

Mohamed Abdelouahab
Renée Gatinol

Mécanique des fluides pour ingénieurs

Cours et exercices corrigés



ellipses

Chapitre 1

État de la matière

À la pression atmosphérique, l'eau se présente sous différents états, en fonction de la température. Elle est solide en dessous de 0 °C, liquide entre 0 et 100 °C et se présente sous forme de vapeur au-delà de 100 °C.

Alexandra Deleu

1.1 Généralités

1.1.1 Matière et état de la matière

La matière

On désigne par le terme de matière tout ce qui est substance, c'est-à-dire tout ce qui compose les corps qui nous entourent et qui possèdent une masse.

État de la matière

En physique un état de la matière correspond à un certain degré de cohérence de la matière (structure cristalline, solution de polymères, gaz raréfiés, etc.) qui se traduit par des comportements définis par des lois de la physique (indice de réfraction, malléabilité, viscosité, loi des gaz parfaits, etc.).

Les différents états de la matière

Les états classiques de la matière sont de l'ordre de trois (figure 1.1) :

1. L'état solide : les molécules sont serrées les unes contre les autres, elles ne se déplacent pas, elles vibrent seulement. Le solide a un volume et une forme propre.
2. L'état liquide : les molécules moins serrées roulent les unes sur les autres et s'étalent parfaitement. Le liquide a un volume propre mais n'a pas de forme propre.
3. L'état gazeux : les molécules ne sont pas serrées du tout, elles se repoussent après les chocs. Elles occupent tout le volume offert. Il n'a donc ni volume ni forme propre.

Cette classification n'est cependant pas complète. On peut y ajouter d'autres états comme :

4. l'état plasma : c'est du gaz ionisé c'est-à-dire un mélange d'ions et d'électrons. Cet état est obtenu lorsqu'on enlève ou on ajoute des charges à un atome ou une molécule. L'atome ou la molécule perd sa neutralité électrique. On obtient des ions. Le plasma est de loin l'état le plus répandu dans l'univers (les étoiles notamment sont des plasmas). On ne les rencontre naturellement que très rarement sur Terre. Ils sont présents dans les éclairs. Les plasmas ont de nombreuses applications en physique, en chimie et en technologie. Citons par exemple : les écrans plasma des téléviseurs.

5. L'état super-critique¹ : c'est un état où la matière est soumise à une température supérieure à sa température critique et à une pression plus grande que sa pression critique. Les propriétés physiques d'un tel état (masse volumique, viscosité, etc.) se trouvent entre celles des liquides et celles des gaz. On dira tout simplement que l'état super-critique est lorsqu'on ne distingue pas entre le liquide et le gaz, comme par exemple un gaz très comprimé.

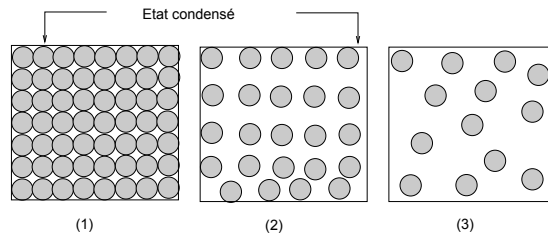


FIG. 1.1 – Les différents états de la matière.

Beaucoup de fluides sont des mélanges. On peut distinguer les quatre cas suivants :

- dispersions : il s'agit de particules fines dans un liquide. La dispersion de la poudre se fait en 4 étapes (figure 1.2) :
 1. le mouillage,
 2. la pénétration,
 3. la dispersion,
 4. la dissolution.

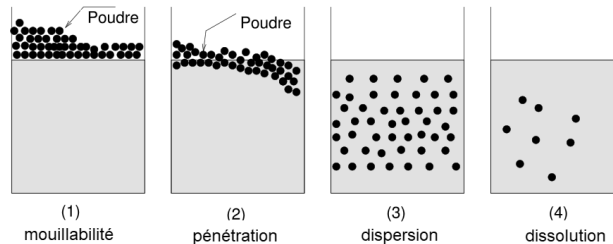


FIG. 1.2 – Les quatre étapes de la dispersion.

- suspensions : il s'agit de particules grossières ou fines dans un gaz ou un liquide. Exemple du cas de la pollution de l'air par des particules de poussière, de la fumée, etc. (figure 1.3).

