PC/PC*
PSI/PSI*

MATHS

Exercices corrigés et notions indispensables pour réussir les concours écrits et oraux

Maxime Puech

ellipses

Première partie

Exercices corrigés

Chapitre 1

Algèbre

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définitions à connaître

Dans cette section, on rappelle quelques définitions qui serviront à traiter les exercices suivants. On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.1. Définition. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle commutant de u l'ensemble*

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}.$$

On peut définir la même notion avec les matrices, et on conserve la même notation.

1.2. Définition. *Soit u un endomorphisme de E. On dit que u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E composée de vecteurs propres de u.*

On rappelle cette définition, puisque le programme traite généralement la diagonalisation dans des espaces vectoriels de dimension finie. On passe alors par les endomorphismes, puisqu'on se limiterait en considérant seulement des matrices.

1.3. Définition. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable si et seulement s'il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à tous les $(u_i)_{i\in I}$.*

Fixons désormais $n \in \mathbb{N}^*$, et reformulons les définitions précédentes en termes de matrices.

1.4. Définition. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$PA_iP^{-1} \text{ est diagonale pour tout } i \in I.$$

On peut faire de même avec la trigonalisation, puisque nous travaillons en dimension finie.

1.5. Définition. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est cotrigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$PA_iP^{-1} \text{ est triangulaire supérieure pour tout } i \in I.$$

Lorsque E est de dimension finie, cette définition s'applique aux endomorphismes en considérant une base dans laquelle les matrices associées aux endomorphismes sont triangulaires supérieures. Le lecteur pourra se convaincre que les définitions en termes d'endomorphismes et de matrices sont bien équivalentes. Dans la définition suivante, on prend $n \geq 2$.

1.6. Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. On appelle comatrice de A, et on note* $\mathrm{com}(A)$*, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que*

$$[\mathrm{com}(A)]_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}), \quad \text{pour tous } i, j \in [\![1, n]\!].$$

On sait alors que par développement d'un déterminant sur les colonnes ou sur les lignes, on a pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[\mathrm{com}(A)]_{i,k} \quad \text{et} \quad \det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}[\mathrm{com}(A)]_{k,j}.$$

Avant d'aborder ces exercices, on conseille au lecteur de se familiariser avec les trois derniers chapitres de la partie 2. En particulier, les deux premiers exercices demandent de connaître les notions abordées dans le chapitre 24 (p. 413).

2. Algèbre générale

Exercice 1
Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $x, y \in A$. Montrer que si $1_A - xy$ est inversible, alors $1_A - yx$ aussi.

Exercice 2
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de cardinal fini de $\mathrm{GL}(E)$. On pose

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.$$

1. Montrer que p est un projecteur de E.
2. En déduire que

$$\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(p) \quad \text{et} \quad \dim\left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{id})\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g).$$

3. Polynômes

Exercice 3
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ scindés. On écrit $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P' + aP$ est scindé ou constant sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} b_k P^{(k)}$ est scindé ou constant sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4
Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Exercice 5
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = A^2 + B^2.$$

Exercice 6
On dit qu'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est pair (resp. impair) si et seulement s'il est combinaison linéaire de monômes de degré pair (resp. impair). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2 + 1) = (P(X))^2 + 1$.

1. Montrer que P est pair ou impair.
2. Montrer que si P est impair, alors $P(X) = X$.

3. En déduire que si P est non constant, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$P(X) = \underbrace{(X^2+1) \circ \cdots \circ (X^2+1)}_{n \text{ fois}}.$$

Exercice 7
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

1. Montrer que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
2. Soit A une partie de $\mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que $P(A) \subset A$ dans les cas suivants :

   (a) $A = \mathbb{R}$. (b) $A = \mathbb{Q}$. (c) $A = \mathbb{Z}$.

3. On suppose P non constant, on note d son degré, et on suppose que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Calculer de deux manières différentes :
$$\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})}e^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$
4. En déduire l'ensemble des polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

4. Algèbre linéaire

Exercice 8
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(E,G)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f et g pour qu'il existe $h \in \mathscr{L}(F,G)$ telle que $g = h \circ f$.
2. Soient $g \in \mathscr{L}(E,G)$ et $h \in \mathscr{L}(F,G)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g et h pour qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $g = h \circ f$.

Exercice 9
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose
$$N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(u^k) \quad \text{et} \quad J = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(u^k).$$

1. Montrer que la suite $(\ker(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
2. Montrer que N et J sont des sous-espaces vectoriels de E, stables par u et supplémentaires.

Exercice 10
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on dit que u est cyclique si et seulement s'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si u est nilpotent d'indice n, alors u est cyclique.
2. Montrer que si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est cyclique.
3. On suppose que u est cyclique. Montrer que le commutant de u est $\mathbb{R}_{n-1}[u]$.

Exercice 11
Soit $n \geq 2$. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 12
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se donne ainsi une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

On écrit $P = R + iJ$, avec $R = \mathrm{Re}(P)$ et $J = \mathrm{Im}(P)$ des matrices à coefficients réels.

1. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $R + tJ \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et p, q, r des projecteurs de E. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur. Montrer que q et r sont nuls.

Exercice 14
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 15
Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice à coefficients diagonaux nuls.

5. Déterminant

Exercice 16
Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $A\,\mathrm{com}(A)^T = \mathrm{com}(A)^T A = \det(A) I_n$.
2. Donner le rang de $\mathrm{com}(A)$ en fonction de celui de A.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = \mathrm{com}(A)^T$.

Exercice 17
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AB = BA$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(DA - CB).$$

Exercice 18
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

6. Réduction

Exercice 19
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 20
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\chi_A = \chi_B \iff \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k).$$

Exercice 21
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On cherche à résoudre l'équation

$$P(M) = A, \quad \text{d'inconnue } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que si A est diagonalisable, l'équation admet toujours une solution.
2. Que dire si A n'est pas diagonalisable ?
3. Discuter l'équation dans le cas où $n = 2$ et $P(X) = X^2$.

Exercice 22
On pose $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 23
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient u et v deux endomorphismes de E.
   (a) On suppose que u et v commutent. Montrer que les espaces propres de u sont stables par v.
   (b) On suppose que u est diagonalisable, et que v stabilise les espaces propres de u. Montrer que u et v commutent.
2. En déduire que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille codiagonalisable d'endomorphismes de E, alors c'est une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.
3. On se propose de montrer deux réciproques partielles. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables et commutant deux à deux.
   (a) Montrer que si I est fini, $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable.
   (b) En déduire que si E est de dimension finie, $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable.

Exercice 24
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ par

$$u(M) = AM - MB, \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que si $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$, alors $\alpha - \beta \in \mathrm{Sp}(u)$.
2. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = MP(B + \lambda I_n)$.
   (b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$ tels que $\lambda = \alpha - \beta$.
3. En déduire $\mathrm{Sp}(u)$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

Exercice 25
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$.

2. On suppose que A est à diagonale strictement dominante, i.e.

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que A est une matrice stochastique si et seulement si ses coefficients sont tous positifs et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un ensemble convexe, compact et stable par produit.
2. Montrer que les valeurs propres d'une matrice stochastique ont un module inférieur ou égal à 1.
3. Soit $A \in \mathcal{S}$ ayant tous ses coefficients strictement positifs. On note B la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ formée en enlevant la dernière colonne et la dernière ligne de A.
   (a) Montrer que $B - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante.
   (b) En déduire que $\dim(\ker(A - I_n)) = 1$.
   (c) Montrer que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

Exercice 27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que A est une matrice circulante si et seulement s'il existe $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des matrices circulantes.

1. Montrer qu'il existe $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qu'on déterminera, telle que $\mathscr{C}_n = \mathbb{C}[J]$.
2. Exprimer les éléments propres de J.
3. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $\det(P(J))$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que $P(J)$ soit inversible.

Exercice 28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est à diagonale propre si et seulement si ses valeurs propres sont réelles, et que ses éléments diagonaux sont ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices à diagonale propre.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme de deux matrices de $\mathcal{E}_n$.
2. Caractériser $\mathcal{E}_2$.

3. Déterminer les matrices antisymétriques réelles à diagonale propre.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (a) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Montrer que
   $$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$
   (b) En déduire l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.

Indications

Exercice 1 :
Penser aux séries entières, et au développement de $(1-t)^{-1}$ pour $|t| < 1$.

Exercice 3
Q1 : *Considérer, pour $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x)e^{ax}$ et utiliser le théorème de Rolle.*

Exercice 5 :
Montrer que toute racine de P est de multiplicité paire.

Exercice 6 :
Q3 : *Montrer que si P est pair, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2+1)$, puis procéder par récurrence.*

Exercice 7 :
Q2 (c) : *Pour $n \in \mathbb{N}$, considérer le polynôme $H_n(X) = \frac{1}{n!}X(X-1)\cdots(X-n+1)$, et montrer qu'il vérifie $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.*
Q4 : *Montrer que ce sont les polynômes de la forme aX^m, où $a \in \mathbb{U}$ et $m \in \mathbb{N}$.*

Exercice 10 :
Q3 : *Pour $v \in \mathcal{C}(u)$, montrer que v coïncide avec un polynôme en u sur la base $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$.*

Exercice 11 :
Raisonner par l'absurde, et montrer qu'un tel hyperplan contiendrait alors toutes les matrices nilpotentes.

Exercice 15 :
Procéder par récurrence et distinguer le cas où la matrice est un multiple de l'identité. Dans les autres cas, utiliser le résultat de l'exercice précédent, donnant que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas une homothétie, il existe un vecteur X tel que (X, AX) est libre.

Exercice 16 :
Se reporter à la définition de la comatrice donnée en début de chapitre.

Exercice 17 :
Montrer d'abord le résultat dans la cas où A est inversible.

Exercice 22 :
Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, et passer par la trace et le déterminant.

Exercice 24 :
Q2 (b) : *Appliquer la question précédente à* χ_A.

Exercice 25 :
Q1 : *Pour* $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$*, prendre* X *un vecteur propre associé, et considérer* $i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $|x_i| = \|X\|_\infty$.

Exercice 26 :
Q1 : *Pour une partie d'un espace de dimension finie, être compacte est équivalent à être fermée et bornée. Se reporter au chapitre 23 (p. 391) pour plus de détails.*
Q3 (a) : *Voir l'exercice précédent pour la définition.*

Exercice 27 :
Q2 : *Pour* $k \in [\![0, n-1]\!]$*, considérer* $X_k = (1\ \omega^k\ \cdots\ (\omega^k)^{n-1})^T$*, où* $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Exercice 28 :
Q3 : *Considérer* AA^T.
Q4 (a) : *Calculer* $\mathrm{tr}(A^2)$.

