\sum_n u_n$ converge.

1. Démontrer que l'on n'a pas nécessairement $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Démontrer que c'est le cas lorsque $(u_n)_n$ est décroissante.

Exercice 1.50 : Navale 2015

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable en 0, telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) < 1$. Construisons une suite $(u_n)_n$ avec $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n f(u_n)$.

1. Étudier la suite $(u_n)_n$.
2. Supposons $f'(0) \neq 0$. Montrer que $\sum_n u_n^2$ est convergente.

Exercice 1.51 : Navale 2021 et 2014

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $(E_m) : m \ln\left(1 + \frac{x}{m+1}\right) = x$ admet une unique solution x_m sur $] -2, -1[$, puis étudier la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 1.52 : ENSEA 2022

Pour tout n , on note (E_n) l'équation $x^n = x + 1$ ($x \geq 0$).

1. Démontrer que pour tout n , (E_n) admet une unique solution x_n .
2. Démontrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente de limite 1.
3. Déterminer un développement limité de x_n .

Exercice 1.53 : CMT 2014

1. Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation $x - e^{-x} = n$ admet une unique solution que l'on notera x_n .
2. Donner un développement asymptotique à quatre termes de x_n .

Exercice 1.54 : CMT 2014

Nature puis calcul de la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 1.55 : CMT 2013

Nature de la série $\sum_n u_n$ avec $u_n = \frac{\ln(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n}+n+n^2}$, $n \geq 1$.

Exercice 1.56 : CMT 2013

Soit $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k}}$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 1.57 : CMT 2013

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes réels telle que $u_1 > 0$ et : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n}$ pour tout $n \geq 1$. Déterminer les conditions sur α pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 1.58 : CMT 2012

Soit $\sum_n u_n$ une série convergente à termes réels positifs. Démontrer que la série $\sum_n \sqrt{u_n u_{2n}}$ est convergente.

Exercice 1.59 : CMT 2012

La suite $\left(\frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} \right)_{n \geq 1}$ converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?

Exercice 1.60 : CCS 2021 maths 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons b_n le nombre de 1 dans la décomposition binaire de n . Posons $\varepsilon_n = (-1)^{b_n}$.

1. Écrire une fonction `epsilon(n)` qui renvoie la valeur de ε_n .
2. Constater à l'aide de `python` que $\varepsilon_{2n+1} = -\varepsilon_n$ et $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n$. Le prouver.
3. Écrire une fonction `epsilon2(n)` qui calcule alors les valeurs prises par ε_n à l'aide des formules de la question 2.

1.1.7 Limites, continuité, dérivabilité**Exercice 1.61 : CCINP 2019**

1. Énoncer le théorème de Rolle et le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Considérons une fonction $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 1$. Démontrer qu'il existe un point de $[0, 2]$ en lequel la tangente à la courbe de f est horizontale.
3. Soit $x_1, \dots, x_n$ dans $[0, 1]$. Supposons que f est continue sur $[0, 1]$. Démontrer qu'il existe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $f(x_0) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$.

Exercice 1.62 : ENSEA 2019

Déterminer la limite quand $x \rightarrow 0$ de $\left(\frac{\tan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 1.63 : CMT 2019

1. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y).$$

2. Reprendre la question précédente dans le cas où f n'est que continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.64 : CMT 2018 et 2019

Considérons la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1.65 : Saint-Cyr 2013

Montrer que : $\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(1-t) \cdots (n-t)}{n!} \leq \frac{1}{(1+n)^t}$.

Exercice 1.66 : CCS 2022 maths 1

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$. On suppose que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{Q}$ vers une fonction f . On pose :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \sup\{f(r) / r \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, x[\} & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) Démontrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
(b) Démontrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que g est continue en a . Démontrer que $(f_n(a))_n$ converge vers $g(a)$.

1.1.8 Intégration**Exercice 1.67 : CMT 2021**

- Écrire la factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$.
- Justifier que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \ln(|x - e^{it}|) dt$ est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Calculer sa valeur à l'aide d'une somme de Riemann.

Exercice 1.68 : CMT 2012

Étudier la série $\sum_n u_n$ avec $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2 + (n-p)^2}$.

Exercice 1.69 : Saint-Cyr 2017

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(x) = 1 - \int_0^x (x-t)f(t)dt$.

Exercice 1.70 : CMT 2014

Notons $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha + (n-p)^\alpha}$, $\alpha > 0$. Nature de la série $\sum_n u_n$?

1.1.9 Développements limités**Exercice 1.71 : CMT 2012**

Soit $f(x) = x + \ln(1+x)$ pour tout $x > -1$.

- Montrer que f est une bijection. On note g sa bijection réciproque.
- Calculer sans réflexion $g(0)$ et $g'(0)$.
- Prouver que g admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.
- Exprimer le développement limité de g à l'ordre 3.

Exercice 1.72 : CMT 2013

Prouver la liberté de la famille de fonctions

$$(x \mapsto 1, x \mapsto \exp(x) \operatorname{th}(x), x \mapsto \exp(x) \operatorname{th}^2(x), \dots, x \mapsto \exp(x) \operatorname{th}^n(x)).$$

1.1.10 Probabilités et combinatoire

Exercice 1.73 : CMT 2015

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) . Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 1.74 : ENSEA 2021

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Déterminer la loi de $Y = \min(X_1, X_2)$ et son espérance.

Exercice 1.75 : CMT 2015

Considérons une urne contenant $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$, avec N entier impair. On tire N boules sans remise. Notons S la somme des numéros des N boules tirées, et S' la somme des numéros des N boules restantes. Déterminer $\mathbb{P}(S > S')$.

Exercice 1.76 : Navale 2015

On lance m dés à six faces non truqués. On relance les dés n'ayant pas obtenu un 6 de manière identique, jusqu'à ce qu'on n'ait que des 6.

1. On fixe un dé. Notons A_n l'événement « ne pas obtenir de 6 en n lancers de ce dé ». Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Soit l'événement B_n : « obtenir finalement les m 6 en au plus n lancers ». Déterminer $\mathbb{P}(B_n)$.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n)$. Commenter.

Exercice 1.77 : Navale 2021

On a six dés équilibrés à six faces. À chaque lancer, on ôte les dés affichant un 6. Notons X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers nécessaires pour épuiser les six dés. Déterminer la loi de X .

Exercice 1.78 : CMT 2015

1. Démontrer qu'une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.
2. Soit E un ensemble dénombrable en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Soit B un ensemble dénombrable disjoint de E . Déterminer une bijection entre E et B .

1.1.11 Fonctions convexes, inégalités de convexité

Exercice 1.79 : CMT 2018

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose f de limite nulle en $+\infty$. Démontrer que f est positive.
2. On suppose que f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$. Quelle est la position de f par rapport à cette asymptote ?

Exercice 1.80 : CMT 2015

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Démontrer que :
$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

1.2 Indications

1.2.1 Nombres complexes, calculs algébriques

Exercice 1.3 : CMT 2014

Poser $Z = e^{iz}$ et se ramener à une équation de degré 2.

Exercice 1.4 : ENSEA 2014

La perturbation $(x_i + \varepsilon_i)_i$ d'une solution évidente $(x_i)_i$ peut-elle être solution ?

1.2.2 Algèbre linéaire

Exercice 1.6 : CMT 2018

4. Que dire d'un endomorphisme nilpotent ?

Exercice 1.8 : Navale 2015

2. Expliquer pourquoi il suffit de résoudre le problème pour $P \in \{1, X, \dots, X^{n-1}\}$.

Exercice 1.9 : Navale 2017

1. Prouver d'abord que $\dim(\text{Ker}(u^{k+\ell})) \leq \dim(\text{Ker}(u^k)) + \dim(\text{Ker}(u^\ell))$.

Exercice 1.10 : Polytechnique 2017 et Navale 2016

Effectuer une récurrence sur p . L'initialisation donne la technique pour l'hérédité.

Exercice 1.11 : CMT 2013

2. Démontrer que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

1.2.3 Algèbre matricielle

Exercice 1.15 : CMT 2018

Calculer $(A^2 + A + I_n)(A^3 - A^2 + I_n)$.

Exercice 1.16 : ENSEA 2019

Par récurrence sur n , prouver que K^n est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ puis trouver a_n .

Exercice 1.17 : ENSEA 2022

$C_1 \leftarrow C_1 - C_4$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_4$.

Exercice 1.19 : Saint-Cyr 2017

Utiliser $AM = MA$, de sorte à annuler le plus de coefficients de M possible.

Exercice 1.20 : CMT 2017 et 2018

Une inclusion est claire. Prouver que les deux espaces ont même dimension.

Exercice 1.21 : Navale 2022

Expliquer pourquoi il existe P et Q inversibles telles que $B = PE_{1,1}$.

Exercice 1.22 : Navale 2016

Appliquer la formule aux matrices élémentaires $E_{i,j}$.

Exercice 1.23 : Navale 2016 (tombé deux fois !)

Pour le sens direct, utiliser les matrices $E_{i,j}$ et leur relation de Chasles.

Exercice 1.24 : CMT 2015

1. Prouver que $M \mapsto M^k$ est bijective sur $\{A^r / r \in \mathbb{Z}\}$ puis calculer B^2 .

Exercice 1.25 : CMT 2014

Additionner toutes les colonnes à la première. Ensuite, soustraire la première colonne aux autres.

Exercice 1.27 : CMT 2012

Se placer dans une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

Exercice 1.28 : ENSEA 2013

L'énoncé ne demande pas explicitement une forme factorisée, néanmoins il semble peu probable qu'un candidat développant brutalement et fournissant un résultat développé obtienne l'intégralité des points... Cet exercice illustre l'adage :

« au Collège on apprend à développer, au Lycée à factoriser, en Prépa à réfléchir ».

Ceci étant dit, effectuer $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in \llbracket 2, 3, 4 \rrbracket$.

1.2.4 Algèbres des polynômes et des fractions rationnelles**Exercice 1.30 : CMT 2022**

On ne présente plus les polynômes interpolateurs de Lagrange. Voir les sujets CCS 2022 PC maths 2 et CCINP 2018 MP maths 1 ainsi que les exercices 87 et 90 de la banque d'exercice des CCINP.

Exercice 1.31 : ENSEA 2019

2. Quel est le degré du reste ? L'obtenir en calculant $P(j+1)$ et $P(-j)$.

Exercice 1.32 : CMT 2018

Factoriser puis dériver $P(X) = X^n - 1$.

Exercice 1.34 : Navale 2019

Factoriser P , puis utiliser les relations coefficients/racines.

Exercice 1.35 : CMT 2014, 2018 et 2019

Soit P un tel polynôme. Que dire d'une racine de $P - i$?

Exercice 1.39 : CCINP 2013

2.(b) Dériver deux fois $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Exercice 1.40 : CCINP 2013

3. Évaluer en 1 la formule de la question 2.

1.2.5 Algèbre bilinéaire, produits scalaires**Exercice 1.45 : CMT 2013**

Développer $\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|^2$.