1. Cet état de la matière a été découvert en 1822 par Charles Cagniard de La Tour, physicien et ingénieur français (1777-1859), élève de l'École polytechnique, auteur de nombreuses inventions. En 1822, Cagniard commence des études sur les liquides et dégage la notion de température critique (température au-dessus de laquelle on ne peut plus liquéfier un gaz en augmentant la pression). Il détermine la valeur de cette température pour plusieurs liquides, dont l'eau.



FIG. 1.3 – *Suspension des particules. Pollution de l'air.*

- émulsions : gouttes dans un liquide. Il s'agit de deux liquides immiscibles, l'un réparti dans l'autre sous forme de gouttes.
- mousses : la mousse est semblable à l'émulsion. La phase dispersée est alors un gaz sous forme de bulles.

1.1.2 Milieu continu

Considérons une masse d'eau. A l'œil nu, à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire à notre échelle, elle paraît continue, mais si on se place à l'échelle microscopique, on constate qu'elle est formée de molécules. Nous pouvons conclure que cette eau n'est pas si continue que ça. A l'état liquide, les distances intermoléculaires sont du même ordre de grandeur que les dimensions des molécules alors qu'à l'état gazeux les distances entre les molécules sont très grandes devant les dimensions des molécules.

1.1.3 Particules fluides

On appelle particule fluide, un ensemble de molécules petit à l'échelle macroscopique mais grand à l'échelle microscopique. On peut placer la particule fluide à une échelle intermédiaire entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique. Cette échelle intermédiaire est appelée échelle mésoscopique. Elle est de l'ordre du micromètre. C'est une échelle d'une part suffisamment petite pour que la particule de fluide puisse être considérée comme ponctuelle, et d'autre part suffisamment grande pour pouvoir la considérer comme un milieu continu. De cette manière, on n'aura pas à étudier le mouvement de chaque molécule ou atome du fluide. On peut négliger par exemple le caractère discontinu de la matière si on définit des moyennes sur une particule de la même manière qu'on oublie le caractère discontinu d'une image. Si on se place à une distance convenable d'un écran et qu'on regarde à l'œil nu une image, elle nous paraît continue mais si on l'étudie de très près, on constate qu'elle est formée de points qui s'allument et qui s'éteignent. Ce sont des pixels. Ainsi la vitesse d'une particule, qui est la vitesse du centre de masse des molécules qui la composent, est fonction continue de l'espace et du temps et il en est de même de la masse volumique.

1.1.4 Champs de forces dans un fluide

Pour étudier les actions mécaniques subies par une particule fluide telle qu'elle a été définie précédemment, en particulier de la part du milieu environnant, on se place à l'échelle mésoscopique. Ces forces se divisent en deux catégories :

1. les actions mécaniques à distance subies par une particule quelconque de fluide,
2. les actions mécaniques de contact exercées par le reste du fluide environnant sur la surface de cette particule.

1.1.5 Forces volumiques et forces surfaciques

Dans ce paragraphe, et dans toute la suite, on se place à l'échelle macroscopique : on considère un volume de fluide, lequel est constitué d'un très grand nombre de particules fluides.

1. Une force volumique est une force par unité de volume, c'est une force qui s'exerce à distance (ex : champ de pesanteur, forces électromagnétiques, etc.). Pour le champ de pesanteur, nous avons $dF_g = g dm$ avec $dm = \rho dV$. La force volumique, c'est-à-dire par unité de volume, notée f_v est égale à :

$$f_v = \frac{dF_g}{dV} = \rho g$$

où g est l'accélération de la pesanteur, ρ la masse volumique (masse de l'unité de volume), dV un volume élémentaire et dm la masse de l'élément de volume dV .

2. Les forces surfaciques, appelées parfois forces superficielles, sont des forces de contact exercées par le reste du fluide sur la surface du volume considéré (figure 1.4). Macroscopiquement, elles sont dues aux très nombreuses collisions au niveau microscopique entre les molécules.

Dans le cas d'un volume de fluide au repos, au point M de la surface du volume considéré (figure 1.4), pour la force due à la pression sur l'élément de surface dS_{ext} , il existe une composante normale et une composante tangentielle. La composante normale est donnée par l'équation suivante : $\vec{dF} = -P(M)\vec{dS}_{ext}$. Le vecteur $\vec{dS}_{ext}$ est le vecteur élément de surface orienté vers l'extérieur du volume V . La quantité est la pression du fluide au point M , laquelle est toujours positive. Le signe moins vient du fait que la force $\vec{dF}$ est dirigée vers la surface du volume V , c'est-à-dire dans le sens opposé à la normale $\vec{n}$ dirigée vers l'extérieur de V , c'est-à-dire opposée à $\vec{dS}_{ext}$.