☑ Corrigés des exercices

Exercice 1

On suppose que $1_A - xy$ est inversible, et on note z son inverse. Alors

$$(1_A - yx)(1_A + yzx) = 1_A + yzx - yx - yxyzx.$$

Or,

$$yxyzx = -y(1_A - xy)zx + yzx = -yx + yzx.$$

On en déduit que

$$(1_A - yx)(1_A + yzx) = 1_A.$$

De même, $(1_A + yzx)(1_A - yx) = 1_A$. Donc $1_A - yx$ est inversible. □

Remarques

Comment intuiter une telle formule ? On sait que pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$(1-t)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

On peut donc proposer le raisonnement suivant

$$(1_A - yx)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (yx)^n = 1_A + y\sum_{n=0}^{+\infty} (xy)^n \cdot x = 1_A + y(1_A - xy)^{-1}x.$$

Il reste ensuite à vérifier si cette formule convient. Évidemment, ce qu'on vient d'écrire n'est pas correct. Il faudrait définir les séries dans un anneau, puis la convergence de celles-ci, et le cas précédent ne s'appliquera peut-être même pas. Cependant, cette idée

est à conserver pour d'autres exercices. En effet, dans le cas d'un exercice du chapitre 24 (p. 413), si $a \in A$ est nilpotent, on avait bien

$$(1_A - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n,$$

puisque la somme est alors finie.

Exercice 2

• **1.** Soit $g \in G$. L'application $h \in G \mapsto g \circ h$ est une bijection de G dans G, d'inverse donné par $h \in G \mapsto g^{-1} \circ h$. Ainsi, $G = g \circ G$. Alors,

$$g \circ p = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} g \circ h = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in g \circ G} h = p.$$

On en déduit que

$$p \circ p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p = p.$$

Donc p est un projecteur de E.

• **2.** $\subset$ Soit $x \in \bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{id})$. Alors

$$p(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x = x.$$

Donc $x \in \mathrm{Im}(p)$.
$\supset$ Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$. Pour tout $g \in G$,

$$g(x) = g(p(x)) = (g \circ p)(x) = p(x) = x,$$

avec la question précédente. Donc $x \in \ker(g - \mathrm{id})$. On en déduit que

$$\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(p).$$

Comme E est de dimension finie, on passe à la dimension,

$$\dim\left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{id})\right) = \mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g). \qquad \square$$

Remarques

Dans la deuxième question, on a utilisé implicitement que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$. En effet, en dimension finie le rang d'un projecteur est égal à sa trace. Pour le montrer, on considère la décomposition $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, sachant que $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id})$. Ainsi, la matrice

représentative de p dans une base de E est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_{\mathrm{rg}(p)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La trace et le rang étant un invariant de similitude, on en déduit que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$. Une application de ce résultat, qu'on peut retrouver formulée telle quelle dans un exercice d'oral, est : étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^p = I_n$, montrer que

$$\dim(\ker(A - I_n)) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{tr}(A^k).$$

En supposant que p est l'entier non nul minimal tel que $A^p = I_n$, alors $H = \{A^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de cardinal p. Et on a évidemment que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\ker(A - I_n) \subset \ker(A^k - I_n),$$

ce qui suffit à conclure. Dans le cas où p n'est pas minimal, on peut l'écrire $p = qr$, avec $q \geq 2$ et où r est l'entier non nul minimal tel que $A^r = I_n$. En réarrangeant la somme, on trouve alors le résultat.

Exercice 3

• **1.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = P(x)e^{ax}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On note $a_1 < \cdots < a_r$ les racines de P, de multiplicités $m_1, \ldots, m_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$. On sait alors que $P' + aP$ a au moins

$$(m_1 - 1) + \cdots + (m_r - 1) = \deg(P) - r$$

racines réelles comptées avec multiplicité, que sont $a_1, \ldots, a_r$. Soit $k \in [\![0, r-1]\!]$. On a

$$f(a_k) = 0 = f(a_{k+1}).$$

Or f est dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$ et continue sur $[a_k, a_{k+1}]$. D'après le théorème de Rolle, on dispose de $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $f'(b_k) = 0$. Or

$$f'(b_k) = (P'(b_k) + aP(b_k))e^{ab_k}.$$

Donc $(P' + aP)(b_k) = 0$. Ce qui apporte $r - 1$ racines réelles supplémentaires, et monte le total à $\deg(P) - 1$. Si $a = 0$, cela montre déjà que $P' + aP$ est scindé ou constant. Sinon, supposons que $a > 0$. Alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

par croissances comparées. f n'étant pas constante sur $]-\infty, b_1]$, on dispose de $x_1 \in]-\infty, b_1]$ tel que $f(x_1) \neq 0$. Et on suppose que $f(x_1) > 0$, par symétrie. Comme f tend vers 0 en $-\infty$, on dispose de $A \leq b_1$ tel que

$$\forall x \leq A, \quad f(x) < \frac{f(x_1)}{2}.$$

Par théorème des valeurs intermédiaires sur $[A, x_1]$ et $[x_1, b_1]$, on dispose de $x_2 \in]A, x_1[$ et $x_3 \in]x_1, b_1[$ tels que

$$f(x_2) = \frac{f(x_1)}{2} = f(x_3).$$

On peut donc appliquer le théorème de Rolle à f sur $]x_2, x_3[$, et obtenir une nouvelle racine de $P' + aP$. Ainsi $P' + aP$ est scindé sur $\mathbb{R}$. On fait de même en $+\infty$ si $a < 0$. D'où le résultat.

• **2.** Q étant scindé sur $\mathbb{R}$, on l'écrit

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - r_i), \quad \text{où } r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}.$$

On note D l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} b_k P^{(k)} = Q(D)(P) = \Big(\prod_{i=1}^{n}(D - r_i\mathrm{id})\Big)(P) = \prod_{i=1}^{n}(P' - r_i P).$$

Ce qui montre le caractère scindé ou constant comme produit de polynômes scindés ou constants d'après la question précédente. □

Remarques

La première question est particulièrement difficile, car il faut penser à introduire la bonne fonction afin d'appliquer le théorème de Rolle. Cependant, $P' + aP$ peut faire penser à une équation différentielle, dont la solution est $x \mapsto e^{-ax}$. On peut ainsi faire apparaître une « dérivée exacte » en multipliant par $x \mapsto e^{ax}$. La seconde question s'en déduit alors aisément.

Exercice 4

Analyse : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un tel polynôme. Si P est constant, on remarque que $P = 0$ ou $P = 1$. Sinon, soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors $P(r^2) = P(r)P(r-1) = 0$. Donc r^2 est racine de P. On montre alors par récurrence que r^{2^n} est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme P a un nombre fini de racines, on a nécessairement

$$r^{2^m} = r^{2^n}, \quad \text{pour certains } m \neq n,$$

ce qui montre que $r = 0$ ou r est une racine de l'unité. Si 0 est racine de P, on a

$$P(1) = P(1)P(0) = 0, \quad \text{puis} \quad P(4) = P(2)P(1) = 0.$$

Donc 4 est racine de P, mais n'est ni nul ni une racine de l'unité. Donc 0 n'est pas racine de P. Ainsi, on écrit $r = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [-\pi, \pi[$. Or,

$$P((r+1)^2) = P(r+1)P(r+1-1) = P(r+1)P(r) = 0,$$

donc $(r+1)^2$ est une racine de P, et aussi une racine de l'unité en faisant le même raisonnement. En particulier, $|r+1| = 1$. D'où,

$$1 = |r+1|^2 = (1 + e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta}) = 2 + 2\cos(\theta).$$

Ainsi, $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Ce qui donne $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le raisonnement précédent montre que les racines de P ne peuvent être que j ou j^2. On écrit alors

$$P(X) = \lambda(X-j)^a(X-j^2)^b,$$

avec $\lambda \neq 0$ et $a, b \in \mathbb{N}$. On a d'une part,

$$\begin{aligned} P(X^2) &= \lambda(X^2-j)^a(X^2-j^2)^b \\ &= \lambda(X^2-j^4)^a(X^2-j^2)^b \\ &= \lambda(X-j^2)^a(X+j^2)^a(X-j)^b(X+j)^b, \end{aligned}$$

car $j^4 = j$, et d'autre part,

$$\begin{aligned} P(X)P(X-1) &= \lambda^2(X-j)^a(X-j^2)^b(X-1-j)^a(X-1-j^2)^b \\ &= \lambda^2(X-j)^a(X-j^2)^b(X+j^2)^a(X+j)^b, \end{aligned}$$

en exploitant que $1 + j + j^2 = 0$. Par identification des deux polynômes, on en déduit que $\lambda = 1$ et $a = b$. Ainsi,

$$P(X) = (X-j)^a(X-j^2)^a.$$

SYNTHÈSE : La réciproque se fait en reprenant le calcul ci-dessus. De plus,

$$(X-j)(X-j^2) = X^2 - (j+j^2)X + j^3 = X^2 + X + 1,$$

ce qui permet de simplifier l'ensemble des solutions en

$$S = \{0\} \cup \{(X^2+X+1)^a \mid a \in \mathbb{N}\}.$$ □

Remarques

En général, les équations sur les polynômes s'abordent de la même manière : on détermine les polynômes constants solutions, on examine la cohérence du degré sur l'équation, puis on restreint l'ensemble des racines. Par exemple, considérons un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(X^3) = P(X+1)P(X-1).$$

Alors, si P est constant, P est égal à 0 ou 1. S'il n'est pas constant, on a

$$3\deg(P) = \deg(P(X^3)) = \deg(P(X+1)P(X-1)) = 2\deg(P),$$

donc $\deg(P) = 0$. Ce qui conclut. Mais on peut rendre l'hypothèse plus complexe avec

$$P(X^3) = XP(X+1)P(X-1),$$

qui montrera que P est nécessairement nul ou de degré 1, puis on résout un système. Pour déterminer les racines dans cet exercice, on aurait aussi pu aborder une approche géométrique. En effet, si $r \in \mathbb{C}$ vérifie

$$|r+1| = 1 = |r|,$$

cela signifie que r est situé sur le cercle de centre -1 et de rayon 1, et aussi sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. On identifie deux solutions qui sont bien j et j^2.