1.2.6 Suites et séries

Exercice 1.47 : CMT 2014

Utiliser l'astuce classique $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ valable pour a et b dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.48 : CMT 2016

Effectuer le changement de variable affine $x = t \frac{\pi}{n}$ puis majorer u_n .

Exercice 1.49 : Navale 2021 et CMT 2017

1. Poser $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré et $u_n = \frac{1}{n^2}$ sinon.

Exercice 1.50 : Navale 2015

2. Utiliser $f(x) = f(0) + (x - 0)f'(0) + o(x)$ pour x proche de 0.

Exercice 1.52 : ENSEA 2022

3. Appliquer $\ln$ à $x_n^n = x_n + 1$ avec $x_n = 1 + o(1)$, puis effectuer un DL.

Exercice 1.53 : CMT 2014

2. Pour la limite, utiliser $x_n > n$. En déduire que $x_n = n + o(1)$ puis injecter dans l'équation définissant x_n . Puis itérer le processus.

Exercice 1.54 : CMT 2014

Pour la valeur de la somme, simplifier la somme partielle.

Exercice 1.56 : CMT 2013

Utiliser le théorème de sommation des relations de comparaison.

Exercice 1.57 : CMT 2013

Obtenir le signe et la monotonie de $(u_n)_n$. Discuter ensuite selon si $\alpha > 1$, ou pas.

Exercice 1.58 : CMT 2012

Utiliser l'astuce classique $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$ si a et b sont positifs.

Exercice 1.59 : CMT 2012

Utiliser la formule de Stirling sous la forme $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$.

1.2.7 Limites, continuité, dérivabilité

Exercice 1.61 : CCINP 2019

3. Noter i_0 et j_0 des indices en lesquels le max et le min de $\{f(x_i)/1 \leq i \neq n\}$ sont atteints.

Exercice 1.63 : CMT 2019

1. Déjà dériver deux fois la relation initiale par rapport à x . Ensuite dériver deux fois la relation initiale par rapport à y . Enfin effectuer la différence des deux !

Exercice 1.65 : Saint-Cyr 2013

Se ramener à étudier le signe de $\varphi(t) = t \ln(1 + n) + \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{t}{k}\right)$.

Exercice 1.66 : CCS 2022 maths 1

1.(b) Discuter selon si x et y sont dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (quatre cas au total).

1.2.8 Intégration

Exercice 1.67 : CMT 2021

2. Calculer $\ln|x^n - 1|$ avec la question 1 pour obtenir une somme de Riemann.

Exercice 1.68 : CMT 2012

Faire apparaître une somme de Riemann.

Exercice 1.69 : Saint-Cyr 2017 maths 2

Remarquer que $(x - t)f(t) = xf(t) - tf(t)$ (puissant, non ?).

Exercice 1.70 : CMT 2014

Faire apparaître une somme de Riemann.

1.2.9 Développements limités

Exercice 1.72 : CMT 2013

Partir d'une combinaison linéaire nulle. Évaluer en 0 pour éliminer un coefficient. Effectuer un DL pour annuler un autre. Simplifier, recommencer.

1.2.10 Probabilités et combinatoire

Exercice 1.73 : CMT 2015

Noter que $[X + Y = k] = \bigsqcup_{i=0}^k [X = i] \cap [Y = k - i]$. Plus loin, démontrer que

$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$ en développant $(1 + X)^{m+n}$ de deux façons différentes.

Exercice 1.74 : ENSEA 2021

Utiliser $[Y \geq k] = [X_1 \geq k] \cap [X_2 \geq k]$ puis l'indépendance de X_1 et X_2 .

Exercice 1.75 : CMT 2015

Calculer $\mathbb{P}(S = S')$, puis conclure.

Exercice 1.76 : Navale 2015

2. Considérer l'événement $A_{i,n}$: « le i -ième dé ne donne pas de 6 en n lancers ».

Exercice 1.77 : Navale 2021

Considérer l'événement $A_{i,n}$: « le i -ième dé ne donne pas de 6 en n lancers ».

Exercice 1.78 : CMT 2015

1. Noter qu'un élément de $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ est repéré par i puis un numéro dans E_i .

1.2.11 Fonctions convexes, inégalités de convexité

Exercice 1.79 : CMT 2018

Utiliser la croissance des taux d'accroissements.

Exercice 1.80 : CMT 2015

Mettre à profit la concavité du logarithme.

1.3 Corrections

1.3.1 Nombres complexes, calculs algébriques

Exercice 1.1 : CMT 2018

On trouve sans détour que les racines de P sont $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = -2$. Ensuite $|z_2 - z_3| = \sqrt{13} = |z_1 - z_3|$ et $|z_1 - z_2| = \sqrt{26}$ ce qui fait que le triangle associé est non seulement isocèle mais aussi rectangle en $M_3(z_3)$!

Exercice 1.2 : CMT 2015

1. Le discriminant du trinôme $X^2 + 2(1 - \cos u)X + 2(1 - \cos u)$ est :
 $\Delta = -4 \sin^2 u$. Ses racines sont $\frac{1}{2}(-2(1 - \cos u) \pm 2i|\sin u|)$. On note ces racines $z_1 = -1 + \cos u + i \sin u$ et $z_2 = -1 + \cos u - i \sin u$, en utilisant le fait que $u \in [0, \pi]$. Elles sont conjuguées, l'équation étant à coefficients réels.
2. Par ailleurs $|z_1|^2 = (-1 + \cos u)^2 + \sin^2 u = 2(1 - \cos u) = 4 \sin^2 \frac{u}{2}$, de sorte que $|z_1| = |z_2| = 2 \left| \sin \frac{u}{2} \right|$. Or $\frac{u}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ d'où $|z_1| = |z_2| = 2 \sin \frac{u}{2}$. Enfin :
$$\begin{aligned} z_1 &= -2 \sin^2 \frac{u}{2} + 2i \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} = 2 \sin \frac{u}{2} \left(-\sin \frac{u}{2} + i \cos \frac{u}{2} \right) \\ &= |z_1| \left(\cos \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right) = |z_1| e^{i(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2})}, \end{aligned}$$
ce qui permet d'affirmer que $\arg(z_1) = \frac{u}{2} + \frac{\pi}{2}$ et $\arg(z_2) = -\frac{u}{2} - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 1.3 : CMT 2014

Remarquons qu'en posant $Z = e^{iz}$ l'équation équivaut à $Z - \frac{1}{Z} = 6i$, ou encore $Z^2 - 6iZ - 1 = 0$. Les deux racines complexes sont $Z_1 = 3i - 2i\sqrt{2}$ et $Z_2 = 3i + 2i\sqrt{2}$. L'équation initiale se réécrit $e^{iz} = i(3 \pm 2\sqrt{2})$. Posons $z = x + iy$, ce qui donne $e^{ix}e^{-y} = i(3 \pm 2\sqrt{2})$. Résolvons ces deux équations :

- $e^{-y}(\cos x + i \sin x) = i(3 + 2\sqrt{2})$ implique $\cos x = 0$ donc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. En outre $e^{-y} \sin x = 3 + 2\sqrt{2} > 0$ permet de préciser : il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi\ell$ et $y = -\ln(3 + 2\sqrt{2})$.
- $e^{-y}(\cos x + i \sin x) = i(3 - 2\sqrt{2})$ implique $\cos x = 0$ donc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. En outre $e^{-y} \sin x = 3 - 2\sqrt{2} > 0$ permet de préciser : il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi\ell$ et $y = -\ln(3 - 2\sqrt{2})$.

Exercice 1.4 : ENSEA 2014

Considérons le système :

$$\begin{cases} (1) & 1 + 1 + \cdots + 1 = n \\ (2) & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \\ (3) & x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n \end{cases}$$

En effectuant la combinaison linéaire $(1) - 2 \times (2) + (3)$, on obtient :

$$(1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 + \cdots + (1 - x_n)^2 = 0,$$

ce qui prouve que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

La seule solution au problème est donc $(1, \dots, 1)$.

1.3.2 Algèbre linéaire

Exercice 1.5 : Saint-Cyr 2012

Attention à la taille de la matrice ! L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ donc $M_a \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. On utilisera avec profit l'indexation « à la python » c'est-à-dire avec des indices de 0 à n (plutôt que de 1 à $n+1$). Grand classique des exercices concernant la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$!

1. L'application Φ_a est clairement linéaire. De plus $\Phi_a(P)$ est bien de degré inférieur à n si P l'est, d'où Φ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Remarquons que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $\Phi_a(X^i) = (X+a)^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a^{i-j} X^j$. Par conséquent :

$$M_a = \left(\binom{i-j}{j-1} a^{i-j} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

3. La matrice est triangulaire, donc son déterminant est le produit des termes diagonaux : $\det(M_a) = 1$. Ainsi M_a est inversible. Par ailleurs la bijection réciproque de Φ_a est Φ_{-a} , ce qui implique $M_a^{-1} = M_{-a}$.

Exercice 1.6 : CMT 2018

Les questions 1 et 2 sont du cours !

1. Tout d'abord, soit $x \in E$. Il vient $x = (x-f(x)) + f(x)$ avec $x-f(x) \in \text{Ker}(f)$ et $f(x) \in \text{Im}(f)$, d'où $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.
Soit maintenant $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$, alors $y = f(x) = f \circ f(x) = f(y)$ pour un $x \in E$. De plus $f(y) = 0$, d'où $y = 0$. Ainsi $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe.
2. Supposons E de dimension finie. Alors f est la projection de E sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition, et en notant $r = \text{rg}(f)$, il vient $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0_{n-r, n-r} & 0_{n-r, r} \\ 0_{r, n-r} & I_{r, r} \end{pmatrix}$.
3. Pour tout endomorphisme bijectif tel que $f \circ f \neq f$ (par exemple $f = 2\text{Id}_E$), on a $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) = E$ donc $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$. En revanche, par construction : $f \circ f \neq f$.
4. Supposons que E est de dimension au moins 2. Soit f nilpotent d'indice 2, c'est-à-dire $f^2 = 0$ et $f \neq 0$ (par exemple f canoniquement associé à la matrice $E_{1,n}$). Par construction $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f) \neq E$. Par conséquent $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ ne sont absolument pas supplémentaires (précisément : ni en somme directe, ni de somme égale à E !).

Exercice 1.7 : CMT 2022

L'application φ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (par linéarité de l'application $P(X) \mapsto P(X+1)$) et même de $\mathbb{R}_n[X]$, puisque $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P)$.