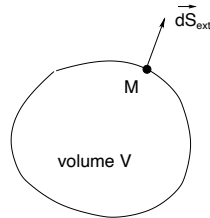


FIG. 1.4 – Forces superficielles sur un volume V .

Quant à la composante tangentielle, elle est toujours nulle en statique des fluides. Nous verrons plus loin, par exemple, qu'elle est non nulle dans le cas des fluides visqueux en mouvement.

1.1.6 Fluides parfaits

Supposons qu'un fluide se déplace dans une conduite. Ce fluide est dit parfait s'il n'y a aucune interaction de frottement entre ce dernier et la paroi de la conduite ou entre les couches fluides elles-mêmes. Les différentes couches qui constituent le fluide se déplacent à la même vitesse car il n'y a aucune résistance à l'écoulement. Cette catégorie de fluide n'existe pas dans la nature.

1.1.7 Fluides réels (visqueux)

Un fluide est dit réel ou visqueux s'il interagit avec la paroi et si les couches qui le composent interagissent entre elles.

Les deux figures ci-dessous montrent, pour l'écoulement d'un fluide dans une conduite plane rectiligne, le champ des vitesses dans le cas d'un fluide parfait (figure 1.5) et dans le cas d'un fluide réel (figure 1.6).

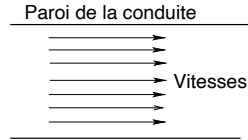


FIG. 1.5 – *Fluide parfait.*

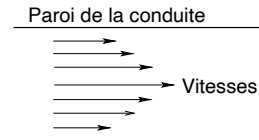


FIG. 1.6 – *Fluide réel.*

1.1.8 Fluides compressibles et incompressibles

En réalité tous les fluides sont compressibles mais certains le sont plus que d'autres. La compressibilité d'un fluide mesure la variation de volume d'une certaine quantité de ce fluide lorsqu'il est soumis à une pression extérieure.

Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure quasiment constant sous l'action d'une pression externe. Ceci concerne les liquides.

Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque la variation de son volume est très importante sous l'effet d'un champ de pression. Ceci concerne les gaz.

Coefficient de compressibilité

La compressibilité d'un fluide représente l'aptitude de ce dernier à subir des variations de volume. Cette variation de volume est définie par :

$$\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right) \quad (1.1)$$

qu'on appelle **coefficient de compressibilité**. Ce dernier est positif car la variation du volume avec la pression est négative. Elle s'exprime en Pa^{-1} .

Définition 1.1. (Coefficient de compression)

Le coefficient de compressibilité χ est défini comme le rapport entre la diminution relative du volume V de fluide $\Delta V/V$ et l'augmentation de pression ΔP .

Comme les corps ont tendance à s'échauffer sous l'effet de la compression, on définit un coefficient de compressibilité isotherme χ_T . En effet, pour un corps restant à température constante, on a :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (1.2)$$

Pour les liquides, les valeurs de χ_T sont comprises entre 10^{-9} à 10^{-11} . En général, elles augmentent en fonction de la température sauf dans le cas de l'eau où ces valeurs diminuent jusqu'à 50° puis augmentent.

Pour les gaz, les valeurs du coefficient de compressibilité isotherme χ_T sont de l'ordre 10^{-5} . Elles sont donc plus importantes que celles des liquides. Considérons le cas du gaz parfait où la loi d'état est :

$$PV = nRT \quad (1.3)$$

n : quantité de matière en moles,

R : constante universelle des gaz parfaits,

T : température du gaz.

En fixant T et n , le produit PV de l'équation (1.3) devient constant. En dérivant l'équation (1.3), on obtient :

$$PdV + VdP = 0 \quad (1.4)$$

ou bien :

$$PdV = -VdP \quad (1.5)$$

ce qui nous donne :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (1.6)$$

Soit :

$$\chi_T = \frac{1}{P} \quad (\text{Pa}^{-1}). \quad (1.7)$$

Module d'élasticité cubique

Pour un fluide, seul le module d'élasticité cubique est significatif. C'est une mesure de la résistance d'un fluide à la compression.