Exercice 5

Supposons que P admette une racine réelle r. Alors, on écrit

$$P(X) = (X-r)^m Q(X),$$

où m est la multiplicité de r dans P et Q est un polynôme réel tel que $Q(r) \neq 0$. Par continuité de Q sur $\mathbb{R}$, on dispose de $\varepsilon > 0$ tel que Q est de signe constant sur $[r-\varepsilon, r+\varepsilon]$. Alors,

$$P(r+\varepsilon) = \varepsilon^m Q(r+\varepsilon) \geq 0, \quad \text{et} \quad P(r-\varepsilon) = (-1)^m \varepsilon^m Q(r-\varepsilon) \geq 0.$$

Or $Q(r+\varepsilon)$ et $Q(r-\varepsilon)$ sont de même signe, donc $(-1)^m = 1$, et m est pair. On note donc

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-r_i)^2 \cdot \prod_{i=1}^{k} (X-z_i)(X-\overline{z_i}),$$

où $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, $z_1, \ldots, z_k \notin \mathbb{R}$, et $n, k \in \mathbb{N}$. On définit

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-r_i)^2 \quad \text{et} \quad R(X) = \prod_{i=1}^{k} (X-z_i).$$

$R \in \mathbb{C}[X]$, et on peut l'écrire $R = A + iB$, où $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi,

$$P = Q^2 R\overline{R} = Q^2(A+iB)(A-iB) = Q^2(A^2+B^2) = (QA)^2 + (QB)^2,$$

avec $QA, QB \in \mathbb{R}[X]$. D'où le résultat. □

Remarques

L'astuce de faire apparaître le conjugué du polynôme peut être utilisé pour montrer que toute matrice complexe A est annulée par un polynôme à coefficients réels. Il suffit en effet de considérer $\chi_A \cdot \overline{\chi_A}$.

Exercice 6

• **1.** L'équation donne que

$$(P(-X))^2 + 1 = P(X^2+1) = (P(X))^2 + 1, \quad \text{donc} \quad (P(X)+P(-X))(P(X)-P(-X)) = 0.$$

Le produit de polynômes étant intègre, on a $P(X) = P(-X)$ ou $P(X) = -P(-X)$. Dans le premier cas, on montre par identification des coefficients que P est pair, et dans le second cas que P est impair.

• **2.** On suppose que P est impair. On définit la suite (x_n) par $x_0 = 0$, puis

$$x_{n+1} = x_n^2 + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme P est impair, $P(0) = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(x_{n+1}) = P(x_n^2 + 1) = (P(x_n))^2 + 1.$$

On en déduit par récurrence immédiate que $P(x_n) = x_n$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

En sommant on obtient que

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \geq \frac{3n}{4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

En particulier, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini et tous ses éléments sont racines du polynôme $P(X) - X$, qui est alors le polynôme nul. D'où $P(X) = X$.

• **3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n : pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $\deg(Q) \leq 2^n$ et $Q(X^2 + 1) = (Q(X))^2 + 1$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$Q(X) = \underbrace{(X^2 + 1) \circ \cdots \circ (X^2 + 1)}_{k \text{ fois}}.$$

INITIALISATION : Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant vérifiant l'équation, et avec $\deg(Q) \leq 1$. Alors Q est de degré 1. Or Q est pair ou impair, et si par l'absurde Q était pair, alors il serait constant ou au moins de degré 2. Ainsi Q est impair, et donc $Q(X) = X$. H_0 est vraie.

HÉRÉDITÉ : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant vérifiant l'équation, et avec $\deg(Q) \leq 2^{n+1}$. Si $\deg(Q) \leq 2^n$, on peut appliquer H_n. Sinon, Q est nécessairement pair, car X est de degré inférieur à 2^n. On peut donc écrire, avec le binôme de Newton,

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^{2i} = \sum_{i=0}^{m} a_i (X^2 + 1 - 1)^i = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} (X^2 + 1)^j = R(X^2 + 1),$$

où $m \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{C}[X]$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(R(x^2 + 1))^2 + 1 = (Q(x))^2 + 1 = Q(x^2 + 1) = R((x^2 + 1)^2 + 1).$$

Pour tout $y \geq 1$, on peut écrire $y = z^2 + 1$, où $z \in \mathbb{R}$. D'où

$$(R(y))^2 + 1 = (R(z^2 + 1))^2 + 1 = R((z^2 + 1)^2 + 1) = R(y^2 + 1).$$

Ainsi, les polynômes $(R(X))^2 + 1$ et $R(X^2 + 1)$ coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{R}$, donc sont égaux. Or,

$$2^{n+1} \geq \deg(Q) = \deg(R(X^2 + 1)) = 2 \deg(R).$$

On en déduit que $\deg(R) \leq 2^n$. Par hypothèse de récurrence, on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$R(X) = \underbrace{(X^2 + 1) \circ \cdots \circ (X^2 + 1)}_{k \text{ fois}}.$$

Ainsi,

$$Q(X) = R(X^2 + 1) = \underbrace{(X^2 + 1) \circ \cdots \circ (X^2 + 1)}_{k+1 \text{ fois}}.$$

D'où H_{n+1}. Ce qui achève la récurrence et montre le résultat. □

Remarques

Dans cet exercice, on détermine le commutant de X^2+1, puisque

$$\mathcal{C}(X^2+1) = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(X^2+1) = (P(X))^2+1\}.$$

On montre alors qu'à part les polynômes constants, ce sont les itérés de X^2+1. Pour les polynôme constants, il suffit de résoudre

$$z = z^2+1, \quad \text{d'inconnue } z \in \mathbb{C},$$

qui admet deux solutions. Cet exercice n'est pas évident, car les questions 1 et 2 sont astucieuses, et la question 3 demande un peu d'intuition. S'il fallait retenir quelque chose de cet exercice, c'est de bien exploiter le fait que deux polynômes coïncidant sur une partie infinie sont égaux.

Exercice 7

• **1.** Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme $P(X)-z$ admet une racine dans $\mathbb{C}$. On note $x \in \mathbb{C}$ l'une d'entre elles. Alors $z = P(x) \in P(\mathbb{C})$. D'où $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, l'autre inclusion étant évidente.

• **2.** **(a)** $(\Rightarrow)$ On suppose que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où $n \in \mathbb{N}$ et où $a_0, \dots, a_n$ sont des complexes. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = P(x) = \overline{P(x)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} x^k,$$

car x est réel et $P(x)$ aussi. On en déduit que $a_k = \overline{a_k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, i.e. $P \in \mathbb{R}[X]$.
$(\Leftarrow)$ Réciproquement si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
(b) $(\Rightarrow)$ On suppose que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Si P est constant, alors $P \in \mathbb{Q}[X]$. Sinon, on note $n \in \mathbb{N}^*$ son degré. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange (p. 436), on a

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{P(i)}_{\in \mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X-i}{j-i}}_{\in \mathbb{Q}[X]} \in \mathbb{Q}[X].$$

Ainsi, $P \in \mathbb{Q}[X]$.
$(\Leftarrow)$ Réciproquement si $P \in \mathbb{Q}[X]$, alors $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.
(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$H_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1)\cdots(X-n+1),$$

et $H_0(X) = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Si $n = 0$, c'est évident. Sinon, soit $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$H_n(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-(n-1))}{n!}.$$

∗ Si $k \geq n$, alors

$$H_n(k) = \frac{k!}{(k-n)!\,n!} = \binom{k}{n} \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

∗ Si $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$H_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}.$$

∗ Si $k < 0$, alors

$$\begin{aligned} H_n(k) &= (-1)^n \frac{(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-k-n)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(n-k-1)!}{(n-k-1-n)!\,n!} \\ &= (-1)^n \binom{n-k-1}{n} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$. Donc $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. De plus, la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à degré échelonné, donc forme une base de $\mathbb{C}[X]$.

($\Rightarrow$) On suppose que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Supposons P non constant. On note $n \in \mathbb{N}^*$ son degré. $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant une base de $\mathbb{C}[X]$, on dispose de $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X).$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\mathcal{P}_n$: « $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ ».

INITIALISATION : $a_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

HÉRÉDITÉ : Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose $\mathcal{P}_k$. Alors,

$$P(k+1) = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i(k+1) = a_{k+1} H_{k+1}(k+1) + \sum_{i=0}^{k} a_i H_i(k+1).$$

Or, $H_{k+1}(k+1) = \binom{k+1}{k+1} = 1$, avec (1). Donc

$$a_{k+1} = P(k+1) - \sum_{i=0}^{k} a_i H_i(k+1) \in \mathbb{Z},$$

comme somme et produits d'entiers, avec $\mathcal{P}_k$ et l'hypothèse sur P. D'où $\mathcal{P}_{k+1}$. Ce qui achève la récurrence. On en déduit que

$$P \in \{a_0 H_0 + \cdots + a_k H_k \mid k \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si P est constant, il est constant à un entier, donc appartient à l'ensemble ci-dessus.

($\Leftarrow$) Réciproquement si P appartient à l'ensemble ci-dessus, alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

• **3.** Notons I la quantité à calculer. On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_0, \ldots, a_d$ des complexes. D'une part,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{d} a_k e^{ik\theta} \cdot \sum_{l=0}^{d} \overline{a_l} e^{-il\theta} \cdot e^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{0\leq k,l\leq d} a_k \overline{a_l} \int_0^{2\pi} \exp(i(k-l-d)\theta)\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

Et, on a pour tous $k, l \in [\![0, d]\!]$, $k - l = d$ si et seulement si $k = d$ et $l = 0$. On en déduit que

$$I = a_d\overline{a_0}\int_0^{2\pi} e^{i(d-d)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi a_d\overline{a_0}.$$

D'autre part, $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, donc

$$I = \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 e^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} e^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

On en déduit que $a_d\overline{a_0} = 0$, et comme P est de degré d, $a_d \neq 0$. D'où $a_0 = 0$, i.e. $P(0) = 0$.

• **4.** Analyse : Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Déjà, $Q \neq 0$, car $0 \notin \mathbb{U}$. On note m la multiplicité de 0 comme racine de Q (qui peut être nulle). On dispose ainsi de $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$Q(X) = X^m R(X), \quad \text{où } R(0) \neq 0.$$

Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors,

$$|R(z)| = |z^m R(z)| = |Q(z)| = 1.$$

Ainsi, $R(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Si R n'était pas constant, la question précédente montrerait que $R(0) = 0$, ce qui est absurde. Ainsi R est constant, et on a

$$Q(X) = aX^m, \quad \text{où } a \in \mathbb{C}.$$

Ensuite, $a = Q(1) \in \mathbb{U}$.

Synthèse : Réciproquement, soient $a \in \mathbb{U}$ et $m \in \mathbb{N}$. On pose $Q(X) = aX^m$. On a pour tout $z \in \mathbb{U}$,

$$|Q(z)| = |a| \cdot |z|^m = 1.$$

Donc $Q(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. On peut conclure que

$$S = \{aX^m \mid a \in \mathbb{U},\, m \in \mathbb{N}\}. \qquad \square$$

Remarques

On aurait pu utiliser la même approche fondée sur les polynômes de Lagrange pour les questions 2 (a) et 2 (b), et même la généraliser. En effet, si on prend $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, et $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$, alors on peut écrire

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{P(x_i)}_{\in \mathbb{L}} \cdot \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}}_{\in \mathbb{L}[X]} \in \mathbb{L}[X],$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{L}$. La question suivante est bien plus difficile, car on voudrait montrer que seuls les polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ conviennent. Cependant,

le polynôme

$$Q(X) = \frac{X(X+1)}{2}$$

est un exemple simple vérifiant $Q(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. L'indication aurait pu être intégrée directement dans l'exercice, mais sans elle, il y a une possibilité de prise d'autonomie. Si vous n'avez pas réussi, ce n'est pas grave : souvenez-vous de l'approche à adopter, et réessayez une autre fois.