1. Supposons $\varphi(P) = 0$, alors $P(X+1) = P(X)$. On en déduit que $P(0) = P(1) = P(2) = \dots = P(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi $Q(X) = P(X) - P(0)$ admet une infinité de racines : il est nul. Il s'ensuit que P est constant. Réciproquement $\varphi(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{R}$. En conclusion $\text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}$.
2. D'une part si $n = 0$ alors $\varphi(X^0) = 0$ et si $n = 1$ alors $\varphi(X^1) = 1$. D'autre part si $n \geq 2$, alors d'après la formule du binôme de Newton

$$\varphi(X^n) = (X+1)^n - X^n = nX^{n-1} + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) \leq n-2.$$

En résumé $\deg(\varphi(X^n)) = n-1$ dès que $n > 0$. La famille des $\varphi(X^n)$ est échelonnée en degré (tous étant atteints) dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi les $\varphi(X^n)$ engendrent $\mathbb{R}[X]$. Finalement $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.8 : Navale 2015

1. L'application u est linéaire, par linéarité de l'évaluation. D'après la formule du binôme de Newton : $u(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ pour tout $k \leq n-1$, donc u est à valeurs dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. En conclusion u est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
2. La formule attendue étant linéaire, il faut et il suffit de la prouver sur la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Appliquons la formule à X^p :

$$X^p = \sum_{k=1}^n a_k (X+k)^p.$$

Lorsque $p = 0$, on en déduit :

$$1 = \sum_{k=1}^n a_k. \quad (1.1)$$

Ensuite, pour $p \geq 1$ et en évaluant en 0 on obtient :

$$\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad 0 = \sum_{k=1}^n a_k k^p. \quad (1.2)$$

Les équations (1.1) et (1.2) permettent d'affirmer que les a_k sont les éventuelles solutions du système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est un système de Vandermonde associé à $(1, 2, \dots, n)$, il admet donc une unique solution. D'où l'existence et unicité d'une famille $(a_1, \dots, a_n)$ telle que pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $P = \sum_{k=1}^n a_k P(X+k)$.

Exercice 1.9 : Navale 2017

1. • Prouvons d'abord que $\dim(\text{Ker}(u^{k+\ell})) \leq \dim(\text{Ker}(u^k)) + \dim(\text{Ker}(u^\ell))$.
Notons $F = \text{Ker}(u^{k+\ell})$ et examinons $v = u|_F : \text{Ker}(u^{k+\ell}) \rightarrow E$:

$$\begin{aligned}\text{Ker}(v) &= \{x \in \text{Ker}(u^{k+\ell}) / u^\ell(x) = 0\} \subset \text{Ker}(u^\ell), \\ \text{Im}(v) &\subset \text{Ker}(u^k).\end{aligned}$$

D'après le théorème du rang, puisque F est de dimension finie :

$$\dim(\text{Ker}(u^{k+\ell})) = \text{rg}(v) + \dim(\text{Ker}(v)) \leq \dim(\text{Ker}(u^k)) + \dim(\text{Ker}(u^\ell)).$$

- D'après la formule précédente, pour $\ell = 1$:

$$\dim(\text{Ker}(u^{k+1})) \leq \dim(\text{Ker}(u^k)) + \dim(\text{Ker}(u)).$$

Par récurrence immédiate : $\dim(\text{Ker}(u^k)) \leq k \dim(\text{Ker}(u))$ comme attendu.

2. • D'une part si u est bijectif alors l'égalité est toujours vraie, car chacun des espaces $\text{Ker}(u^k)$ est réduit à $\{0\}$.
• Supposons maintenant que u n'est pas bijectif. Procédons par analyse-synthèse. Supposons que $\dim(\text{Ker}(u^k)) = k \dim(\text{Ker}(u))$ pour tout entier k de $[0, n]$. L'égalité pour $k = n$ implique que $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$ et $u^n = 0$, c'est-à-dire que u est nilpotente de noyau de dimension 1. Prouvons qu'il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = J_n.$$

Il suffit de choisir un vecteur x_0 tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$ (possible car u^{n-1} n'est pas l'application nulle) et de vérifier que $(u^{n-1}(x_0), \dots, u(x_0), x_0)$ convient.

Réciproquement, supposons que la matrice de u dans une certaine base est

$$J_n = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}. \text{ On prouve sans peine, à l'aide de la relation de Chasles}$$

$$E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{i,k} \delta_{j,\ell}, \text{ que } J_n^2 = \sum_{i=1}^{n-2} E_{i,i+2}. \text{ Par récurrence (exercice!) il vient}$$

$$J_n^k = \sum_{i=1}^{n-k} E_{i,i+k}. \text{ On en déduit } \dim(\text{Ker}(u^k)) = k = k \dim(\text{Ker}(u)) \text{ et la formule est vérifiée.}$$

Exercice 1.10 : Polytechnique 2017 et Navale 2016

Il est clair que le sens réciproque est trivial. Intéressons-nous au sens direct.

Effectuons une récurrence sur p . Supposons $p = 1$. Par hypothèse on a (f_1) famille libre constituée d'une forme linéaire, et g une autre forme linéaire telle que

$\text{Ker}(f_1) \subset \text{Ker}(g)$. Puisque f_1 n'est pas nulle, choisissons $x_1 \notin \text{Ker}(f_1)$. Pour $x \in E$ quelconque, on constate alors que :

$$f_1 \left(x - \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} x_1 \right) = f_1(x) - \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} f_1(x_1) = 0_E,$$

donc $x - \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} x_1 \in \text{Ker}(f_1)$ et par hypothèse sur $g : x - \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} x_1 \in \text{Ker}(g)$ c'est-à-dire :

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} g(x_1) \quad \text{puis} \quad g(x) = \frac{g(x_1)}{f_1(x_1)} f_1(x).$$

Or x est quelconque, d'où $g = \frac{g(x_1)}{f_1(x_1)} f_1$. Ceci permet d'affirmer que $g \in \text{Vect}(f_1)$ et achève l'initialisation.

Supposons le résultat vrai au rang $p-1 \geq 1$ et considérons des formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ et g sur E avec $(f_1, \dots, f_p)$ libre et $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(g)$.

Pour x dans E fixé, nous sommes à la recherche d'un $y = x - \sum_{i=1}^p \frac{f_i(x)}{f_i(x_i)} x_i$ qui serait dans tous les $\text{Ker}(f_i)$, car il serait alors dans $\text{Ker}(g)$. Pour trouver cet y il faut déjà $f_i(x_i) \neq 0$ pour tout i (dénominateurs!) et si possible $f_j(x_i) = 0$ si $i \neq j$, afin de bien simplifier les expressions. Trouver pour tout i un x_i vérifiant ces deux conditions revient à trouver $x_i \in \left(\bigcap_{j \neq i} \text{Ker}(f_j) \right) \setminus \text{Ker}(f_i)$. Ceci est possible puisque sinon on aurait $\bigcap_{j \neq i} \text{Ker}(f_j) \subset \text{Ker}(f_i)$, ce qui donnerait d'après l'hypothèse de récurrence au rang $p-1$ que $f_i \in \text{Vect}(f_j / j \neq i)$, ce qui est absurde par liberté de $(f_1, \dots, f_p)$.

Nous avons ainsi pour tout i un x_i tel que $f_i(x_i) \neq 0$ et $f_j(x_i) = 0$, ainsi :

$$f_i \left(x - \sum_{j=1}^p \frac{f_j(x)}{f_j(x_j)} x_j \right) = f_i(x) - \sum_{j=1}^p \frac{f_j(x)}{f_j(x_j)} f_i(x_j) = 0_E$$

et le vecteur $x - \sum_{j=1}^p \frac{f_j(x)}{f_j(x_j)} x_j$ est dans $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i)$. Par hypothèse sur g on obtient que ce vecteur est dans $\text{Ker}(g)$, d'où :

$$0 = g \left(x - \sum_{j=1}^p \frac{f_j(x)}{f_j(x_j)} x_j \right) = g(x) - \sum_{j=1}^p \frac{f_j(x)}{f_j(x_j)} g(x_j)$$

puis $g(x) = \sum_{j=1}^p \frac{g(x_j)}{f_j(x_j)} f_j(x)$. Le vecteur x étant quelconque : $g = \sum_{j=1}^p \frac{g(x_j)}{f_j(x_j)} f_j$

et ainsi $g \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$.

Exercice 1.11 : CMT 2013

1. (a) $\Rightarrow$ Supposons que $p + q$ est un projecteur, alors $(p + q)^2 = p + q$ ce qui donne après développement $p \circ q + q \circ p = 0$ donc $q \circ p = -p \circ q$. Composons à gauche par p : $p \circ q + (p \circ q) \circ p = 0$ donc $p \circ q - q \circ p = 0$. On en déduit $2(p \circ q) = 0$ et $2(q \circ p) = 0$ d'où $p \circ q = q \circ p = 0$.
 $\Leftarrow$ Supposons $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + p \circ q + q \circ p = p^2 + q^2 = p + q$ donc $p + q$ est un projecteur.
- (b) • Soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$, alors $x = p(x) = q(x)$. Composons à gauche par p : $p(x) = p(q(x)) = 0$ donc $x = 0$. Ainsi $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q)$ sont en somme directe.
 • Il est clair que $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.
 • Soit $x \in \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$, de la forme $x = x_p + x_q$. Démontrer que $x \in \text{Im}(p + q)$ revient à prouver que $x = (p + q)(x)$. Or nous avons $(p + q)(x) = p(x_p) + p(x_q) + q(x_p) + q(x_q) = x_p + 0 + 0 + x_q = x$.
 Finalement on a bien $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.
2. • Il est clair que $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p + q)$.
 • Soit $x \in \text{Ker}(p + q)$, alors $p(x) + q(x) = 0$.
 Composons à gauche par p : $p(p(x)) + p(q(x)) = 0$ donc $p(x) = 0$.
 Composons à gauche par q : $q(p(x)) + q(q(x)) = 0$ donc $q(x) = 0$.
 On a bien $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.
 En définitive $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

1.3.3 Algèbre matricielle**Exercice 1.12 : CMT 2013 et 2015**

Procédons par analyse/synthèse. Soit X une matrice vérifiant $X + \text{tr}(X)A = B$. On en déduit $X = B - \text{tr}(X)A$ donc X se met sous la forme $X = B - \lambda A$. Injectons dans l'égalité de départ : $(B - \lambda A) + \text{tr}(B - \lambda A)A = B$, ou encore $-\lambda A + \text{tr}(B)A - \lambda \text{tr}(A)A = 0$, c'est-à-dire $(-\lambda + \text{tr}(B) - \lambda \text{tr}(A))A = 0$. On peut supposer $A \neq 0$ (sinon l'équation est désespérément triviale), ce qui implique $-\lambda + \text{tr}(B) - \lambda \text{tr}(A) = 0$ d'où $\text{tr}(B) = (1 + \text{tr}(A))\lambda$. Trois cas se présentent :

- Supposons $\text{tr}(A) \neq -1$. Il vient $\lambda = \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)}$. Ainsi $X = B - \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)}A$ et l'équation admet une unique possible solution. Réciproquement, on vérifie aisément que ce X convient.
- Supposons $\text{tr}(A) = -1$. Il vient $\text{tr}(B) = 0$. Subséquemment : si $\text{tr}(A) = -1$ et $\text{tr}(B) \neq 0$ alors l'équation n'a pas de solution.
- Enfin, supposons que $\text{tr}(A) = -1$ et $\text{tr}(B) = 0$. Rappelons que X est de la forme $X = B - \lambda A$. Vérifions qu'en fait toute matrice $X = B - \lambda A$ convient :

$$(B - \lambda A) + \text{tr}(B - \lambda A)A = (B - \lambda A) + 0 + \lambda A = B.$$

En définitive : si $\text{tr}(A) = -1$ et $\text{tr}(B) = 0$, alors toutes les matrices de la forme $X = B - \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sont des solutions et il n'y en a pas d'autre.