Définition 1.2. (Module d'élasticité cubique)

Le module d'élasticité cubique est défini comme le rapport entre l'augmentation de pression ΔP et la diminution relative du volume V de fluide $\Delta V/V$ qui en résulte.

Il est généralement désigné par la lettre « K » ou la lettre « E »,

$$K = -V \left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right) \quad (1.8)$$

Comme on peut le constater, c'est l'inverse du coefficient de compressibilité (χ) défini précédemment. Le module d'élasticité est homogène à une pression et son unité dans le système international d'unités (en abrégé SI) est le pascal (Pa), mais en pratique on utilise plutôt un multiple du pascal, le MPa (mega pascal) ou le GPa (giga pascal).

1.1.9 Masse volumique, Poids volumique, Densité

La masse volumique

La masse volumique, comme son nom l'indique, c'est la masse par unité de volume. Elle représente le rapport de la masse sur le volume. Elle est notée ρ et son unité est le kg/m^3 .

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.9)$$

ρ : masse volumique (kg/m^3),

m : masse (kg),

V : volume (m^3).

TABLEAU 1.1 – Valeur de la masse volumique pour quelques liquides.

Liquides	Masse volumique ρ
mercure	13600
sirop de maïs	1380
glycérine	1260
eau de mer	1030
eau douce	1000
huile d'olive	920
térébenthine	870
essence	690

Exemple 1.1.1.

On pèse un liquide inconnu grâce à la technique de différence de pesée. On obtient une masse de 0,0252 kg. Le volume qui correspond à la masse mesurée nous est fourni par une mesure directe à l'aide d'un cylindre gradué. Le ménisque indique 18 ml. Quelle est la masse volumique de ce liquide ?

On a :
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{25,2 \times 10^{-3}}{18 \times 10^{-6}} = 1400 \text{ kg/m}^3.$$

En comparant la valeur de la masse volumique calculée avec celles fournies par le tableau, on constate qu'elle est proche de celle du sirop de maïs.

La mesure de la masse volumique

Il y a plusieurs façons de mesurer la masse volumique d'un liquide. Nous présenterons deux méthodes : le pycnomètre et le tube en U.

- Pycnomètre : le pycnomètre est une fiole jaugée de grande précision (voir figure 1.7). La mesure de la masse volumique se fait par une série de trois pesées successives.



FIG. 1.7 – Une fiole.

1. **Mesure de la masse volumique d'un liquide** : les trois mesures successives se font de la façon suivante (figure 1.8) :
 - a) la fiole remplie de liquide m_L + la masse de la fiole m_f ,

- b) la fiole remplie d'eau m_e + la masse de la fiole m_f ,
 c) la fiole vide et sèche m_f .

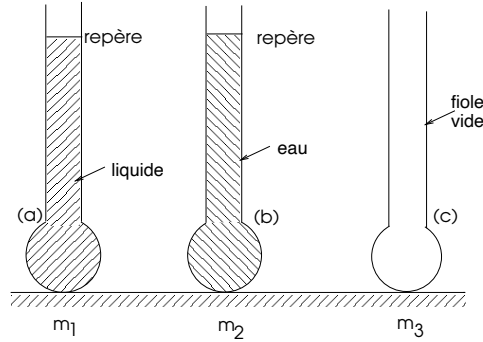


FIG. 1.8 – Les trois pesées successives.

Déterminons la masse volumique de l'échantillon. On a d'après la figure 1.8 :

$$m_1 = m_L + m_f, \quad (1.10)$$

$$m_2 = m_e + m_f, \quad (1.11)$$

$$m_3 = m_f. \quad (1.12)$$

En retranchant (1.12) de (1.10) et (1.12) de (1.11), on obtient :

$$m_1 - m_3 = m_L, \quad (1.13)$$

$$m_2 - m_3 = m_e. \quad (1.14)$$

En faisant le rapport de (1.13) sur (1.14), on obtient :

$$\frac{m_L}{m_e} = \frac{m_1 - m_3}{m_2 - m_3} \quad (1.15)$$

En remplaçant m_L par $\rho_L V_L$ et m_e par $\rho_e V_e$ et en tenant compte que $V_L = V_e$, on obtient :

$$\frac{\rho_L}{\rho_e} = \frac{m_1 - m_3}{m_2 - m_3} \quad (1.16)$$

en tenant compte du fait que $m_3 = m_f$, l'équation (1.16) peut s'écrire :

$$\rho_L = \rho_e \frac{m_1 - m_f}{m_2 - m_f}. \quad (1.17)$$

2. Mesure de la masse volumique d'un échantillon solide : les trois mesures successives se font de la façon suivante (voir figure 1.9) :