Enfin, pour la dernière question, on aurait aussi pu raisonner par récurrence sur le degré du polynôme en exploitant l'annulation en 0 trouvée en question 3.

Exercice 8

• **1.** $(\Rightarrow)$ On suppose qu'il existe $h \in \mathscr{L}(F,G)$ telle que $g = h \circ f$. Soit $x \in \ker(f)$, alors

$$g(x) = h(f(x)) = h(0_F) = 0_G,$$

donc $x \in \ker(g)$. D'où $\ker(f) \subset \ker(g)$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\ker(f) \subset \ker(g)$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker(f)$, qu'on complète en $(e_1, \dots, e_q)$ une base de $\ker(g)$, puis en $(e_1, \dots, e_m)$ une base de E. Alors $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_m))$ est une famille libre de F, qu'on complète en $(v_1, \dots, v_k, f(e_{p+1}), \dots, f(e_m))$ une base de F. On définit $h \in \mathscr{L}(F,G)$ sur cette base de F par

$$h(v_j) = 0_G, \quad \text{pour tout } j \in [\![1,k]\!],$$

puis

$$h(f(e_j)) = g(e_j), \quad \text{pour tout } j \in [\![p+1,m]\!].$$

Montrons que g et $h \circ f$ coïncide sur $(e_1, \dots, e_m)$. Soit $j \in [\![1,m]\!]$.

∗ Si $i \in [\![1,p]\!]$, $e_i \in \ker(f) \subset \ker(g)$, et

$$h(f(e_i)) = h(0_F) = 0_G = g(e_i).$$

∗ Si $i \in [\![p+1,m]\!]$, alors $h(f(e_i)) = g(e_i)$ par définition.

Ainsi $g = h \circ f$, car ces applications linéaires coïncident sur une base de E.

• **2.** $(\Rightarrow)$ On suppose qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $g = h \circ f$. Alors $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(h)$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(h)$. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de E. Pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, $g(e_j) \in \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(h)$, donc on dispose de $y_j \in F$ tel que $h(y_j) = g(e_j)$. Alors, on définit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ sur la base de E ci-dessus par

$$f(e_j) = y_j, \quad \text{pour tout } j \in [\![1,m]\!].$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,m]\!]$,

$$h(f(e_j)) = h(y_j) = g(e_j).$$

Ainsi $g = h \circ f$, car ces applications linéaires coïncident sur une base de E. □

Remarques

Ce type d'exercice demandant la construction d'une application linéaire ou d'une base nécessite de la méthode et une bonne compréhension du résultat à démontrer. En plus, le résultat de la première question pourrait être utilisé dans d'autres oraux. Par ailleurs, on aurait aussi pu généraliser ce résultat en ne supposant plus les espaces de dimension finie. Il suffit pour cela d'indexer les bases par des familles d'indices I, J et K ; puisque le théorème de la base incomplète reste vrai en dimension quelconque.

Exercice 9

• **1.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$. Ainsi, la suite $(\dim(\ker(u^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers positifs, majorée par $\dim(E)$, donc converge. Or toute suite d'entiers convergeant est stationnaire. Ainsi, on dispose de $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq p, \quad \dim(\ker(u^k)) = \dim(\ker(u^p)).$$

Or, pour $k \geq p$, $\ker(u^k) \subset \ker(u^p)$ et on a égalité des dimensions, donc $\ker(u^k) = \ker(u^p)$. Ainsi la suite $(\ker(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

• **2.** D'après la question précédente, on dispose de $p \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq p$, $\ker(u^k) = \ker(u^p)$. Or, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\ker(u^k) \subset \ker(u^p)$. Donc,

$$N = \ker(u^p).$$

Pour tout $k \geq p$, d'après le théorème du rang appliqué à u^k,

$$\dim(E) = \dim(\ker(u^k)) + \mathrm{rg}(u^k) = \dim(\ker(u^p)) + \mathrm{rg}(u^k).$$

Le théorème du rang appliqué à u^p montre alors que $\mathrm{rg}(u^k) = \mathrm{rg}(u^p)$. Or, $\mathrm{Im}(u^k) \subset \mathrm{Im}(u^p)$, donc $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^p)$. De plus, pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, $\mathrm{Im}(u^p) \subset \mathrm{Im}(u^j)$. Ainsi

$$J = \ker(u^p).$$

On en déduit que N et J sont des sous-espaces vectoriels de E. Soit $x \in N$.

$$u^p(u(x)) = u(u^p(x)) = u(0_E) = 0_E,$$

donc $u(x) \in \ker(u^p) = N$. Ainsi N est stable par u. Soit $y \in J$. On dispose de $x \in E$ tel que $u^p(x) = y$. Alors,

$$u(y) = u(u^p(x)) = u^p(u(x)) \in \mathrm{Im}(u^p) = J.$$

Ainsi J est stable par u. D'après le théorème du rang appliqué à u^p,

$$\dim(E) = \dim(\ker(u^p)) + \mathrm{rg}(u^p) = \dim(N) + \dim(J).$$

Montrons que N et J sont en somme directe. Soit $y \in N \cap J$. $y \in J$, donc on dispose de $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$. Or,

$$u^{2p}(x) = u^p(y) = 0_E,$$

car $y \in N$. Or $\ker(u^{2p}) = \ker(u^p)$ par définition de p, donc $y = u^p(x) = 0_E$. Ainsi N et J sont en somme directe. Avec l'égalité des dimensions, on en déduit que N et J sont des sous-espaces vectoriels de E, stable par u et supplémentaires. □

Remarques

Cet exercice est classique et à savoir traiter rapidement. En particulier, ce résultat montre que toute matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10

• **1.** On suppose que u est nilpotent d'indice n. En particulier, $u^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On dispose ainsi de $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_E$. Montrons que $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 x + \ldots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_E.$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On pose

$$j = \min\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}.$$

Ainsi,

$$\lambda_j u^j(x) + \ldots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_E.$$

Or, $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc on compose par u^{n-1-j} à gauche, ce qui donne

$$\lambda_j u^{n-1}(x) = 0_E,$$

ce qui est absurde, car $u^{n-1}(x) \neq 0_E$. Ainsi $\mathcal{B}$ est libre et comporte $n = \dim(E)$ vecteurs, donc est une base. D'où le résultat.

• **2.** On suppose que u admet n valeurs propres distinctes. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de E, associée aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ toutes distinctes. On pose

$$x = e_1 + \ldots + e_n.$$

Par récurrence immédiate, il vient que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \ldots + \lambda_n^k e_n.$$

On pose $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$, et on considère des réels $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que

$$0_E = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_i \lambda_j^i e_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^i \Big) e_j.$$

Par liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$, il vient que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^i = 0.$$

En posant

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

on remarque que $V(a_0 \dots a_{n-1})^T = (0 \dots 0)^T$. Or V est une matrice de Vandermonde inversible, car les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont tous distincts. On en déduit que $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$. Ainsi $\mathcal{B}$ est libre et comporte $n = \dim(E)$ vecteurs, donc est une base. D'où le résultat.

• **3.** Comme u est cyclique, on dispose de $x \in E$ tel que $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. $v(x) \in E$, donc on dispose de $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x).$$

Or, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$v(u^j(x)) = u^j(v(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^j(u^k(x)) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k\Big)(u^j(x)).$$

Ainsi, v et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coïncident sur une base de E, donc sont égaux. D'où $v \in \mathbb{R}_{n-1}[u]$. La réciproque étant évidente, on en déduit que

$$\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}_{n-1}[u]. \qquad \square$$

Remarques

On peut aller légèrement plus loin dans la dernière question, en donnant la dimension de $\mathcal{C}(u)$. En effet, $(\mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[u]$, qui est aussi libre. Pour le montrer, on prend $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que

$$\lambda_0 \mathrm{id} + \lambda_1 u + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Alors en évaluant en x et en utilisant que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, on en déduit que les coefficients sont tous nuls. Enfin, on peut établir une bijection entre $\mathcal{C}(u)$ et E avec l'application linéaire $v \in \mathcal{C}(u) \mapsto v(x) \in E$.

Exercice 11

Supposons par l'absurde qu'il existe un hyperplan $H \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant aucune matrice inversible. $I_n \notin H$, donc $H \oplus \mathrm{Vect}(I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit N une matrice nilpotente. On écrit

$$N = h + \lambda I_n, \quad \text{avec } h \in H.$$

Soit $X \in \ker(h)$ non nul, car h est non inversible. On a $NX = hX + \lambda X = \lambda X$. En itérant,

$$0 = N^n X = \lambda^n X,$$

donc $\lambda = 0$. Donc $N = h \in H$. Ainsi, H contient toutes les matrices nilpotentes. Or,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Et cette matrice devrait appartenir à H, car elle est somme de matrices nilpotentes, qui sont des éléments de H. Absurde. D'où le résultat. □

Exercice 12

• **1.** $\det(R + XJ)$ est un polynôme réel non nul, car ne s'annulant pas en i, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + tJ) \neq 0$. Ainsi, $R + tJ \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

• **2.** On a

$$AR + iAJ = AP = PB = RB + iJB.$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on en déduit que $AR = RB$ et $AJ = JB$. Ainsi, $A(R + tJ) = B(R + tJ)$, puis

$$A = (R + tJ)B(R + tJ)^{-1},$$

d'où le résultat. □

Remarques

Ce résultat peut servir à résoudre élégamment certains problèmes. Par exemple, considérons $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in]0, 2\pi[$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$A^2 - 2\cos(\theta)A + I_n = 0_n.$$

Alors $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ annulant A, car $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$. Comme A est une matrice à coefficients réels, on en déduit que $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ ont même multiplicité comme valeur propre de A. Ainsi, on peut diagonaliser A comme

$$A = P \cdot \mathrm{diag}(\Theta, \ldots, \Theta) \cdot P^{-1}, \quad \text{où } \Theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \text{ et } P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Ce qui montre par ailleurs que n est nécessairement pair. Posons alors

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad R_n(\theta) = \mathrm{diag}(R(\theta), \ldots, R(\theta)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Comme $R(\theta)$ est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à Θ, on en déduit que $R_n(\theta)$ est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à

$$\mathrm{diag}(\Theta, \ldots, \Theta),$$

et donc à A par transitivité de la similitude. Maintenant, A et $R_n(\theta)$ sont deux matrices à coefficients réels, semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La réciproque étant évidente, cela résout l'équation matricielle proposée. On a ainsi étendu notre problème aux nombres complexes, afin de montrer que A agissait comme une rotation d'angle θ sur divers plans de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 13

La trace d'un projecteur est un entier naturel, comme vu en remarque de l'exercice 2. Ainsi,

$$\operatorname{tr}(p) + \sqrt{2}\operatorname{tr}(q) + \sqrt{3}\operatorname{tr}(r) = k \in \mathbb{N}.$$

D'où,

$$3\operatorname{tr}(r)^2 = (\sqrt{3}\operatorname{tr}(r))^2 = (k - \operatorname{tr}(p) - \sqrt{2}\operatorname{tr}(q))^2 = (k - \operatorname{tr}(p))^2 - 2\sqrt{2}\operatorname{tr}(q) + 2\operatorname{tr}(q)^2.$$

Or $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc nécessairement $\operatorname{tr}(q) = 0$. Sinon, on pourrait écrire $\sqrt{2}$ comme quotient de deux nombres entiers. Or $\operatorname{rg}(q) = \operatorname{tr}(q) = 0$, d'où q est nul. Il reste donc

$$\operatorname{tr}(p) + \sqrt{3}\operatorname{tr}(r) = k.$$

Or $\sqrt{3}$ est irrationnel, donc nécessairement $\operatorname{tr}(r) = 0$, puis r est nul. □

Exercice 14

Soit $x \in E$ non nul. $(x, f(x))$ est liée et x est non nul, donc on dispose de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Soit $y \in E$.