Exercice 1.13 : CMT 2014

Le développement par rapport à la première ligne fournit une équation de récurrence linéaire double : $\Delta_n = 2 \cos(\theta) \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. Son équation caractéristique est $r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1 = 0$, c'est-à-dire $(r - e^{i\theta})(r - e^{-i\theta}) = 0$. L'équation $r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1 = 0$ revient régulièrement dans les exercices, il faut savoir la résoudre rapidement ! Il existe deux constantes α et β telles que pour tout n : $\Delta_n = \alpha e^{ni\theta} + \beta e^{-ni\theta}$. À l'aide de $\Delta_1 = 2 \cos \theta$ et $\Delta_2 = 4 \cos^2 \theta - 1$, on en déduit $\alpha = \frac{e^{i\theta}}{2i \sin(\theta)}$ et $\beta = \frac{-e^{-i\theta}}{2i \sin(\theta)}$. Enfin : $\Delta_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

Exercice 1.14 : ENSEA 2018

1. En notant C_i la i -ième colonne, nous avons $2C_1 = C_2 + C_3$. En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, nous en déduisons que $2e_1 - e_2 - e_3 \in \text{Ker}(A)$. Mais $\text{rg}(A) \geq 2$ car par exemple (C_1, C_2) est libre. Par conséquent, d'après le théorème du rang : $\dim(\text{Ker } A) \leq 1$. En conséquence de quoi : $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(2e_1 - e_2 - e_3)$.

Nous avons $\text{rg}(A) = 2$ avec les vecteurs $C_2 = e_2$ et $C_1 = -e_1 + e_2 + e_3$ non colinéaires, donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_2, -e_1 + e_2 + e_3) = \text{Vect}(e_2, -e_1 + e_3)$. Ainsi $(e_2, -e_1 + e_3)$ est une base de $\text{Im}(f)$.

2. Après calcul, le déterminant des vecteurs des bases de $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ vaut 1. Fort de cela : $(e_2, -e_1 + e_3, 2e_1 - e_2 - e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Bilan : $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A)$.
3. On constate que $A^2 = A$! Ainsi A est la matrice d'une projection, plus précisément c'est la matrice (dans la base canonique) de la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$. Ainsi la matrice recherchée est A elle-même !

Exercice 1.15 : CMT 2018

Grâce au déterminant : $1 = \det(I_n) = \det(A^5 + A) = \det(A) \times \det(A^4 + I_n)$ donc $\det(A) \neq 0$ puis A est inversible.

On remarque que $(A^2 + A + I_n)(A^3 - A^2 + I_n) = A^5 + A + I_n = 2I_n$, donc $(A^2 + A + I_n)^{-1} = \frac{1}{2}(A^3 - A^2 + I_n)$.

Exercice 1.16 : ENSEA 2019

Par récurrence, prouvons que $K^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. La formule est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 3$, supposons-la vraie au rang n . Par ailleurs

$$K^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a_n + 3 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $a_{n+1} = 2a_n + 3$. La suite $(a_n)_n$ est arithmético-géométrique. La résolution de $\ell = 2\ell + 3$ mène à $\ell = -3$. De plus $a_{n+1} - (-3) = 2a_n + 6 = 2(a_n + 3)$

d'où $a_n + 3 = 2^{n-1}(a_1 + 3)$. Or $a_1 = 3$ donc $a_n = 3 \cdot 2^n - 3$. En définitive $K^n = \begin{pmatrix} 1 & 3(2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$, et même pour $n = 0$.

Exercice 1.17 : ENSEA 2022

1. Notons A la matrice du système. Ôtons la quatrième colonne aux autres :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1-m & 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1 \\ 1-m & 1-m & 1-m & m \end{vmatrix}$$

Après factorisation par $m-1$, développement selon la seconde colonne puis règle de Sarrus :

$$\det(A) = (m-1)^3(m+2).$$

Ainsi le système est de Cramer si et seulement si $m \notin \{-2, 1\}$.

2. Lorsqu'un système est de Cramer, on a existence et unicité de la solution. Or la solution évidente $(0, 0, 0, 0)$ convient. D'où : lorsque le système est de Cramer, la seule solution est $(0, 0, 0, 0)$.

Exercice 1.18 : CCINP 2016

Notons $A = \begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4m \\ 2m^2 \end{pmatrix}$, de sorte que le

système est équivalent à $AX = B$. On a sans détour $\det(A) = (2m-1)^2(2m+2)$. Les valeurs charnières sont donc $\frac{1}{2}$ et 1.

- La matrice A est inversible si et seulement si $2m-1 \neq 0$ et $2m+2 \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq \frac{1}{2}$ et $m \neq -1$; dans ce cas elle est inversible. Ainsi, lorsque $m \notin \{\frac{1}{2}, -1\}$, le système admet une unique solution : $x = \frac{1-m}{2m-1}$, $y = \frac{3m-1}{2m-1}$, $z = \frac{2m^2-m-1}{2m-1}$.
- Supposons $m = \frac{1}{2}$, alors le système devient $x + y + z = 2 = 2 = \frac{1}{2}$. Par conséquent : si $m = \frac{1}{2}$, alors le système n'admet pas de solution.
- Supposons $m = -1$, alors nous obtenons le système

$$\begin{cases} -2x + y + z = 2, \\ x - 2y + z = -4, \\ x + y - 2z = 2, \end{cases} \quad , \quad \text{soit} \quad \begin{cases} z = x, \\ y = 2 + x. \end{cases}$$

Dans ce cas le système admet une infinité de solutions, à savoir : x quelconque, $y = 2 + x$ et $z = x$. L'espace des solutions est de dimension 1.

Exercice 1.19 : Saint-Cyr 2017

La matrice A est triangulaire supérieure et elle a 3 valeurs propres distinctes : 1, 4, 9. Il en résulte que M a également 3 valeurs propres distinctes : $\pm 1, \pm 2, \pm 3$. Elle est donc aussi diagonalisable dans la même base que A . Cherchons cette base :

si on désigne par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A dans cette base, il est clair que $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(e_1)$ et $\text{Ker}(f - 9\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(e_3)$. Enfin après calcul $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(-5e_2 + e_3)$.

Ainsi $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où après

$$\text{calcul } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

On doit donc avoir $M = P\Delta P^{-1}$, avec $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 3\gamma \end{pmatrix}$, où α, β et γ valent ± 1 .

D'où les huit solutions suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -3 \end{pmatrix}$$

et leurs opposées.

Exercice 1.20 : CMT 2017 et 2018

- Question de cours ! En notant $E_{i,j} = (\delta_{i,a}\delta_{j,c})_{a,c}$ et $E_{k,\ell} = (\delta_{k,c}\delta_{\ell,b})_{c,b}$, on obtient que $E_{i,j}E_{k,\ell} = M = (m_{a,b})_{a,b}$ avec $m_{a,b}$ égal à :

$$\sum_{c=1}^n (E_{i,j})_{a,c} (E_{k,\ell})_{c,b} = \sum_{c=1}^n \delta_{i,a} \delta_{j,c} \delta_{k,c} \delta_{\ell,b} = \delta_{i,a} \delta_{\ell,b} \delta_{j,k} = \delta_{j,k} (E_{i,\ell})_{a,b},$$

ce qui permet d'affirmer que $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$. On peut aussi obtenir ce résultat de la façon suivante. Si $E_i = (\delta_{j,i})_j$ est le i -ième vecteur de la base canonique, alors $E_{i,j} = E_i \cdot E_j^\top$. D'où

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = E_i E_j^\top E_k E_\ell^\top = E_i (E_j | E_k) E_\ell^\top = \delta_{j,k} E_{i,\ell}.$$

- Déjà, il est clair que $H = \text{Vect}\{AB - BA / (A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2\} \subset \text{Ker}(\text{tr})$. Prouvons l'autre inclusion. L'ensemble $\text{Ker}(\text{tr})$ est le noyau d'une forme linéaire non-nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc est de dimension $n^2 - 1$. Il suffit maintenant de prouver que H est de dimension au moins $n^2 - 1$, c'est-à-dire contient une famille libre d'au moins $n^2 - 1$ éléments. Or :

$$\begin{aligned} \forall i \neq j, \quad E_{i,j} &= E_{i,i}E_{i,j} - E_{i,j}E_{i,i} \in H, \\ \forall i > 1, \quad E_{1,1} - E_{i,i} &= E_{1,i}E_{i,1} - E_{i,1}E_{1,i} \in H, \end{aligned}$$

donc H contient la famille $\{E_{i,j} / i \neq j\} \sqcup \{E_{1,1} - E_{i,i} / i > 1\}$ qui est libre à $(n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$ éléments. Il s'ensuit que $H \subset \text{Ker}(\text{tr})$ avec $\dim(H) \geq \dim(\text{Ker}(\text{tr}))$, d'où $H = \text{Ker}(\text{tr})$.

3. On remarque que :

$$\begin{aligned}\forall i \neq j, \quad \varphi(E_{i,j}) &= \varphi(E_{i,k}E_{k,j}) = \varphi(E_{k,j}E_{i,k}) = \varphi(0) = 0, \\ \forall i \neq j, \quad \varphi(E_{i,i}) &= \varphi(E_{i,j}E_{j,i}) = \varphi(E_{j,i}E_{i,j}) = \varphi(E_{j,j}).\end{aligned}$$

Notons λ la valeur commune à tous les $\text{tr}(E_{i,i})$. Alors

$$\varphi\left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}E_{i,j}\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\varphi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}\varphi(E_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

d'où $\varphi(A) = \lambda \text{tr}(A)$.

4. L'ensemble $\text{Ker}(\text{tr})$ est le noyau d'une forme linéaire non-nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc est de dimension $n^2 - 1$. Tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension 1 et non inclus dans $\text{Ker}(\text{tr})$ est alors un supplémentaire de $\text{Ker}(\text{tr})$. En particulier $\text{Vect}(I_n) = \mathbb{R}I_n$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(\text{tr})$.