- pesée du liquide dans la fiole (m_1),
- pesée du liquide dans la fiole + un solide placé à côté (m_2),
- pesée du liquide dans la fiole + celle du solide placé à l'intérieur de la fiole et l'ajustement du fluide au niveau du repère (m_3)

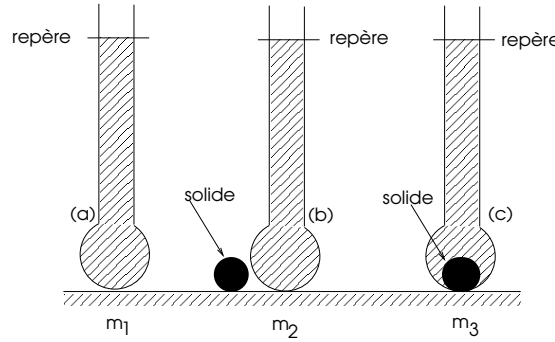


FIG. 1.9 – Les trois pesées successives.

Utilisons la figure 1.9. Appelons :

m_{li} : la masse initiale du liquide dans la fiole,

m_{lf} : la masse finale du liquide dans la fiole,

m_f : la masse de la fiole,

m_s : la masse du solide.

Écrivons :

$$m_1 = m_{li} + m_f, \quad (1.18)$$

$$m_2 = m_s + m_{li} + m_f, \quad (1.19)$$

$$m_3 = m_s + m_f + m_{lf}. \quad (1.20)$$

Si on retranche l'équation (1.18) de l'équation (1.19), on obtient :

$$m_2 - m_1 = m_s = \rho_s V_s. \quad (1.21)$$

Et si on retranche l'équation (1.20) de l'équation (1.19), on obtient :

$$m_2 - m_3 = m_{li} - m_{lf} = \rho_l V_s. \quad (1.22)$$

Le rapport de (1.21) sur (1.22), conduit à :

$$\frac{m_2 - m_1}{m_2 - m_3} = \frac{\rho_s}{\rho_l} \quad (1.23)$$

soit :

$$\rho_s = \rho_l \frac{m_2 - m_1}{m_2 - m_3}. \quad (1.24)$$

- Tube en U : c'est un tube qui contient deux liquides. On connaît la masse volumique de l'un (ρ) et on détermine celle de l'autre qu'on appellera (ρ_x). Le tube en U est placé dans le champ de la pesanteur (figure 1.10). Dans ce cas précis, on fera appel à la relation fondamentale de la statique des fluides (en fait l'hydrostatique des fluides) qu'on verra en détail un peu plus loin.

Nous avons $P_1 = P_3 = P_a$ et $P_2 = P_{2'}$. D'après la relation fondamentale de la statique des fluides, on peut écrire :

$$P_2 = P_1 + \rho_x g h. \quad (1.25)$$

$$P_{2'} = P_3 + \rho g h'. \quad (1.26)$$

Il faut bien noter que les deux niveaux 2 et 2' sont dans le liquide de masse volumique ρ et dans un même plan horizontal. En tenant compte des égalités écrites et des deux équations ci-dessus, on obtient :

$$\rho_x h = \rho h' \quad (1.27)$$

ou bien :

$$\rho_x = \rho \frac{h'}{h} \quad (1.28)$$

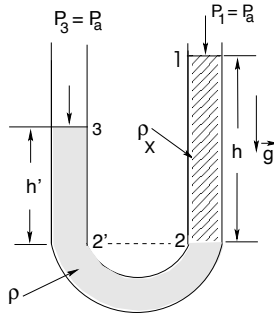


FIG. 1.10 – Détermination de la masse volumique ρ_x à l'aide du tube en U.

Le poids volumique

Comme son nom l'indique, c'est le poids par unité de volume. C'est le rapport du poids sur le volume. Il est noté ϖ et est donné en N/m^3 .

$$\varpi = \frac{F_g}{V} = \frac{mg}{V} = \frac{\rho V g}{V} = \rho g \quad (1.29)$$

avec :

F_g : le poids en N ,

ρ : la masse volumique en kg/m^3 ,

g : la gravité en m/s^2 ,

ϖ : le poids volumique en N/m^3 .