- On suppose que (x, y) est liée. On dispose de $a \in \mathbb{K}$ tel que $y = ax$. Ainsi,

$$f(y) = af(x) = a\lambda x = \lambda y.$$

- On suppose que (x, y) est libre. En particulier, $y \neq 0$ et $x + y \neq 0$, donc on dispose de $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(y) = ay \quad \text{et} \quad f(x + y) = b \cdot (x + y).$$

D'une part,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda x + ay.$$

D'autre part, $f(x + y) = bx + by$. D'où

$$\lambda x + ay = bx + by.$$

Par liberté de la famille, $b = \lambda$ et $a = b$. Donc $a = \lambda$, et $f(y) = \lambda y$.

Dans tous les cas, $f(y) = \lambda y$. Donc f est une homothétie. □

Remarques

Cet exercice est un grand classique à maîtriser.

Exercice 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose H_n : « Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 0$ est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls ».

Initialisation : La seule matrice de trace nulle de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est (0), qui est donc bien semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls. Donc H_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_n. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 0$. Si A est une homothétie, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda I_{n+1}$, puis $A = 0_n$, car $\operatorname{tr}(A) = 0$. Ce qui prouve le

résultat dans ce cas. Sinon, on dispose de $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ tel que (X, AX) est libre, d'après l'exercice précédent. On complète cette famille en une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$. Dans cette base, l'action de A s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix},$$

où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Comme A et M sont semblables et que $\mathrm{tr}(A) = 0$, on sait que $\mathrm{tr}(M) = 0$. Ainsi, $\mathrm{tr}(B) = 0$. Par hypothèse de récurrence, B est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls, qu'on note B'. On dispose de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = PB'P^{-1}$. Alors,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & LP \\ P^{-1}C & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice du milieu dans le membre de droite possède tous ses coefficients diagonaux nuls, et M lui est semblable. Or A et M sont semblables, donc A est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls. Ce qui montre H_n et achève la récurrence. □

Remarques

Comment penser à introduire la famille (X, AX) ? On essaye de se ramener à une matrice de taille plus petite, l'idéal serait donc d'avoir un zéro en haut à gauche. Pour cela, on veut construire une base commençant par (X, AX). Seulement, cette famille n'est pas toujours libre. En effet, A pourrait être une homothétie d'après l'exercice précédent. Une fois cette difficulté écartée, la suite se fait naturellement.

Exercice 16

• **1.** Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a

$$[A \operatorname{com}(A)^T]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[\operatorname{com}(A)]_{j,k}.$$

On note B la matrice formée de A en remplaçant la j-ième ligne par la i-ème ligne. Dans ce cas, le membre de droite est le développement du déterminant de B selon sa j-ème ligne. Cependant, si $i \neq j$, B n'est pas inversible, car possède deux lignes égales. Ainsi,

$$[A \operatorname{com}(A)^T]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[\operatorname{com}(A)]_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} b_{j,k}[\operatorname{com}(B)]_{j,k} = \det(B) = 0,$$

avec le rappel sur la comatrice du début de chapitre. Si $i = j$,

$$[A \operatorname{com}(A)^T]_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[\operatorname{com}(A)]_{i,k} = \det(A),$$

par développement du déterminant sur la i-ème ligne. On en déduit que

$$A \operatorname{com}(A)^T = \det(A) I_n,$$

et on fait de même pour la seconde égalité.

• **2.** Si $\mathrm{rg}(A) = n$, $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas $\mathrm{com}(A)$ est inversible. D'où

$$\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n.$$

Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, par théorème du rang $\dim(\ker(A)) = 1$. Or, $A\,\mathrm{com}(A)^T = 0_n$, donc

$$\mathrm{Im}(\mathrm{com}(A)^T) \subset \ker(A), \quad \text{puis} \quad \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)^T) \leq 1.$$

Ensuite, on note $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de A. Comme A est de rang $n-1$, on peut supposer sans perte de généralité que $(C_1, \dots, C_{n-1})$ est libre. On peut ainsi compléter cette famille en une base $(C_1, \dots, C_{n-1}, C'_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note B la matrice formée de ces colonnes, qui est alors inversible. Par développement du déterminant sur la dernière colonne de B,

$$\det(B) = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}[\mathrm{com}(B)]_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}[\mathrm{com}(A)]_{k,n},$$

car pour $k \in [\![1, n]\!]$, la matrice de taille $n-1$ extraite de A en enlevant la dernière colonne et la k-ième ligne, et celle extraite de B en enlevant la dernière colonne et la k-ième ligne sont les mêmes, car A et B diffèrent uniquement de la dernière colonne. Ainsi, $\mathrm{com}(A)$ possède au moins un coefficient non nul, sinon on aurait $\det(B) = 0$. Donc $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) \geq 1$. D'où

$$\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1.$$

Si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$, alors toute famille de $n-1$ colonnes de A est liée, et tous les déterminants extraits de A en enlevant une ligne et une colonne sont donc nuls. D'où $\mathrm{com}(A) = 0_n$, et

$$\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 0.$$

• **3.** On pose $P_A(X) = (-1)^n \frac{\chi_A(0) - \chi_A(X)}{X} \in \mathbb{C}[X]$. On obtient alors que

$$AP_A(A) = (-1)^n(\chi_A(0)I_n - \chi_A(A)) = (-1)^n(-1)^n \det(A)I_n = \det(A)I_n,$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Si A est inversible, comme $A\,\mathrm{com}(A)^T = \det(A)I_n$, on en déduit que $P_A(A) = \mathrm{com}(A)^T$. Sinon,

$$M \mapsto P_M(M) \quad \text{et} \quad M \mapsto \mathrm{com}(M)^T$$

sont des applications polynômiales en les coefficients des matrices, donc continues. Or ces deux applications coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On en déduit alors que

$$P_A(A) = \mathrm{com}(A)^T. \qquad \square$$

Remarques

Le programme de mathématiques des classes préparatoires ne se concentrant pas sur la partie déterminant, cet exercice peut être particulièrement ardu. On conseille de le reprendre à tête reposé si vous ne l'avez pas réussi. En effet, comme la comatrice ne fait pas partie du programme de PCSI, un exercice sur celle-ci pourrait tomber aux oraux de PC ou de PSI. Il est donc utile de maîtriser les subtilités associées.

Pour la troisième question, le fait que les matrices inversibles soient denses dans les matrices est un grand classique. Il suffit en effet de considérer la suite

$$A_p = A + \frac{1}{p} I_n, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*.$$

A possédant un nombre fini de valeurs propres, les $(A_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont inversibles à partir d'un certain rang, et la suite converge bien vers A. Notons enfin que dans le cas où A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{com}(A)^T.$$

Or l'application déterminant est polynômiale en les coefficients des matrices, et de même pour l'application comatrice. Ainsi l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

est continue.

Exercice 17

Supposons A inversible. Alors

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

En passant au déterminant et en reconnaissant des matrices triangulaires par blocs, on obtient

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(DA - CA^{-1}BA) = \det(DA - CB),$$

avec $AB = BA$. Ainsi la relation est vraie quand A est inversible. Dans le cas quelconque, on approche A par la suite de matrices définie par $A_k = A + \frac{1}{k} I_n$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. C'est une suite de matrices inversibles à partir d'un certain rang, commutant avec B et convergeant vers A. On en déduit le résultat par continuité du déterminant. □

Remarques

On utilise ici à nouveau la densité des matrices inversibles, qui montre comment on peut se restreindre à ces matrices afin d'avoir un résultat concernant des matrices quelconques. Il faut cependant bien faire attention que la suite de matrices par laquelle on approche A commute bien avec B. Pour le cas inversible, de nombreuses décompositions sont possibles, comme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} & -B \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ CA^{-1} & DA - CB \end{pmatrix}.$$

Exercice 18

Comme A et B commutent, $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$. D'où,

$$\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB)\det(A - iB) = \det(A + iB)\overline{\det(A + iB)} = |\det(A + iB)|^2 \geq 0,$$

car A et B sont à coefficients réels. □

Remarques

Cet exercice repose uniquement sur le fait que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\overline{\det(M)} = \det(\overline{M})$. En effet, la formule du déterminant donne

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot m_{\sigma(1),1} \cdots m_{\sigma(n),n},$$

d'où

$$\overline{\det(M)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \overline{m_{\sigma(1),1}} \cdots \overline{m_{\sigma(n),n}} = \det(\overline{M}),$$

car pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, donc est réel. Si vous n'avez jamais vu la formule du déterminant et que ce $\varepsilon(\sigma)$, qui donne la signature de la permutation σ, ne vous dit rien, apprenez simplement le résultat. En effet, la connaissance de la définition d'une signature ne vous apportera rien, hormis un peu de culture, c'est d'ailleurs pour cela qu'elle n'a ni été reprise dans la partie 2 ni dans les définitions de ce début de chapitre. Vous pouvez évidemment vous renseigner plus amplement dans d'autres ouvrages, ou demander à votre professeur.

Exercice 19

• **1.** Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On trigonalise A selon $A = PTP^{-1}$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qu'on écrit

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{où } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{1}{k+n} \end{pmatrix}.$$

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$. Si $\lambda_i = \lambda_j$, alors

$$\lambda_i + \frac{1}{k+i} \neq \lambda_j + \frac{1}{k+j}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

Sinon, on peut supposer que $\lambda_i < \lambda_j$ sans perte de généralité, et on dispose de $N_{i,j} \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq N_{i,j}, \quad 0 \leq \frac{1}{k} < \frac{\lambda_j - \lambda_i}{2}.$$

Ainsi, pour tout $k \geq N_{i,j}$,

$$\lambda_i + \frac{1}{k+i} < \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} < \lambda_j + \frac{1}{k+j}.$$

Ainsi, à partir du rang $N = \max\{N_{i,j} \mid i, j \in [\![1, n]\!]\}$, les $(T_k)_{k\geq N}$ possèdent tous n valeurs propres distinctes, donc sont diagonalisables. Or $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers T. Donc $(PT_kP^{-1})_{k\geq N}$ est une suite de matrice diagonalisables, convergeant vers A par continuité du produit matriciel. D'où le résultat.