Exercice 1.21 : Navale 2022

La matrice B étant de rang 1, elle est équivalente à la matrice $E_{1,1}$. En d'autres termes, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que :

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & O_{n-1,n-1} \end{pmatrix} Q = PE_{1,1}Q.$$

Ceci permet d'expliciter $\det((A - B)(A + B))$:

$$\begin{aligned}& \det((A - B)(A + B)) \\ &= \det((A - PE_{1,1}Q)(A + PE_{1,1}Q)) \\ &= \det(P) \det(P^{-1}AQ^{-1} - E_{1,1}) \det(Q) \det(P) \det(P^{-1}AQ^{-1} + E_{1,1}) \det(Q) \\ &= \det(P)^2 \det(P^{-1}AQ^{-1} - E_{1,1}) \det(Q)^2 \det(P^{-1}AQ^{-1} + E_{1,1}).\end{aligned}$$

Nous avons alors la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned}& \det((A - B)(A + B)) \leq \det(A^2) \\ \iff & \det(P^{-1}AQ^{-1} - E_{1,1}) \det(P^{-1}AQ^{-1} + E_{1,1}) \\ & \leq \det(P^{-1})^2 \det(A)^2 \det(Q^{-1})^2 \\ \iff & \det(P^{-1}AQ^{-1} - E_{1,1}) \det(P^{-1}AQ^{-1} + E_{1,1}) \leq \det(P^{-1}AQ^{-1})^2.\end{aligned}$$

En notant $A' = P^{-1}AQ^{-1}$, nous avons :

$$\det((A - B)(A + B)) \leq \det(A^2) \iff \det(A' - E_{1,1}) \det(A' + E_{1,1}) \leq \det(A')^2.$$

Utilisons la n -linéarité du déterminant, en notant $C_1, \dots, C_n$ les n colonnes de A' ainsi que $E_1 = (\delta_{i,1})_i$:

$$\begin{aligned}\det(A' - E_{1,1}) &= \det(C_1 - E_1, \dots, C_{n-1}, C_n) \\ &= \det(C_1, \dots, C_n) - \det(E_1, C_2, \dots, C_n) = \det(A') - \alpha, \\ \det(A' + E_{1,1}) &= \det(C_1, \dots, C_n) + \det(C_1 + E_1, C_2, \dots, C_n) = \det(A') + \alpha,\end{aligned}$$

où on a noté $\alpha = \det(E_1, C_2, \dots, C_n)$. Par produit :

$$\det(A' - E_{1,1}) \det(A' + E_{1,1}) = \det(A')^2 - \alpha^2 \leq \det(A')^2.$$

En remontant les équivalences, nous avons bien $\det((A - B)(A + B)) \leq \det(A^2)$ dès que $\text{rg}(B) = 1$.

Exercice 1.22 : Navale 2016

Notons $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$:

$$AE_{u,v} = \sum_{i,j} a_{i,j} E_{i,j} E_{u,v} = \sum_i a_{i,u} E_{i,v}$$

(la v -ième colonne de $AE_{u,v}$ contient la u -ième colonne de A) ce qui mène à $\text{tr}(AE_{u,v}) = a_{v,u}$. Par propriété de la trace $\text{tr}(MB) = \text{tr}(BM)$, donc on obtient de façon analogue $\text{tr}(E_{u,v}B) = \text{tr}(BE_{u,v}) = b_{v,u}$.

Par définition de A et B , on en déduit $a_{v,u} = b_{v,u}$ pour tous u et v , d'où $A = B$.

Exercice 1.23 : Navale 2016 (tombé deux fois !)

Si $M = kI_n$ alors $\text{tr}(MAB) = k \text{tr}(AB) = k \text{tr}(BA) = \text{tr}(MBA)$ par propriété de la trace, d'où le sens réciproque.

Occupons-nous du sens direct. Notons $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit i et j deux entiers distincts dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Considérons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ différent de i et j . Alors $E_{i,j} = E_{i,k}E_{k,j}$ et $O = E_{k,j}E_{i,k}$ donc par propriété de M :

$$\text{tr}(ME_{i,j}) = \text{tr}(ME_{i,k}E_{k,j}) = \text{tr}(ME_{k,j}E_{i,k}) = \text{tr}(MO) = 0.$$

Or pour $M = (m_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ il vient

$$ME_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha,\beta} E_{\alpha,\beta} E_{i,j} = \sum_{\alpha} m_{\alpha,i} E_{\alpha,i} E_{i,j} = \sum_{\alpha} m_{\alpha,i} E_{\alpha,j}$$

d'où $\text{tr}(ME_{i,j}) = m_{j,i}$. Ainsi les termes extra-diagonaux de M sont nuls.

- De même $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i}$ et par propriété de M :

$$\text{tr}(ME_{i,i}) = \text{tr}(ME_{i,j}E_{j,i}) = \text{tr}(ME_{j,i}E_{i,j}) = \text{tr}(ME_{j,j})$$

donc $m_{i,i} = m_{j,j}$: les termes diagonaux de M sont égaux.

Par conséquent il existe un réel k tel que $M = kI_n$.

Exercice 1.24 : CMT 2015

1. La matrice A est inversible d'inverse A^{p-1} puisque $A^{p-1}A = AA^{p-1} = I_p$. Par conséquent l'application $M \mapsto M^k$ est bijective sur $\{A^r / r \in \mathbb{Z}\}$. Ceci implique $\{A^{k+\ell} / k \in \llbracket 1, p \rrbracket\} = \{A^k / k \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$. Subséquemment :

$$B^2 = \frac{1}{p^2} \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^p A^{k+\ell} = \frac{1}{p^2} \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^p A^k = \frac{1}{p^2} \sum_{\ell=1}^p pB = B$$

et B est un projecteur.

2. On vient de prouver que B est un projecteur, donc : $X \in \text{Im}(B)$ si et seulement si $BX = X$, soit $(B - I)X = 0$, ou encore $X \in \text{Ker}(B - I)$. Finalement $\text{Im}(B) = \text{Ker}(B - I)$.
3. Sans détour, puisque B est un projecteur et par linéarité de la trace :

$$\dim(\text{Ker}(B - I)) = \dim(\text{Im}(B)) = \text{rg}(B) = \text{tr}(B) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \text{tr}(A^k).$$

Exercice 1.25 : CMT 2014

Notons $S = \sum_{i=1}^n C_i$. Additionnons toutes les colonnes à la première :

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det(S - C_1, \dots, S - C_n) \\ &= \det(S + (n-1)S - S, S - C_2, \dots, S - C_n) \\ &= (n-1) \det(S, S - C_2, \dots, S - C_n). \end{aligned}$$

Maintenant, soustrayons la première colonne aux suivantes :

$$\det(A') = (n-1) \det(S, -C_2, \dots, -C_n).$$

Développons par linéarité la première colonne et utilisons le fait qu'un déterminant est nul dès que deux de ses colonnes sont égales (ou opposées) :

$$\det(A') = (n-1) \det(C_1, -C_2, \dots, -C_n).$$

Enfin par linéarité par rapport aux colonnes : $\det(A') = (n-1)(-1)^{n-1} \det(A)$.

Exercice 1.26 : CMT 2012 – théorème de Bézout pour les matrices

Puisque $\text{pgcd}(\det A, \det B) = 1$, il vient $\det A \neq 0$ et $\det B \neq 0$. Ainsi A et B sont inversibles. On en déduit que $A \text{com}(A)^\top = (\det A)I_n$ et $B \text{com}(B)^\top = (\det B)I_n$. L'hypothèse $\text{pgcd}(\det A, \det B) = 1$ implique l'existence d'entiers α, β tels que $\alpha \det A + \beta \det B = 1$ (théorème de Bézout). Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} I_n &= (\alpha \det A + \beta \det B)I_n = \alpha(\det A)I_n + \beta(\det B)I_n \\ &= \alpha A \text{com}(A)^\top + \beta B \text{com}(B)^\top. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $U = \alpha \text{com}(A)^\top$ et $V = \beta \text{com}(B)^\top$ on obtient $AU + BV = I_n$.

Exercice 1.27 : CMT 2012

Soit (e_1, e_2) une base de P et e_3 une base de D . La droite D n'est pas incluse dans le plan P , donc $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E . La matrice de $u \in G$ est par

conséquent de la forme : $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{pmatrix}.$

Une méthode très efficace pour démontrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E consiste à trouver une partie $\mathcal{F}$ de F telle que

$F = \text{Vect}(\mathcal{F})$: comme le nom l'indique F est le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$. En outre, ceci fournit une famille génératrice de F !

Ici $G = \text{Vect}(E_{1,3}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2})$ (en assimilant une application linéaire et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$), ce qui prouve que G est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $(E_{1,3}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2})$. De plus cette famille est libre (sous-famille d'une base). C'est ainsi une base de G et $\dim G = 4$.

Exercice 1.28 : ENSEA 2013

Effectuons $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in \{2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^4-a^4 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^4-a^4 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^4-a^4 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & (b+a)(b^2+a^2) \\ 1 & c+a & (c+a)(c^2+a^2) \\ 1 & d+a & (d+a)(d^2+a^2) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Effectuons $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in \{2, 3\}$:

$$\Delta = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & (b+a)(b^2+a^2) \\ 0 & c-b & c^3-b^3+a^2(c-b)+a(c^2-b^2) \\ 0 & d-b & d^3-b^3+a^2(d-b)+a(d^2-b^2) \end{vmatrix}$$

donc

$$\Delta = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & c^2+b^2+bc+a^2+a(c+b) \\ 1 & c^2+d^2+bd+a^2+a(c+d) \end{vmatrix}$$

puis $\Delta = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$.

Exercice 1.29 : CMT 2013

Effectuant un développement par rapport à la première colonne, nous obtenons : $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$. L'équation caractéristique de cette suite de récurrence linéaire double est $r^2 = 5r - 6$ soit $(r-2)(r-3) = 0$. Il existe donc λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels

$$\text{que } D_n = \lambda 2^n + \mu 3^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \text{ Par ailleurs } \begin{cases} D_1 = 5 = 2\lambda + 3\mu \\ D_2 = 19 = 4\lambda + 9\mu \end{cases},$$

ce qui mène à $\mu = 3$ et $\lambda = -2$. Finalement $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.3.4 Algèbres des polynômes et des fractions rationnelles

Exercice 1.30 : CMT 2022

Encore des questions de cours sur les polynômes de Lagrange !

1. L'application $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$ est linéaire, par linéarité de l'évaluation ; elle est injective, car un polynôme de

$\mathbb{C}_n[X]$ admettant au moins $n + 1$ racines est nul ; elle donc bijective, car linéaire et injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Par conséquent φ est un isomorphisme.

De fait, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ admet par φ un unique antécédent L_i , de sorte que $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ pour tous i et j .

Remarquons que le polynôme $\widetilde{L}_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ vérifie aussi $\widetilde{L}_i(a_j) = \delta_{i,j}$ pour

tous i, j . Par unicité : $L_i = \widetilde{L}_i$. Finalement : $L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

2. Supposons $\sum_{i=0}^n a_i L_i = 0$ pour des réels $a_0, \dots, a_n$. En évaluant en a_j , il vient $a_j = 0$. Ainsi $(L_i)_i$ est libre. Son cardinal est égal à la dimension $\mathbb{C}_n[X]$, donc $(L_i)_i$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

3. La bijectivité de φ implique que pour tout $(b_0, \dots, b_n)$, il existe un unique $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n)) = (b_0, \dots, b_n)$.