Le poids volumique pour l'eau est $9810 N/m^3$ et celui de l'air est $11,8 N/m^3$.

La densité

La densité d'un fluide quelconque, notée d , est le rapport de la masse volumique du fluide (ρ_x) sur celle du fluide de référence (ρ_{ref}), c'est-à-dire :

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho_x}{\rho_{ref}} \quad (1.30)$$

1. Pour les liquides et les solides : $d_{liquide} = \frac{\rho_{liquide}}{1000}$
et : $d_{solide} = \frac{\rho_{solide}}{1000}$
2. pour les gaz : $d_{gaz} = \frac{\rho_{gaz}}{\rho_a} = \frac{\rho_{gaz}}{1,205}$

où ρ_a est la masse volumique de l'air à $20^\circ C$.

- Dans le cas des liquides et des solides, la masse volumique de référence est celle de l'eau prise à $4^\circ C$. C'est à cette température qu'elle est maximale et égale à $999,95 kg/m^3$ qu'on arrondi à $1000 kg/m^3$. La masse volumique varie très peu avec la température et presque pas avec la pression.

- Pour les gaz, la masse volumique varie considérablement avec la température et la pression.

Pour le cas du gaz parfait, nous avons : $PV = nRT$ (1.31)

n : nombre de moles et R : constante universelle des gaz parfaits.

n peut être mis sous la forme suivante : $n = m/M$, où m est la masse de la substance donnée en grammes et M est la masse molaire donnée en grammes/mole.

L'équation (1.31) peut s'écrire : $PV = \frac{m}{M}RT = \frac{\rho V}{M}RT$ (1.32)

En simplifiant le volume V , on obtient : $P = \rho \frac{R}{M}T$ (1.33)

Le rapport R/M , noté r , est la constante spécifique du gaz considéré. Dans ce cas on peut écrire :

$$P = \rho rT \quad \text{à la température } T \text{ et la pression } P \quad (1.34)$$

$$P_0 = \rho_0 rT_0 \quad \text{à la température } T_0 \text{ et la pression } P_0 \quad (1.35)$$

La combinaison de ces deux relations donne : $\rho = \rho_0 \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T}$ (1.36)

ρ : la masse volumique à la pression P et à la température T .

ρ_0 : la masse volumique dans les conditions de références P_0 et T_0 .

La densité relative

Elle est définie comme la masse volumique d'une substance par rapport à la masse volumique d'une autre substance, c'est-à-dire :

$$d_{r(1/2)} = \frac{\text{masse volumique du fluide 1}}{\text{masse volumique d'un fluide 2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (1.37)$$

1.1.10 Forces de cohésion et forces d'adhésion

La notion de forces de cohésion et d'adhésion est introduite ici du fait de son utilité dans l'explication d'un certain nombre de phénomènes.

Forces de cohésion

On peut définir les forces de cohésion comme des forces d'interaction entre des molécules semblables (ex : eau - eau). Les forces de cohésion qui retiennent les molécules d'un liquide ou d'un solide sont en partie d'origine électrique. Les forces de cohésion des solides sont très importantes car les molécules sont très proches les unes des autres alors que pour les liquides où les molécules ne sont pas très serrées les unes des autres, les forces de cohésion sont relativement faibles et le sont encore moins pour les gaz.

Les forces d'adhésion

Les forces d'adhésion sont définies comme des forces d'interaction entre des molécules différentes. À la surface commune de deux substances différentes, des molécules différentes s'attirent. Par exemple, les forces entre les molécules d'eau et les molécules du verre contenant l'eau sont appelées forces adhésives. C'est également la force d'adhésion entre les molécules de graisse et celles de la main que nous devons vaincre lorsque nous nous essuyons la main.

Les différences entre les forces de cohésion et les forces d'adhésion

1. Cohésion

- Au sein d'un même liquide, la force d'attraction des molécules s'appelle force cohésion.
- La contrainte de cisaillement est générée dans le fluide à cause de la propriété de cohésion.

- Si la force de cohésion est supérieure à la force d'adhésion, le liquide est considéré comme non mouillant.

2. Adhésion

- La force d'attraction entre les molécules de deux substances différentes (molécules non semblables) est appelée force d'adhésion.
- Le fluide adhère à différentes surfaces ; ceci dépend des propriétés physiques des deux matières en contact. Ainsi, par exemple : l'adhésion se produit lorsqu'un ruban dont la surface chargée de colle est mis en contact avec un substrat chargé de manière opposée.
- Si la force d'adhésion est supérieure à la force de cohésion, le liquide est considéré comme mouillant.