• **2.** On définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & M & \longmapsto & \chi_M(M). \end{array}$$

φ est continue comme application polynômiale en les coefficients des matrices. Soit M une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qu'on écrit

$$M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1},$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Alors

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M) = \det(XI_n - \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i).$$

D'où,

$$\chi_M(M) = \prod_{i=1}^{n}(M - \lambda_i I_n) = P \cdot \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \lambda_i I_n) \cdot P^{-1} = 0_n,$$

car les matrices au centre du produit sont diagonales, donc commutent. Ainsi φ est nulle sur les matrices diagonalisables, qui sont denses dans l'ensemble des matrices. Donc φ est nulle par continuité. En particulier $\chi_A(A) = 0_n$. D'où le théorème de Cayley-Hamilton. □

Remarques

En oral, l'examinateur vous aurait sûrement fait passer le détail du fait que les matrices exhibées possèdent bien n valeurs propres distinctes à partir d'un certain rang, mais sachez le démontrer au cas où c'est demandé. Enfin, attention à la manipulation du produit dans la seconde question : on n'a pas sorti P et P^{-1} du produit parce qu'elles commutent avec les autres matrices, mais parce que ces matrices se compensent deux à deux dans le produit.

Pour se convaincre que le produit fait bien 0_n, il suffit de remarquer que quand on multiplie deux matrices diagonales, on le fait coefficient par coefficient. Or, ici il y a n matrices diagonales, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on peut toujours en trouver une qui a un coefficient nul en position (i, i).

Exercice 20

(⇒) On suppose que $\chi_A = \chi_B$. Alors A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A, et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Or ces valeurs sont les mêmes pour B. D'où $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$.
$(\Leftarrow)$ On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$. Par linéarité de la trace,

$$\mathrm{tr}(P(A)) = \mathrm{tr}(P(B)), \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{C}[X].$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Par théorème d'interpolation de Lagrange (p. 436), on dispose d'un polynôme Q tel que $Q(\lambda) = 1$ et $Q(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in (\mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)) - \{\lambda\}$. Alors,

$$m_{\lambda,A} = \mathrm{tr}(Q(A)) = \mathrm{tr}(Q(B)) = m_{\lambda,B},$$

donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et λ a la même multiplicité dans χ_A et dans χ_B. Ceci étant vrai pour toute valeur propre de A, on en déduit que $\chi_A = \chi_B$, car χ_A et χ_B ont même degré. □

Remarques

La preuve sur l'inversibilité des matrices de Vandermonde utilisant parfois l'interpolation de Lagrange, on aurait aussi pu approcher le sens réciproque par une telle méthode. Cependant, l'utilisation de l'interpolation de Lagrange est plus élégante et efficace.

Par ailleurs, cet exercice donne une caractérisation intéressante des matrices nilpotentes. En effet, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, i.e. $\chi_A(X) = X^n = \chi_{0_n}(X)$. On en déduit que A est nilpotente si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{tr}(A^k) = 0.$$

Exercice 21

• **1.** On suppose que A est diagonalisable. On écrit

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q^{-1},$$

où $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on dispose de $x_i \in \mathbb{C}$ tel que $P(x_i) = \lambda_i$, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss appliqué à $P(X) - \lambda_i$. On pose

$$M = Q\,\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n)Q^{-1},$$

de sorte que

$$P(M) = Q\,\mathrm{diag}(P(x_1), \dots, P(x_n))Q^{-1} = A.$$

Ce qui montre l'existence d'une solution.

• **2.** Si $n = 1$, on se ramène au théorème de d'Alembert-Gauss, et on a toujours une solution. Si $n \geq 2$, on suppose que A est nilpotente non nulle et que $P(X) = X^n$. Si par l'absurde on avait $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$M^n = A,$$

alors M serait nilpotente. Mais d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $M^n = 0_n$. Absurde, car A est non nulle.

• **3.** Supposons avoir $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de l'équation. On va distinguer plusieurs cas selon les valeurs propres de A.

∗ Si les valeurs propres de A sont distinctes :
Dans ce cas, A est diagonalisable, et on l'écrit

$$A = Q\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}Q^{-1},$$

où $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ distinctes. On pose $B = Q^{-1}MQ$. Ainsi,

$$B^2 = Q^{-1}M^2Q = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $B^2 = \mathrm{tr}(B)B - \det(B)I_2$. Si par l'absurde $\mathrm{tr}(B)$ était nulle, alors

$$-\det(B)I_2 = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix},$$

donc $\lambda = -\det(B) = \mu$, absurde. Ainsi $\mathrm{tr}(B) \neq 0$, et on en déduit que B est diagonale. On écrit $B = \mathrm{diag}(a, b)$, où $a, b \in \mathbb{C}$. Alors

$$a^2 = \lambda \quad \text{et} \quad b^2 = \mu.$$

Tout complexe admettant une racine carrée complexe, on note r_1 une racine carrée de λ et r_2 une racine carrée de μ. En revenant à M, on obtient que

$$S = \left\{ Q\begin{pmatrix}\varepsilon_1 r_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 r_2\end{pmatrix}Q^{-1} \;\middle|\; \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}\right\},$$

puisque réciproquement, ces matrices vérifient bien l'équation. On remarque par ailleurs que l'ensemble des solutions comporte trois ou quatre matrices, selon que 0 est valeur propre de A ou non.

∗ Si A est diagonalisable et possède une seule valeur propre :
Il vient alors que A est un multiple de I_2, et on dispose de $a \in \mathbb{C}$ tel que $A = aI_2$. Alors,

$$\mathrm{tr}(M)M - \det(M)I_2 = M^2 = aI_2,$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$, on en déduit que M est diagonale. Puis en notant $r \in \mathbb{C}$ une racine carrée de a, on a

$$M \in \left\{ \begin{pmatrix}\varepsilon_1 r & 0\\ 0 & \varepsilon_2 r\end{pmatrix} \;\middle|\; \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}\right\}.$$

Si $\mathrm{tr}(M) = 0$, on dispose de $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix}x & y\\ z & -x\end{pmatrix}, \quad \text{puis on calcule} \quad M^2 = (x^2 + yz)I_2.$$

On identifie donc $x^2 + yz = a$. Ainsi,

$$M \in \left\{ \begin{pmatrix}x & y\\ z & -x\end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{C},\ x^2 + yz = a\right\}.$$

Ce qui nous donne l'ensemble total des solutions

$$S = \left\{ \begin{pmatrix}x & y\\ z & -x\end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{C},\ x^2 + yz = a\right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix}\varepsilon_1 r & 0\\ 0 & \varepsilon_2 r\end{pmatrix} \;\middle|\; \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}\right\},$$

puisque réciproquement ces solutions conviennent bien, et où r est une racine carrée de a.

* Si A n'est pas diagonalisable et possède une seule valeur propre :
  On trigonalise A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et on l'écrit

$$A = Q \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} Q^{-1},$$

  où $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{C}$. On peut en effet mettre un 1 en haut à droite, quitte à dilater le second vecteur de la nouvelle base. On pose $B = Q^{-1}MQ$. Ainsi,

$$B^2 = Q^{-1}M^2Q = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

  D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $B^2 = \mathrm{tr}(B)B - \det(B)I_2$. Si par l'absurde $\mathrm{tr}(B)$ est nulle, alors

$$-\det(B)I_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

  Ainsi $\mathrm{tr}(B) \neq 0$, et B est triangulaire supérieure. On dispose de $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad \text{puis on calcule} \quad M^2 = \begin{pmatrix} x^2 & y(x+z) \\ 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

  Par identification, $x^2 = a = z^2$. Or, on doit avoir $x + z \neq 0$, et $x^2 - z^2 = 0$, donc $x = z$. On remarque par ailleurs que si par l'absurde $a = 0$, alors $x = 0$, et $1 = y(x+z) = 0$. Donc $a \neq 0$, autrement dit A n'est pas nilpotente non nulle. La suite de la résolution donne que

$$S = \left\{ \pm Q \begin{pmatrix} r & \frac{1}{2r} \\ 0 & r \end{pmatrix} Q^{-1} \right\},$$

  où r est une racine carré de a. On vérifie que ces deux matrices conviennent bien.

On peut donc conclure que l'équation admet des solutions si et seulement si A n'est pas nilpotente non nulle. Le nombre de solutions est

* 3 ou 4, si A possède deux valeurs propres distinctes.
* infini, si A est un multiple de l'identité.
* 2 sinon. □

Remarques

Il peut être assez surprenant de voir une infinité de solutions quand A est un multiple de l'identité, puisqu'on pourrait s'attendre à avoir uniquement les solutions du second ensemble de l'union. Intuitivement, l'infinité de solutions provient de toutes les symétries du plan dans le cas où A est non nulle. Dans le cas où A est nulle, l'ensemble correspond simplement aux matrices nilpotentes.

Dans la résolution, attention à bien distinguer le cas où la trace est nulle, puisque dans le cas où A est multiple de l'identité, on a bien de telles solutions. Cette résolution est détaillée et méthodique, et montre l'intérêt, en tout cas en taille 2, des outils de réduction à notre disposition. Pour la partie où A possédait deux valeurs propres distinctes, on

aurait pu faire appel à l'exercice 10, et au fait que A et M commutent :

$$AM = M^3 = MA,$$

afin de conclure que M était une fonction linéaire de A. Mais les conditions sur les coefficients auraient donné lieu à de nombreuses disjonctions de cas.