Grâce à $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ nous remarquons que le polynôme $\sum_{i=0}^n b_i L_i$ prend pour valeur b_j en a_j , pour tout j : ce polynôme convient. Mais par bijectivité de φ , ce polynôme est P . Il s'ensuit que $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$ est le seul élément de $\mathbb{C}_n[X]$ qui vérifie $P(a_i) = b_i$ pour tout i .

Exercice 1.31 : ENSEA 2019

1. Il vient $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$ et $X^2 - X + 1 = (X + j)(X + j^2)$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Nous utiliserons sans vergogne $j^2 + j + 1 = 0$ et $j^{3p} = 1$.
2. La division euclidienne de $P(X) = (X - 1)^{n+2} - X^{2n+1}$ par $A(X) = X^2 - X + 1$ donne l'existence et l'unicité de polynômes Q (quotient) et R (reste) réels tels que $P = AQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(A) = 2$. Le reste recherché est donc de la forme $R(X) = aX + b$, avec a et b réels. Évaluons la division euclidienne en $-j^2 = j + 1$ et en $-j$, les deux racines de A :

$$\begin{aligned} P(j+1) &= j^{n+2} - (j+1)^{2n+1} = j^{n+2} - (j^2 + 2j + 1)^n (j+1) \\ &= j^{n+2} - j^n(j+1) = j^n(j^2 - j - 1) = 2j^{n+2}, \\ P(-j) &= (-1)^n(j+1)^{n+2} + j^{2n+1} = (j^2)^{n+2} + j^{2n+1} = 2j^{2n+1}. \end{aligned}$$

Ceci fournit les équations (1) $2j^{n+2} = a(j+1) + b$ et (2) $2j^{2n+1} = -aj + b$. La suite dépend du reste de la division euclidienne de n par 3 :

- Supposons $n = 3p$. Les égalités (1) et (2) donnent $2j^2 = a(j+1) + b$ et $2j = -aj + b$, donc par différence $(2j+1)a = 2(j^2 - j) = 2(-2j-1)$ d'où $a = -2$ et $b = 2j + aj = 0$. Ainsi $R(X) = -2X$ si $n \equiv 0 \pmod{3}$.
- Supposons $n = 3p+1$. Les égalités (1) et (2) donnent $2j^3 = 2 = a(j+1) + b$ et $2 = -aj + b$, donc par différence $(2j+1)a = 0$ d'où $a = 0$ et $b = 2$. Ainsi $R(X) = 2$ si $n \equiv 1 \pmod{3}$.

• Supposons $n = 3p + 2$. Les égalités (1) et (2) donnent $2j^4 = 2j = a(j+1) + b$ et $2j^2 = -aj + b$, donc par différence $(2j+1)a = 2j - 2j^2 = 4j + 2$ d'où $a = 2$ et $b = aj + 2j^2 = -2$. Ainsi $R(X) = 2X - 2$ si $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Exercice 1.32 : CMT 2018

Posons $P(X) = \prod_{j=0}^{n-1} (X - \omega_j) = X^n - 1$. Alors $P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i \neq k} (X - \omega_i) = nX^{n-1}$ par dérivation d'un produit, d'où par linéarité de la somme :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{i \neq k} (X - \omega_i)}{\prod_j (X - \omega_j)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}.$$

Finalement $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$. C'est la formule de la dérivée logarithmique de $X^n - 1$. Attention néanmoins à ne pas utiliser de logarithme d'un polynôme ou d'un nombre complexe !

Exercice 1.33 : CCINP 2018

1. L'application f est clairement linéaire (par linéarité de l'évaluation) et conserve le degré (cf. ci-dessous pour une démonstration rigoureuse).

Soit $P \in \text{Ker}(P)$, alors $P(0) = -P(1) = -(-P(2)) = P(2) = -P(3)$, puis par récurrence immédiate $P(2n) = P(0)$ pour tout n . On en déduit que $P(X) - P(0)$ admet une infinité de racines, donc est identiquement nul. Ainsi P est constant. Or $P(0) = -P(1) = -P(0)$ d'où $P(0) = 0$ puis P est nul. Par conséquent f est injective.

Considérons la restriction f_n de f à $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, nous avons :

$$f_n(X^p) = X^p + (X+1)^p = 2X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^k,$$

de sorte que f_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et la matrice de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$[f_n]_{\text{can}(\mathbb{R}_n[X])} = \begin{pmatrix} 2 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice étant triangulaire, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux : $\det(f_n) = 2^{n+1}$. Ceci nous permet d'affirmer que f_n est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

La surjectivité de f (pas seulement de f_n !) en découle : pour tout polynôme Q , de degré n , l'application f_n possède un unique antécédent de Q .

Finalement f est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. D'après la question précédente, le polynôme X^k possède par f un unique antécédent que l'on note E_k : par construction $E_k(X) + E_k(X+1) = X^k$. Il reste à vérifier que $E'_k = kE_{k-1}$. On note au passage que E_k est de degré k (tout comme X^k). Or par hypothèse $E_k(X) + E_k(X+1) = X^k$ donc en dérivant :

$$E'_k(X) + E'_k(X+1) = kX^{k-1}.$$

Par conséquent :

$$f\left(\frac{1}{k}E'_k\right) = \left(\frac{1}{k}E'_k\right)(X) + \left(\frac{1}{k}E'_k\right)(X+1) = X^{k-1},$$

d'où par bijectivité de f : $\frac{1}{k}E'_k = E_{k-1}$, c'est-à-dire $E'_k = kE_{k-1}$.

Une démonstration par récurrence de cette formule est possible.

3. La formule demandée ressemble au binôme de Newton : inspirons-nous de sa démonstration, en effectuant une récurrence sur n .

L'initialisation ne pose pas de problème puisque l'égalité est triviale pour $n = 0$ et vraie par définition de f pour $n = 1$.

Supposons que $f^n(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P(X+k)$ pour tout P . Alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) &= f\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P(X+k)\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(P(X+k)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (P(X+k) + P(X+k+1)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P(X+k) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P(X+k+1) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P(X+k) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} P(X+k) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) P(X+k) + \binom{n}{0} P(X) + \binom{n}{n} P(X+n+1) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} P(X+k) + \binom{n+1}{0} P(X) + \binom{n+1}{n+1} P(X+n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} P(X+k). \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

Exercice 1.34 : Navale 2019

Avec les hypothèses, notons $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - x_i) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec $a_i \in \{-1, 0, 1\}$

pour tout i , et $\prod_{i=1}^n x_i = (-1)^n P(0) \neq 0$.

Posons $S = \sum_{i=1}^n x_i^2$ (la somme que l'on veut majorer), $S_1 = \sum_{i=1}^n x_i$ et $S_2 = \sum_{i < j} x_i x_j$.

Par relation coefficients/racines et grâce au fait que P est unitaire, nous obtenons $S_1 = -a_{n-1}$ et $S_2 = +a_{n-2}$. Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j = S_1^2 - 2S_2.$$

Or par hypothèse $S_1 \in \{-1, 0, 1\}$ et $S_2 \in \{-1, 0, 1\}$, d'où $\sum_{i=1}^n x_i^2 = S_1^2 - 2S_2 \leq 3$.

Exercice 1.35 : CMT 2014, 2018 et 2019

Soit P un polynôme à coefficients complexes, non constant et ne prenant que des valeurs réelles. Le polynôme $P-i$ est non constant et à coefficients complexes, donc il admet une racine (théorème de d'Alembert-Gauss). Par conséquent P prend la valeur i qui n'est pas réelle, ce qui est absurde. Ainsi P est constant, et par la même occasion réel. La réciproque est immédiate.

Exercice 1.36 : CMT 2017

1. Par définition : un polynôme P admet a pour racine d'ordre k lorsque $0 = P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a)$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.
2. Sans aucune finesse :

$$\begin{aligned} Q'(X) &= (P'(X) - P'(a))^2 + 2(X - a)P''(X)(P'(X) - P'(a)) \\ &\quad + 3P'(X)(P(X) - P(a))^2 \\ Q''(X) &= 2P''(X)(P'(X) - P'(a)) + 2P''(X)(P'(X) - P'(a)) \\ &\quad + 2(X - a)P'''(X)(P'(X) - P'(a)) + 2(X - a)P''(X)P''(X) \\ &\quad + 3P''(X)(P(X) - P(a))^2 + 6P'(X)^2(P(X) - P(a)), \end{aligned}$$

d'où $Q(a) = Q'(a) = Q''(a) = 0$ et Q admet a pour racine d'ordre au moins 3.

Exercice 1.37 : ENSEA 2015

Procédons par analyse/synthèse.

• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$. Tout d'abord, en notant n le degré de P , nous avons $2n = 2 + n$ d'où $n = 2$.

D'une part $P(-1) = P(i^2) = (i^2 + 1)P(i) = 0$ donc $P(-1) = 0$.

D'autre part $P(1) = P((-1)^2) = ((-1)^2 + 1)P(-1) = 0$ puis $P(1) = 0$.

Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(X) = \alpha(X - 1)(X + 1) = \alpha(X^2 - 1)$.

• Réciproquement, soit $P(X) = \alpha(X^2 - 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $P(X^2) = \alpha(X^4 - 1)$ et $(X^2 + 1)P(X) = \alpha(X^4 - 1)$.

Bilan : les polynômes vérifiant $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ sont les polynômes de la forme $P(X) = \alpha(X^2 - 1)$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

Exercice 1.38 : CCINP 2018

1. (a) Calcul brutal, à l'aide du binôme de Newton :

$$\varphi(Y^n) = \varphi((X+1)^n) = \varphi\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi(X^k)$$

d'où $\varphi(Y^n) = b_n$.

- (b) Encore calcul brutal, à l'aide du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} a_n &= \varphi(X^n) = \varphi((Y-1)^n) \\ &= \varphi\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} Y^k\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k. \end{aligned}$$

2. (a) Il faut choisir les k valeurs qui seront prises par notre application (il y a $\binom{n}{k}$ choix), et il reste ensuite à choisir une application surjective d'un ensemble à q éléments vers un ensemble à k éléments, ce pour quoi on a par définition $S_{q,k}$ possibilités. En conséquence de quoi, il y a $\binom{n}{k} S_{q,k}$ applications $f : \llbracket 1, q \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ prenant exactement k valeurs.
- (b) Il existe exactement n^q applications de $\llbracket 1, q \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Regroupons-les selon le cardinal k de leur image, l'entier k variant de 1 à n :

$$n^q = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{q,k}.$$

Exercice 1.39 : CCINP 2013

Les polynômes de Tchebychev ne sont pas courants aux oraux car les démonstrations sont longues, mais incontournables à l'écrit. Deux sujets très complets : CCMP 2024 MP maths 2 et CCS 2014 PSI maths 1.