1.2 Exercices

Exercice 1.1.

Soit un réservoir cylindrique constitué de deux cylindres de section circulaire de diamètre d et D . Un piston ferme l'ouverture du petit cylindre. A l'instant initial, aucune charge n'est appliquée sur le piston et on suppose que le piston est immobile (figure 1.11(a)). Le réservoir contient un liquide de densité $d_l = 0,9$ et le coefficient de compressibilité est $\chi = 0,588 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ (figure 1.11). A un instant ultérieur on applique une charge de 10 kN sur le piston. Le piston s'enfonce et est à nouveau immobile (figure 1.11(b)). Déterminer :

1. le déplacement h ;
2. la masse volumique ρ du liquide après l'application de la charge.

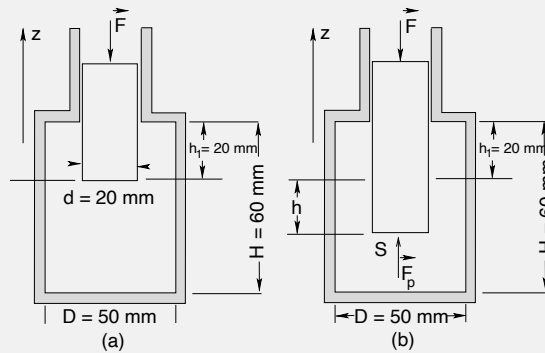


FIG. 1.11 – Exemple d'application du module de compressibilité.

Solution 1.1.

1. Calculons tout d'abord l'augmentation de pression exercée par le fluide sur la base inférieure du piston, augmentation due à la présence de la charge $\vec{F}$. D'après la figure 1.11, on a :

$$\vec{F}_p + \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

où $\vec{F}_p$ est la force du liquide sur la surface S de la face inférieure du piston.

En projection sur l'axe z , on a :

$$F_p - F = 0 \quad (2)$$

ou bien :

$$F_p = F. \quad (3)$$

Or $F_p = PS$, donc :

$$P = \frac{F_p}{S} = \frac{4F_p}{\pi d^2} \quad (4)$$

$$\text{soit : } P = \frac{4 \times 10 \times 10^3}{3,14 \times (20 \times 10^{-3})^2} = \frac{4 \times 10^4}{3,14 \times 4 \times 10^{-4}} \simeq 31,85 \times 10^6 \text{ N/m}^2.$$

Calculons à présent le volume initial V_0 du liquide dans le cylindre. Comme on peut le remarquer à travers la figure, ce volume est égal à celui du cylindre moins celui de la partie du piston immergé dans le fluide. On a donc :

$$V_0 = \frac{\pi D^2}{4} H - \frac{\pi d^2}{4} h_1 \quad (5)$$

ou bien :

$$V_0 = \frac{\pi}{4} (D^2 H - d^2 h_1). \quad (6)$$

$$\text{A.N : } V_0 = \frac{3,14}{4} \times (0,05^2 \times 0,06 - 0,02^2 \times 0,02) \simeq 111,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Calculons à présent la variation du volume due au déplacement du piston à l'intérieur du fluide. Pour cela on doit utiliser le coefficient de compressibilité χ du fluide. On a :

$$\chi = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta P} \quad (7)$$

ou bien :

$$\Delta V = -\chi V_0 \Delta P. \quad (8)$$

$$\Delta V = -0,588 \times 10^{-9} \times 111,5 \times 10^{-6} \times 31,85 \times 10^6 \simeq -2,0882 \times 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Calculons à présent h , on a :

$$|\Delta V| = Sh \quad (9)$$

ou bien :

$$h = \frac{|\Delta V|}{S}. \quad (10)$$

$$\text{A.N : } h = \frac{4|\Delta V|}{\pi d^2} = \frac{4 \times 2,0882 \times 10^{-6}}{3,14 \times (20 \times 10^{-3})^2} \simeq 0,6653 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

La charge F est très grande, ce qui induit un déplacement h non négligeable. Soit : $h \simeq 6,65 \text{ mm}$.