Exercice 22

Supposons avoir $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une solution. Dans ce cas, avec le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient

$$A = M^2 + M = (1 + \operatorname{tr}(M))M - \det(M)I_2,$$

puis

$$(1 + \operatorname{tr}(M))M = \begin{pmatrix} 1 + \det(M) & 1 \\ 1 & 1 + \det(M) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

On applique la trace et le déterminant. Ce qui nous donne

$$\begin{cases} (1 + \operatorname{tr}(M)) \operatorname{tr}(M) & = 2(1 + \det(M)), \\ (1 + \operatorname{tr}(M))^2 \det(M) & = (2 + \det(M)) \det(M). \end{cases} \tag{3}$$

∗ Si $\det(M) = 0$:
Alors $\operatorname{tr}(M)^2 + \operatorname{tr}(M) - 2 = 0$, donc $\operatorname{tr}(M) \in \{-2, 1\}$. Avec (2), on en déduit que

$$M = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

∗ Si $\det(M) \neq 0$:
La deuxième équation de (3) donne

$$\det(M) = (1 + \operatorname{tr}(M))^2 - 2. \tag{4}$$

On réinjecte dans la première équation de (3),

$$(1 + \operatorname{tr}(M)) \operatorname{tr}(M) = 2((1 + \operatorname{tr}(M))^2 - 1) = 2 \operatorname{tr}(M)(2 + \operatorname{tr}(M)).$$

- Si $\operatorname{tr}(M) = 0$. Avec (4), on a $\det(M) = -1$. Ainsi (2) donne

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Sinon, $1 + \operatorname{tr}(M) = 4 + 2 \operatorname{tr}(M)$, donc $\operatorname{tr}(M) = -3$. On a ainsi $\det(M) = 2$. Avec (2), on a

$$M = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les calculs réciproques étant évidents, on a

$$S = \left\{-A,\ \frac{1}{2}A,\ A - I_2,\ -\frac{1}{2}A - I_2\right\}. \qquad \square$$

Remarques

Cet exercice permet de montrer une autre méthode pour résoudre des équations matricielles, sans passer par les coefficients.

Exercice 23

• **1. (a)** Soient λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé. Alors

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

Ainsi $v(x)$ est vecteur propre de u pour λ. D'où le résultat.

(b) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E formée de vecteurs propres de u, et $(\lambda_i)_{i\in I}$ les valeurs propres associées. Pour tout $i \in I$,

$$u(v(e_i)) = \lambda_i v(e_i) = v(\lambda_i e_i) = v(u(e_i)).$$

Ainsi $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur une base de E, donc sont égales.

• **2.** Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille codiagonalisable d'endomorphismes de E. On dispose de $(e_j)_{j\in J}$ une base de E composée de vecteurs propres communs à tous les $(u_i)_{i\in I}$, dont on note $((\lambda_{i,j})_{j\in J})_{i\in I}$ les familles de valeurs propres associées. Soient $k, l \in I$ et $m \in J$. On a

$$u_k(u_l(e_m)) = u_k(\lambda_{l,m} e_m) = \lambda_{k,m}\lambda_{l,m} e_m = \lambda_{k,m} u_l(e_m).$$

Ainsi, $u_l(e_m)$ est un vecteur propre de u_k pour la valeur propre $\lambda_{k,m}$. On en déduit que u_l stabilise les espaces propres de u_k. Or u_k est diagonalisable. Donc u_l et u_k commutent. D'où le résultat.

• **3. (a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose H_n : « toute famille de n endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, qui sont diagonalisables et commutent deux à deux, est codiagonalisable ».

Initialisation : H_1 est évidemment vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_n. Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $v_0, \dots, v_n$ une famille de $n+1$ endomorphismes de V diagonalisables et commutant deux à deux. En particulier, v_0 est diagonalisable et on note $(V_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u_0)}$ ses espaces propres. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(v_0)$. D'après la question 1 (a),

$$v_i \text{ stabilise } E_\lambda, \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

Or v_i est diagonalisable, donc la restriction de v_i à E_λ est diagonalisable. Ainsi la famille des restrictions $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille de n endomorphismes de V_λ diagonalisables et commutant deux à deux. D'après H_n, on dispose de $\mathcal{B}_\lambda$ une base de vecteurs propres des restrictions des $(v_1, \dots, v_n)$ à V_λ. Or, v_0 est diagonalisable, donc

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda\in \mathrm{Sp}(v_0)} \mathcal{B}_\lambda$$

est une base de E formée de vecteurs propres communs à v_0, et aux $v_1, \dots, v_n$. Donc $(v_0, \dots, v_n)$ est codiagonalisable. Ainsi H_{n+1} est vraie. Ce qui achève la récurrence et montre le résultat.

(b) Comme E est de dimension finie, le rang de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est finie. On peut ainsi extraire une famille $(u_1,\dots,u_n)$ d'endomorphismes telle que tous les autres en soient une combinaison linéaire. Cette sous-famille est finie et comporte des endomorphismes diagonalisables et commutant deux à deux. Ainsi, cette sous-famille est codiagonalisable d'après la question précédente. On note $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs propres communs aux $u_1,\dots,u_n$. Or, pour tout $i\in I$,

$$u_i \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n),$$

donc $\mathcal{B}$ est une famille de vecteurs propres de u_i. Ainsi, $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable. □

Remarques

Cet exercice est un peu technique, et ne vous serait sûrement pas demandé en dimension quelconque. Cependant, il permet de mieux comprendre ce que l'on manipule, et surtout : le résultat démontré peut être très intéressant à réutiliser.

Exercice 24

• **1.** Soient $\alpha\in\mathrm{Sp}(A)$ et $\beta\in\mathrm{Sp}(B)$. On dispose de X un vecteur propre de A pour α, et Y un vecteur propre de B^T pour β. En effet, B et B^T ont les mêmes valeurs propres. Alors,

$$u(XY^T) = AXY^T - XY^TB = (AX)Y^T - X(B^TY)^T = \alpha XY^T - \beta XY^T = (\alpha-\beta)XY^T.$$

Or X et Y sont non nuls, et $XY^T = (x_iy_j)_{1\leq i,j\leq n}$, donc XY^T possède au moins une coordonnée non nulle. Ainsi $\alpha-\beta\in\mathrm{Sp}(u)$.

• **2. (a)** On a $AM = MB + \lambda M = M(B+\lambda I_n)$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose H_k :

$$A^kM = M(B+\lambda I_n)^k.$$

INITIALISATION : H_0 est évidente, et H_1 est vraie par hypothèse.

HÉRÉDITÉ : Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On suppose H_k.

$$A^{k+1}M = A^k\cdot AM = A^kM(B+\lambda I_n) = M(B+\lambda I_n)^k\cdot(B+\lambda I_n),$$

donc H_{k+1} est vraie. Ce qui achève la récurrence et montre le résultat par linéarité.

(b) On choisit pour polynôme le polynôme caractéristique de A, de sorte que

$$M\chi_A(B+\lambda I_n) = \chi_A(A)M = 0_n.$$

Si par l'absurde, $\chi_A(B+\lambda I_n)$ était inversible, on aurait $M=0_n$. Ainsi,

$$\chi_A(B+\lambda I_n) = \prod_{\alpha\in\mathrm{Sp}(A)} (B+(\lambda-\alpha)I_n)^{m_\alpha}$$

est non inversible, donc un des facteurs de ce produit aussi. On dispose ainsi de $\alpha\in\mathrm{Sp}(A)$ tel que $B+(\lambda-\alpha)I_n$ est non inversible. Ainsi $\beta=-(\lambda-\alpha)$ est une valeur propre de B. Or,

$$\lambda = \alpha-\beta.$$

D'où le résultat.

• **3.** On déduit des questions 1 et 2 que

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\alpha - \beta \mid \alpha \in \mathrm{Sp}(A),\ \beta \in \mathrm{Sp}(B)\}.$$

• **4.** Cette condition est équivalente au fait que u admette 0 comme valeur propre. Mais d'après la question précédente, u admet 0 comme valeur propre si et seulement si A et B ont une valeur propre commune. La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc

$$\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset.$$ □

Exercice 25

• **1.** Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. On dispose de $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$. Alors,

$$\lambda x_i = [AX]_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j,$$

d'où

$$|\lambda - a_{i,i}| \cdot |x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Or $|x_i| > 0$, donc en simplifiant par ce réel, on a

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

D'où $\lambda \in D_i$. On en déduit le résultat.

• **2.** Supposons que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$. D'après la question précédente, on dispose de $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|a_{i,i}| = |0 - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc A est inversible. □

Remarques

Par ailleurs, on considérant A^T, on montre aussi que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D'_i$, où

$$D'_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{j,i}| \right\}.$$

Ce résultat permet de localiser les valeurs propres d'une matrice, et s'appelle le théorème de Gerschgorin.

Exercice 26

• **1.** Déjà, $\mathcal{S}$ est non vide, car I_n est une matrice stochastique. Soient $A, B \in \mathcal{S}$ et $t \in [0, 1]$. On a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} (t a_{i,j} + (1-t) b_{i,j}) = t \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + (1-t) \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = t + (1-t) = 1.$$

De plus, les coefficients de $tA+(1-t)B$ sont positifs. Donc $tA+(1-t)B \in \mathcal{S}$. Ce qui montre la convexité. Tous les coefficients d'une matrice stochastique sont entre 0 et 1, ce qui montre le caractère borné de $\mathcal{S}$, en considérant la norme infinie. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} [A_n]_{i,j} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,$$

par convergence coefficient à coefficient. On en déduit aussi que tous les coefficients de A sont positifs. Ainsi $A \in \mathcal{S}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc fermé borné, c'est-à-dire compact en dimension finie (p. 391). Enfin, soient $A, B \in \mathcal{S}$. A et B étant à coefficients positifs, leur produit aussi. Maintenant, pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} [AB]_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1.$$

Donc $AB \in \mathcal{S}$. D'où le résultat.

• **2.** Soient $A \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, et X un vecteur propre associé. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$|\lambda| \cdot |x_i| = |[AX]_{i,1}| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\|X\|_\infty \leq \|X\|_\infty.$$

En particulier, on peut choisir $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$, et comme X est non nul, on a $|\lambda| \leq 1$. D'où le résultat.

• **3. (a)** Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$.

$$1 - a_{i,i} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} a_{i,j},$$

car $a_{i,n} > 0$. Or $1-a_{i,i}$ est positif et A est à coefficients positifs, donc

$$\Big|[B-I_{n-1}]_{i,i}\Big| = 1 - a_{i,i} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} \Big|[B-I_{n-1}]_{i,j}\Big|.$$

Donc $B-I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante.