1. (a) Cette propriété se démontre sans difficulté par récurrence double, avec pour hypothèse de récurrence $\deg(T_n) = n$ et $\text{dom}(T_n) = 2^n$.
- (b) Cette propriété se démontre par récurrence double. La propriété est trivialement vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie aux rangs n et $n - 1$. Alors, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &T_{n+1}(\cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta T_n(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos(n\theta + \theta) + \cos(n\theta - \theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta). \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

2. (a) Soit $P \in E_n$ avec $\deg(P) = k \neq -\infty$ (c'est-à-dire $P \neq 0$). Remarquons que dans la formule définissant E_n , le coefficient dominant a pour valeur : $-k(k-1)a_k - ka_k + n^2a_k = (n^2 - k^2)a_k = 0$. Or $a_k \neq 0$ d'où $k^2 = n^2$ puis $k = n$. Ainsi $\deg(P) = n$ dès que $P \neq 0$.

- (b) Afin de prouver que $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n$ est nul, démontrons que $(1 - \cos^2 \theta)T_n''(\cos \theta) - \cos \theta T_n'(\cos \theta) + n^2T_n(\cos \theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ étant infini, notre polynôme admettra une infinité de racines (à savoir $[-1, 1]$) donc sera effectivement nul.

En dérivant deux fois $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, on obtient :

$$-\cos \theta T_n'(\cos \theta) + \sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) = -n^2 \cos(n\theta).$$

D'où $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0$.

- (c) Soit $P \in E_n$ non nul. Soit $a_n \neq 0$ le coefficient dominant de P .

Remarquons que E_n est un espace vectoriel. Ainsi le polynôme $2^n P - a_n T_n$ est dans E_n et de degré strictement inférieur à n . Il s'ensuit que c'est le polynôme nul. On en déduit que $P = \frac{a_n}{2^n} T_n$.

Exercice 1.40 : CCINP 2013

1. Il vient $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k} = \frac{1 - X^{2n}}{1 - X^2}$. Par conséquent $P(x) = 0$ si et seulement si $x^{2n} = 1$ et $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire $x = e^{\frac{2ik\pi}{2n}}$, $0 \leq k \leq 2n-1$, $x^2 \neq 1$. En d'autres termes les racines de P sont les $x = e^{\frac{ik\pi}{n}}$, pour $1 \leq k \leq 2n-1$ et $k \neq n$. Le polynôme est de degré $2n-2$ et on a $2n-2$ racines distinctes, tout va bien.

2. Simple calcul, quoiqu'un peu brutal :

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=1, k \neq n}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) \times \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) \cdot \left(X - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) X + 1 \right). \end{aligned}$$

3. Évaluons la formule précédente en 1 :

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} 2 - 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = 2^{2n-2} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right).$$

Or le produit recherché est positif, donc $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$

Exercice 1.41 : CMT 2014

Sans aucune finesse :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X+1)(X-1)^2(X^2-X+1)(X^2-3X+1) \\ &= (X+1)(X-1)^2 \left(X - e^{i\frac{\pi}{3}} \right) \left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}} \right) \left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

Exercice 1.42 : CMT 2015

1. Les solutions de $4y^2 + 3y + 1 = 0$ sont $y_1 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{8}$ et $y_2 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{8}$.

Les solutions de $z^2 = y_1$ sont $z_1 = \frac{1-i\sqrt{7}}{4}$ et $z_2 = -z_1 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{4}$.

Les solutions de $z^2 = y_2$ sont $\bar{z}_1 = \frac{1+i\sqrt{7}}{4}$ et $-\bar{z}_1 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{4}$.

Ainsi, les racines de P sont $z_1, z_2, -z_1$ et $-z_2$.

2. On remarque que :

$$(z - z_1)(z - \bar{z}_1) = z^2 - 2\Re(z_1)z + |z_1|^2 = z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2},$$

$$(z - z_2)(z - \bar{z}_2) = z^2 - 2\Re(z_2)z + |z_2|^2 = z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}.$$

Finalement $P(X) = 4(X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2})(X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2})$.

3. Nous avons $P(10) = 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 1 = 4(100 - 5 + \frac{1}{2})(100 + 5 + \frac{1}{2})$ donc $40301 = 191 \times 211$.

1.3.5 Algèbre bilinéaire, produits scalaires**Exercice 1.43 : ENSEA 2015**

1. Le produit scalaire de Frobenius est officiellement au programme !

La bilinéarité découle de la linéarité de la trace, de la linéarité de la transposition et de la bilinéarité du produit matriciel. La symétrie provient du fait que $\text{tr}(M^\top) = \text{tr}(M)$ et que $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$ pour toutes matrices M et N . La positivité et le caractère défini-positif sont des conséquences des deux formules $\text{tr}(A^\top B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$ et $\text{tr}(A^\top A) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ (calcul classique).

2. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $|(A|B)| \leq \sqrt{(A|A)} \cdot \sqrt{(B|B)}$.

3. Simple application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $B = I_n$.

Exercice 1.44 : CCMP 2017 et ENSEA 2015

L'égalité (H2) appliquée à $x = e_j$ nous donne $(e_j|e_i) = 0$ pour tout $i \neq j$. Il s'ensuit que la famille $(e_i)_i$ est orthogonale.

Fixons $x \in E$ et posons $y = \sum_{i=1}^n (x|e_i) e_i$. Alors :

$$\|x - y\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(x - \sum_{j=1}^n (x|e_j) e_j \middle| e_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left((x|e_i) - \sum_{j=1}^n (x|e_j) (e_i|e_j) \right)^2 = 0,$$

d'où $x = \sum_{i=1}^n (x|e_i) e_i$. Ceci permet d'affirmer que $E \subset \text{Vect}(e_i | 1 \leq i \leq n)$, puis par liberté de $(e_i)_i$ que la famille $(e_i)_i$ est une base de E . Or la famille est orthonormée, d'où : $(e_i)_i$ est une base orthonormée de E .

Les hypothèses (H2) et (H3) sont malgré tout suffisantes. En effet (H2) permet d'obtenir $(e_i|e_j) = 0$ si $i \neq j$, c'est-à-dire l'orthogonalité des e_i . Et puisque $e_i \neq 0$ d'après (H3), on obtient la liberté de la famille, c'est-à-dire (H1) !

Cette démonstration est proche de celle du théorème de cours suivant : tout sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel admet une base orthonormée. Tomber sur cet exercice aux Mines-Ponts est pour le moins déroutant !

Exercice 1.45 : CMT 2013

Considérons x, y dans E et λ, μ dans $\mathbb{R}$. En notant $z = \lambda x + \mu y$, il vient :

$$\begin{aligned} & \|f(z) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|^2 \\ = & \|f(z)\|^2 + \lambda^2 \|f(x)\|^2 + \mu^2 \|f(y)\|^2 \\ & - 2\lambda(f(z)|f(x)) - 2\mu(f(z)|f(y)) + 4\lambda\mu(f(x)|f(y)) \\ = & \|z\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + \mu^2 \|y\|^2 - 2\lambda(z|x) - 2\mu(z|y) + 4\lambda\mu(x|y) \\ = & \|z - \lambda x - \mu y\|^2 = 0, \end{aligned}$$

d'où en prenant la racine $f(z) = f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Ainsi f est linéaire.

1.3.6 Suites et séries

Exercice 1.46 : CMT 2016

1. Tout d'abord $(H_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$, donc pour p fixé il existe n tel que $H_n \geq p$. Ainsi $X_p \neq \emptyset$. L'ensemble X_p est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, donc admet un minimum. D'où finalement n_p existe.
2. $H_1 = 1, H_2 = \frac{3}{2}, H_3 = \frac{11}{6}, H_4 = \frac{25}{12}$. Grâce à la calculatrice : $H_{10} \approx 2,93$ et $H_{11} \approx 3,02$ d'où $n_0 = 1, n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 11$.
3. La suite $(n_p)_p$ est croissante donc soit divergente (vers $+\infty$), soit majorée. Supposons qu'elle soit majorée : $\exists N, \forall p, n_p \leq N$. En d'autres termes à ce rang N , la somme partielle a dépassé p , pour tout p . Rédigé autrement, pour ce N fixé : pour tout $p, H_N \geq p$. Ceci est absurde ! Par conséquent $(n_p)_p$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 1.47 : CMT 2014

L'astuce classique $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ pour tous réels a et b nous fournit l'inégalité $0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, ce qui permet de majorer les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$.

Exercice 1.48 : CMT 2016

Grâce au changement de variable affine $x = t \frac{\pi}{n}$ puis à l'inégalité $\sin(u) \leq u$ si $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient :

$$0 \leq u_n = \int_0^1 \frac{\sin^3\left(t \frac{\pi}{n}\right) \pi}{1 + t \frac{\pi}{n}} dt = \pi \int_0^1 \frac{\sin^3\left(t \frac{\pi}{n}\right)}{n + t\pi} dt \leq \frac{\pi^3}{n^3} \int_0^1 t^2 dt = \frac{\pi^3}{3n^3}.$$

Or $\sum_n \frac{1}{n^3}$ est convergente, d'où par comparaison $\sum_n u_n$ converge.

Exercice 1.49 : Navale 2021 et CMT 2017

1. Considérons $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré, et $u_n = \frac{1}{n^2}$ sinon.
 - D'une part la somme des u_n lorsque n est un carré est la somme des inverses des carrés des entiers, donc convergente. D'autre part la famille des $\frac{1}{n^2}$ si n n'est pas un carré est contenue dans la famille de tous les $\frac{1}{n^2}$ qui est sommable, donc elle est également convergente. Ainsi $(u_n)_n$ est sommable.
 - La suite $(nu_n)_n$ n'est pas de limite nulle car la suite obtenue en extrayant les termes d'indice des entiers carrés est constante de valeur 1.
2. Notons S_n la somme partielle de la série. Par hypothèse $(S_n)_n$ est convergente, de valeur notée ℓ . Remarquons que, par décroissance de $(u_n)_n$:

$$2(S_{2n} - S_n) = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} = (2n)u_{2n} \geq 0.$$

Or $2(S_{2n} - S_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2(\ell - \ell) = 0$, donc par comparaison $2nu_{2n} \rightarrow 0$ c'est-à-dire $u_{2n} = o\left(\frac{1}{2n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Par ailleurs $u_{2n} \geq u_{2n+1} \geq 0$ donc à nouveau par comparaison $u_{2n+1} = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Finalement comme espéré $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 1.50 : Navale 2015

1. Par récurrence immédiate, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
 Pour $n \in \mathbb{N}$, on remarque que $0 \leq u_{n+1} = u_n f(u_n) \leq u_n$ puisque $f < 1$. Ainsi $(u_n)_n$ est décroissante. Or $(u_n)_n$ est minorée par 0, donc elle est convergente. Soit L sa limite. Puisque $u_n \in [0, 1]$ pour tout n , il vient $L \in [0, 1]$.
 Par continuité de f et grâce à $u_{n+1} = u_n f(u_n)$ on en déduit : $L = Lf(L)$. Si $L > 0$ alors $1 = f(L)$, absurde car $f < 1$. Ainsi $L = 0$ et la suite $(u_n)_n$ est décroissante de limite nulle.
2. Supposons $f'(0) \neq 0$ (c'est inutile, mais on peut prouver que $f'(0) < 0$).
 Par dérivabilité de f en 0, il vient $f(x) = f(0) + (x - 0)f'(0) + o(x)$ pour x proche de 0. Or $(u_n)_n$ est de limite nulle donc à partir d'un certain rang $f(u_n) = 1 + u_n f'(0) + o(u_n)$. Ainsi $u_{n+1} = u_n f(u_n) = u_n + u_n^2 f'(0) + o(u_n^2)$.
 Il s'ensuit que $u_{n+1} - u_n = u_n^2 f'(0) + o(u_n^2)$. Mais $f'(0) \neq 0$ donc :

$$u_{n+1} - u_n \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n^2 f'(0).$$

En outre $\sum_{n=0}^N u_{n+1} - u_n = u_{N+1} - u_0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 - u_0$ par télescopage et grâce au fait que $(u_n)_n$ est de limite nulle, donc $\sum_n u_{n+1} - u_n$ est une série convergente. Par comparaison de séries à termes négatifs, on en déduit que $\sum_n u_n^2 f'(0)$ converge. Or $f'(0) \neq 0$ d'où $\sum_n u_n^2$ converge.