(b) D'après le résultat de l'exercice précédent, $B-I_{n-1}$ est inversible. On en déduit que $\dim(\ker(A-I_n)) \leq 1$. En effet, si la dimension était strictement supérieur à 1, l'espace engendré par les colonnes de $A-I_n$ serait de dimension inférieur ou égale à $n-2$. Cela signifie qu'il existerait une combinaison linéaire non nulle des $n-1$ premières colonnes donnant la colonne nulle, autrement dit $B-I_{n-1}$ ne serait pas inversible. D'où

$$\dim(\ker(A-I_n)) \leq 1.$$

Or, en notant $X = (1 \cdots 1)^T$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$[AX]_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 = x_i.$$

Ainsi, $AX = X$. D'où

$$\dim(\ker(A - I_n)) = 1.$$

(c) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ de module 1. En reprenant la preuve de l'exercice précédent, on montre qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j} = 1 - a_{i,i}.$$

Ainsi,

$$1 = |\lambda| = |\lambda - a_{i,i} + a_{i,i}| \leq |\lambda - a_{i,i}| + a_{i,i} \leq 1,$$

avec l'équation précédente. On a donc égalité dans l'inégalité triangulaire. Comme $a_{i,i} \neq 0$, on dispose de $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lambda - a_{i,i} = \mu a_{i,i}.$$

En particulier, λ est un réel positif. Donc $\lambda = 1$. D'où le résultat. □

Remarques

Les matrices stochastiques sont particulièrement intéressantes en probabilité, puisqu'elles peuvent encoder une marche aléatoire. Donnons-nous par exemple n points du plan, qu'on numérote de 1 à n, et $p\colon [\![1, n]\!] \to [0, 1]$ une probabilité sur cet ensemble. On note π son vecteur de probabilité associé, c'est-à-dire que

$$\pi_i = p(i), \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

On place une puce au temps $t = 0$ sur un des points du plan, selon la probabilité p. Puis, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $a_{i,j}$ la probabilité qu'a la puce de passer du point i au point j, d'un temps à un autre. Par formule des probabilités totales, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1, \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

Et les probabilités étant toujours positives, la matrice A associée est donc une matrice stochastique. Il vient par récurrence immédiate que la distribution de probabilité de la place de la puce au temps $t = n$ suit la loi

$$\pi^{(n)} = A^n \pi,$$

puisqu'on passe d'un temps à un autre à l'aide de la matrice A. On peut alors étudier la convergence éventuelle de la suite $(\pi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, pour avoir la loi « à l'infini » de la place de la puce. Si la suite converge, et qu'on note $\pi^{(\infty)}$ le vecteur de probabilité associé, on remarque que

$$A\pi^{(\infty)} = A \cdot \lim_{n \to +\infty} A^n \pi = \lim_{n \to +\infty} A^{n+1} \pi = \pi^{(\infty)},$$

par continuité du produit matriciel. Le vecteur $\pi^{(\infty)}$ est donc un vecteur propre pour A, associé à la valeur propre 1. Dans le cas où A est à coefficients strictement positifs, $\pi^{(\infty)}$

est unique, car l'espace $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1, et qu'on doit avoir

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{(\infty)} = 1.$$

Ainsi, peu importe le vecteur de probabilité initial, si on a convergence, la loi à l'infini est nécessairement donnée par $\pi^{(\infty)}$.

Exercice 27

• **1.** On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors que si A est une matrice circulante associée aux coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$, on a

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathbb{C}[J].$$

Réciproquement, J et toutes ses puissances sont des matrices circulantes, donc $\mathscr{C}_n = \mathbb{C}[J]$, car $\mathscr{C}_n$ est un espace vectoriel.

• **2.** On remarque que $J^n = I_n$. Ainsi, J est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc est diagonalisable. On note

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k \;\middle|\; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}, \quad \text{où } \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On définit $X_k = (1\ \omega^k\ \cdots\ (\omega^k)^{n-1})^T$. Il vient alors que

$$JX_k = \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \omega^k \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-2} \\ \omega^{-k} \end{pmatrix} = \omega^k X_k,$$

car $\omega^{-1} = \omega^{n-1}$. Or les éléments de $(\omega^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ sont tous distincts. Ce qui donne les éléments propres de J.

• **3.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. $(X_0, \dots, X_{n-1})$ est une base de vecteurs propres de J, c'en est donc aussi une de $P(J)$. Les valeurs propres associées sont alors $(P(1), P(\omega), \dots, P(\omega^{n-1}))$. Or, le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres avec multiplicités, donc

$$\det(P(J))) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).$$

• **4.** Supposons que $n \neq 1$. Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Comme $\omega^j \neq 1$, on a

$$P(\omega^j) = \sum_{k=0}^{p-1} (\omega^j)^k = \frac{\omega^{jp} - 1}{\omega^j - 1}.$$

Or $P(1) = p \neq 0$. Avec la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\det(P(J)) = 0 &\iff \exists j \in [\![1, n-1]\!], \quad P(\omega^j) = 0 \\
&\iff \exists j \in [\![1, n-1]\!], \quad \omega^{pj} = 1 \\
&\iff \exists j \in [\![1, n-1]\!], \quad \frac{2\pi pj}{n} \equiv 0 \pmod{2\pi} \\
&\iff \exists j \in [\![1, n-1]\!], \quad pj \equiv 0 \pmod{n} \\
&\iff \operatorname{pgcd}(p, n) \neq 1.
\end{aligned}$$

Montrons la dernière équivalence.
$(\Leftarrow)$ Supposons qu'il existe $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $pj \equiv 0 \pmod{n}$. Alors, n divise pj. Si par l'absurde n et p étaient premiers entre eux, n diviserait j par lemme de Gauss. Ce qui n'est pas possible, car $j \in [\![1, n-1]\!]$.
$(\Rightarrow)$ On suppose que p et n ne sont pas premiers entre eux. Ainsi,

$$p \cdot \frac{n}{\operatorname{pgcd}(p,n)} = n \cdot \underbrace{\frac{p}{\operatorname{pgcd}(p,n)}}_{\in \mathbb{N}} \equiv 0 \pmod{n},$$

avec $\frac{n}{\operatorname{pgcd}(p,n)} \in [\![1, n-1]\!]$, car $\operatorname{pgcd}(p, n) > 1$. D'où le résultat.
On peut alors conclure que $P(J)$ est inversible si et seulement p et n sont premiers entre eux. Si $n = 1$, la question précédente donne que $\det(P(J)) = P(1) = p \neq 0$, donc $P(J)$ est toujours inversible. Comme 1 est premier avec tous les nombres entiers, on a la même conclusion. □

Remarques

Remarquons que comme les valeurs propres de J sont les éléments de $\mathbb{U}_n$, le polynôme caractéristique de J est donc $X^n - 1$. Profitons aussi de cette remarque pour noter que si $x \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (x - \omega^k) = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

En prenant la limite pour x tendant vers 1, on obtient

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n.$$

Ainsi, certains calculs de produits ou de sommes peuvent se ramener astucieusement à la factorisation d'un polynôme, puis à son évaluation en un point précis.

Exercice 28

• **1.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Or les deux matrices sont triangulaires, donc leurs valeurs propres sont sur leurs diagonales. D'où le résultat.

• **2.** ANALYSE : Soit $M \in \mathcal{E}_2$. On écrit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\chi_M(X) = (X-a)(X-b) - bc.$$

Or M est à diagonale propre, donc $\chi_M(a) = 0$. D'où $bc = 0$, et $b = 0$ ou $c = 0$. Donc M est triangulaire.

SYNTHÈSE : Réciproquement, les matrices triangulaires sont à diagonale propre. Donc $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• **3.** ANALYSE : Soit $A \in \mathcal{E}_n$ antisymétrique. La diagonale de A est nulle, donc la seule valeur propre de A est 0. On en déduit par le théorème de Cayley-Hamilton que A est nilpotente. Or AA^T est symétrique réelle, donc diagonalisable. Mais

$$(AA^T)^n = (-A^2)^n = (-1)^n A^{2n} = 0_n.$$

AA^T est diagonalisable et nilpotente, donc $AA^T = 0_n$. Ce qui signifie que $\mathrm{tr}(AA^T) = 0$. Or $M \mapsto \mathrm{tr}(MM^T)$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $A = 0_n$.

SYNTHÈSE : Réciproquement, la matrice nulle est antisymétrique et à diagonale propre.

• **4. (a)** D'une part, $\mathrm{tr}(A^2)$ est égale à la somme des valeurs propres de A^2. Comme A est symétrique réelle, A est diagonalisable, et on en déduit que les valeurs propres de A^2 sont $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$. D'où

$$\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

D'autre part,

$$\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} [A^2]_{i,i} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} a_{j,i} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2,$$

car A est symétrique. En comparant les deux égalités, on obtient le résultat.

(b) On sait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = \lambda_i$, quitte à réordonner les valeurs propres. D'où,

$$\sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} a_{i,j}^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 - \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2 = 0.$$

On a une somme de nombres positifs qui est nulle, donc

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \implies a_{i,j} = 0.$$

Donc A est diagonale. Réciproquement les matrices diagonales sont symétriques réelles et à diagonale propre. Ce qui caractérise $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. □

Remarques

La question 3 peut laisser place à un argument encore plus intéressant. En effet, on a montré que $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_E\}$. Ainsi, si on prend F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{E}_n$, on a

$$\dim(F) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(F \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \leq n^2.$$

Or $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$, donc

$$\dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cette borne supérieure est atteinte si F désigne l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. On s'attendait évidemment à ce que $\mathcal{E}_n$ ne soit pas un espace vectoriel dès la première question.

Espaces préhilbertiens réels

1. Définitions à connaître

1.1. Définition. *Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit qu'un endomorphisme v de E est un adjoint de u si et seulement*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle.$$

Si un endomorphisme admet un adjoint, celui-ci est unique.

2. Sujet : Polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle réel. On appelle *fonction de masse* sur I toute fonction continue non nulle $w\colon I \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n w(x)$ est intégrable sur I. On note $\mathcal{M}(I)$ l'ensemble des fonctions de masse sur I. Pour tous $w \in \mathcal{M}(I)$, et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\langle P, Q\rangle_w = \int_I P(x)Q(x)w(x)\,\mathrm{d}x.$$

I. Premières propriétés

Soit $w \in \mathcal{M}(I)$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes unitaires $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$, et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles distinctes de multiplicité impaire de P_n dans I. On note $r_1, \ldots, r_p$ ces racines et on pose $Q(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - r_i)$.
   (a) Montrer que QP_n est de signe constant sur I.
   (b) En déduire que P_n possède n racines distinctes dans I.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n[X]$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n. Déterminer

$$\min_{P\in U_n[X]} \int_I P(t)^2 w(t)\,\mathrm{d}t.$$

II. Polynômes d'Hermite

Dans cette partie, $I = \mathbb{R}$ et $w\colon x \mapsto e^{-x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n\colon x \mapsto (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$.

5. Vérifier que w est une fonction de masse sur I.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n, et

$$H_{n+1} = 2XH_n - H_n'.$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le coefficient dominant de H_n.
8. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$,
$$\langle H_n, P\rangle_w = \langle H_0, P^{(n)}\rangle_w.$$
9. En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$.
10. Calculer $\|H_n\|_w$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
11. Justifier que w est développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$, et en déduire que pour tous $x, t \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2}.$$

III. Polynômes de Tchebychev

Dans cette partie, $I =]-1,1[$ et $w\colon x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. Vérifier que w est une fonction de masse sur I.
13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que
$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le coefficient dominant et le degré de T_n.
16. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$.
17. Calculer $\|T_n\|_w$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
18. Montrer que pour tous $x \in [-1,1]$ et $t \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\frac{t^n}{n!} = \cos\big(t\sqrt{1-x^2}\big)e^{xt}.$$

3. Adjoints

Exercice 1

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, et f, g deux applications de E dans E telles que
$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$

1. Montrer que f et g sont des applications linéaires.
2. On suppose que E est de dimension finie.
   (a) Établir des relations entre $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
   (b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par g.