Exercice 1.51 : Navale 2021 et 2014

Posons $f_m(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{m+1}\right) - \frac{x}{m}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, de sorte que x est solution de (E_m) si et seulement si $f_m(x) = 0$.

Remarquons que $1 + \frac{x}{m+1} > 0$ équivaut à $\frac{x}{m+1} > -1$, soit $x > -m-1$. En d'autres termes f_m est définie sur $] -m-1, +\infty[$, intervalle qui contient bien $] -2, -1[$. Étudions les variations de f_m sur $] -2, -1[$. La fonction f_m est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$f'_m(x) = \frac{\frac{1}{m+1}}{1 + \frac{x}{m+1}} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m+1+x} - \frac{1}{m} = -\frac{x+1}{m+1+x}.$$

Or :

$$\begin{aligned} -2 < x < -1 &\Rightarrow m-1 < x+m+1 < m \Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{m+1+x} < \frac{1}{m-1}, \\ -2 < x < -1 &\Rightarrow 1 < -x < 2 \Rightarrow 0 < -x-1 < 1, \end{aligned}$$

donc par produit d'inégalités positives :

$$0 < \frac{-x-1}{m+1+x} = f'_m(x) < \frac{1}{m-1},$$

ce qui permet d'affirmer que f_m est strictement croissante sur $] -2, -1[$. L'étude du signe de $f_m(-2)$ et $f_m(-1)$ n'est pas compliquée mais fastidieuse.

• Notons $f_m(-2) = \ln\left(1 - \frac{2}{m+1}\right) + \frac{2}{m} = g(m)$. Étudions les variations de g , vue comme fonction d'une variable continue (et pas discrète). Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$g'(m) = \frac{\frac{2}{(m+1)^2}}{1 - \frac{2}{m+1}} - \frac{2}{m^2} = \frac{2}{(m+1)^2 - 2(m+1)} - \frac{2}{m^2} = \frac{2}{m^2 - 1} - \frac{2}{m^2} > 0,$$

donc g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Or $\lim_{+\infty} g = 0$ donc g est strictement négative. Par conséquent $g(m) < 0$ pour tout m , en d'autres termes $f_m(-2) < 0$.

• Notons $f_m(-1) = \ln\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) + \frac{1}{m} = h(m)$. Étudions les variations de h , vue comme fonction d'une variable continue (et pas discrète). Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$h'(m) = \frac{\frac{1}{(m+1)^2}}{1 - \frac{1}{m+1}} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{(m+1)^2 - (m+1)} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m(m+1)} - \frac{1}{m^2} < 0,$$

donc h est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. Or $\lim_{+\infty} h = 0$ donc h est strictement positive. Par conséquent $h(m) > 0$ pour tout m , en d'autres termes $f_m(-1) > 0$.

Ceci achève l'étude du signe de $f_m(-2)$ et $f_m(-1)$. Le théorème de la bijection appliqué à la fonction f_m continue sur $] -2, -1[$ avec $f_m(-2) < 0 < f_m(-1)$ permet d'affirmer que f_m s'annule une unique fois sur $] -2, -1[$. En clair (E_m) admet une unique solution x_m sur $] -2, -1[$.

Déterminons la monotonie de $(x_m)_m$. Fixons $x \in] -2, -1[$ et examinons la fonction $t_x : m \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{m+1}\right) - \frac{x}{m}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$. On a $f_m(x) = 0$ si et

seulement si $t_m(x) = 0$. Il vient :

$$\begin{aligned} t'_x(m) &= \frac{-\frac{x}{(m+1)^2}}{1 + \frac{x}{m+1}} + \frac{x}{m^2} = -\frac{x}{(m+1)(m+1+x)} + \frac{x}{m^2} \\ &= \underbrace{x}_{<0} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)(m+1+x)} \right). \end{aligned}$$

Or :

$$(m+1)(m+1+x) - m^2 = m + mx + m + 1 + x = m(2+x) + (1+x)$$

quantité strictement positive dès que m est assez grand car $2+x > 0$. En conséquence de quoi t_x est strictement décroissante à partir d'un certain m_0 . Ceci implique en particulier : $t_x(m+1) < t_x(m)$ pour tous m et x . En évaluant en $x = x_m$: $t_{x_m}(m+1) < 0$, c'est-à-dire $f_{m+1}(x_m) < 0$. La fonction f_{m+1} est strictement croissante sur $] -2, -1[$ et s'annule en x_m , ce qui implique que $x_{m+1} < x_m$. Par conséquent $(x_m)_m$ est strictement décroissante. Étant de plus minorée (par -2) : $(x_m)_m$ est convergente.

Remarquons que $f_m(x_m) = 0$ donne $\ln\left(1 + \frac{x_m}{m+1}\right) = \frac{x_m}{m}$, donc en prenant l'exponentielle : $1 + \frac{x_m}{m+1} = e^{\frac{x_m}{m}}$. De plus $\frac{x_m}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$, donc par développement limité de l'exponentielle :

$$1 + \frac{x_m}{m+1} = e^{\frac{x_m}{m}} = 1 + \frac{x_m}{m} + \frac{x_m^2}{2m^2} + o\left(\frac{x_m^2}{2m^2}\right)$$

d'où :

$$x_m \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{x_m^2}{2m^2} + o\left(\frac{x_m^2}{2m^2}\right)$$

puis :

$$-\frac{x_m}{m(m+1)} \sim \frac{x_m^2}{2m^2}$$

ou encore $-x_m \sim \frac{x_m^2}{2}$, ce qui donne $x_m^2 \sim -2x_m$. Or $x_m \neq 0$, donc par simplification $x_m \sim -2$. Ceci signifie que $(x_m)_m$ est convergente de limite -2 .

Exercice 1.52 : ENSEA 2022

1. Posons $f_n(x) = x^n - x - 1$, pour $x \geq 0$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$ pour tout x . Ainsi f'_n est strictement croissante, de $f'_n(0) = -1$ jusqu'à $+\infty$. Par continuité, et d'après le TVI : f'_n admet une unique valeur d'annulation α_n , et elle est strictement négative sur $[0, \alpha_n[$ et strictement positive sur $]\alpha_n, +\infty[$. Il s'ensuit que f_n est strictement décroissante sur $[0, \alpha_n]$, puis strictement croissante sur $[\alpha_n, +\infty[$. Puisque $f_n(0) = -1 < 0$, on en déduit que $f_n < 0$ sur $[0, \alpha_n]$, puis change de signe sur $[\alpha_n, +\infty[$ une unique fois (théorème de la bijection) en une valeur notée $x_n : f_n(x_n) = 0$.

On remarque enfin que $f_n(1) = -1$ et $f_n(2) = 2^n - 2 - 1 > 0$ dès que $n \geq 2$, ce qui implique que $x_n \in [1, 2]$ et même plus précisément : $x_n \in]1, 2[$.

2. Remarquons que $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) > 0$ pour tout $x > 1$, donc en évaluant en x_n nous obtenons $f_{n+1}(x_n) - 0 > 0$; on en déduit $x_{n+1} - x_n < 0$. Par conséquent $(x_n)_n$ est strictement décroissante. Étant monotone et bornée, la suite $(x_n)_n$ est convergente. Notons $\ell \in [1, 2]$ sa limite. L'égalité $x_n^n = x_n + 1$ donne $n \ln(x_n) = \ln(x_n + 1)$ puis :

$$\ln(x_n) = \frac{1}{n} \ln(x_n + 1) \sim \frac{1}{n} \ln(\ell + 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par continuité de l'exponentielle : $\ell = 1$.

3. Partant de $x_n^n = x_n + 1$ avec $x_n = 1 + o(1)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \ln(x_n) &= \frac{1}{n} \ln(2 + o(1)) = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ x_n &= \exp\left(\frac{\ln 2}{n}\right) \times \exp\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \left(1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \times \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Exercice 1.53 : CMT 2014

1. Posons $f_n(x) = x - e^{-x}$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'_n : x \mapsto 1 + e^{-x}$ strictement positive, donc effectuant une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (ses limites en $\pm\infty$ étant $\pm\infty$). D'après le théorème de la bijection : il existe une unique solution x_n à l'équation $x - e^{-x} = n$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
2. Remarquons que pour tout n , $f_n(n) = n - e^{-n} < n$ d'où $x_n > n$. Ainsi la suite $(x_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

• On a $x_n = n + e^{-x_n}$ avec $e^{-x_n} \rightarrow 0$ donc $x_n = n + o(1)$.

• Injectons ceci dans l'équation définissant x_n :

$$x_n = n + e^{-x_n} = n + e^{-n-o(1)} = n + e^{-n}e^{-o(1)} = n + e^{-n}(1 + o(1))$$

donc $x_n = n + e^{-n} + o(e^{-n})$.

• Injectons encore :

$$\begin{aligned} x_n &= n + \exp(-(n + e^{-n} + o(e^{-n}))) = n + e^{-n} \exp(-e^{-n} + o(e^{-n})) \\ &= n + e^{-n} (1 - e^{-n} + o(e^{-n})) = n + e^{-n} - e^{-2n} + o(e^{-2n}). \end{aligned}$$

• Injectons toujours :

$$\begin{aligned} x_n &= n + \exp(-(n + e^{-n} - e^{-2n} + o(e^{-2n}))) \\ &= n + e^{-n} \exp(-e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})) \\ &= n + e^{-n} \left(1 - e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n}) + \frac{1}{2}(e^{-n})^2 + o((e^{-n})^2)\right) \\ &= n + e^{-n} - e^{-2n} + \frac{3}{2}e^{-3n} + o(e^{-3n}). \end{aligned}$$

Exercice 1.54 : CMT 2014

Sans détour $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$, donc $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge par théorème de comparaison. Notons $S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ la n -ième somme partielle. Il vient :