2. Calculons la masse volumique ρ du liquide après l'application de la charge. Pour cela, calculons la masse du liquide. Celle-ci est la même avant et après la compression du liquide car il n'y a que le volume et la masse volumique qui peuvent changer. On a donc :

$$m_0 = \rho_0 V_0 = \rho_e d_l V_0 \quad (11)$$

$$m_0 = 0,9 \times 10^3 \times 111,5 \times 10^{-6} = 100,3 \times 10^{-3} \text{ kg} = 100,3 \text{ g}.$$

Le volume du liquide après la compression est :

$$V_f = V_0 - |\Delta V| = 111,5 \times 10^{-6} - 2,0882 \times 10^{-6} = 109,411 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

et la masse volumique est :

$$\rho_0 = \frac{m_0}{V_f} = \frac{100,3 \times 10^{-3}}{109,411 \times 10^{-6}} \simeq 0,917 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 = 917 \text{ kg/m}^3.$$

Exercice 1.2.

Un tube en U contient du mercure sur une hauteur de quelques centimètres. On verse dans l'une des branches un mélange d'eau - alcool éthylique qui forme une colonne de liquide

de hauteur $h_1 = 30 \text{ cm}$. Dans l'autre branche, on verse de l'eau pure de masse volumique 1000 kg/m^3 , jusqu'à ce que les deux surfaces du mercure reviennent dans un même plan horizontal (figure 1.12). On mesure alors la hauteur de la colonne d'eau $h_2 = 24 \text{ cm}$.

1. Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique pour les trois fluides.
2. En déduire la masse volumique ρ_x du mélange eau – alcool éthylique.

Solution 1.2.

D'après la figure 1.12, on a : $P_1 = P_a$ et $P_4 = P_a$.

1. En utilisant la relation fondamentale de l'hydrostatique (elle sera établie dans le chapitre 6, paragraphe 6.5), on peut écrire :

$$P_3 = P_4 + \rho_e g h_2$$

$$P_2 = P_1 + \rho_x g h_1 \quad \text{et,}$$

$$P_2 = P_3 \quad \text{les points 2 et 3 étant dans le même plan horizontal,}$$

ρ_x est la masse volumique du mélange eau-alcool.

Les relations ci-dessus peuvent encore s'écrire :

$$P_3 = P_a + \rho_e g h_2. \quad (1)$$

$$P_2 = P_a + \rho_x g h_1. \quad (2)$$

Sachant que $P_2 = P_3$ et avec les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$\rho_x = \rho_e \frac{h_2}{h_1}. \quad (3)$$

A.N :
$$\rho_x = \rho_e \frac{h_2}{h_1} = 10^3 \times \frac{24}{30} = 0,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 = 800 \text{ kg/m}^3.$$

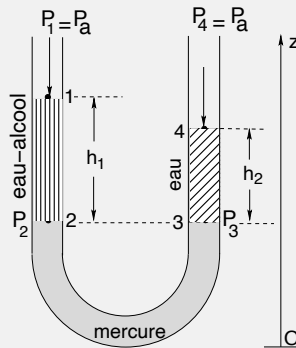


FIG. 1.12 – Détermination de la masse volumique du mélange eau-alcool ρ_x à l'aide du tube en U.

Exercice 1.3.

Trouver la hauteur de la surface libre si le volume $V_e = 0,02 \text{ m}^3$ est rempli d'eau dans un réservoir de forme conique de hauteur $h = 0,5 \text{ m}$ et de rayon à la base de $R = 0,25 \text{ m}$ (voir la figure 1.13). L'eau occupe le volume du cône entre les deux disques de rayon R et r_0 . Quelle quantité d'eau supplémentaire est nécessaire pour remplir entièrement le réservoir ?

et si ce réservoir est rempli d'huile dont la masse est $30,5 \text{ kg}$, quelle est la masse volumique de cette huile ?

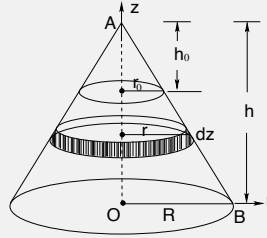


FIG. 1.13 – Le réservoir conique.

Solution 1.3.

1. Calculons la quantité d'eau supplémentaire nécessaire pour remplir entièrement le réservoir. Calculons d'abord le volume d'un cône.

D'après la figure 1.13, on a : $dV = S(z) dz$ c'est-à-dire $dV = \pi r^2 dz$. Le volume V est donc égal à :

$$V = \pi \int r^2 dz. \quad (1)$$

Déterminons l'équation de la droite AB . On a $z = ar + b$ et les points que nous devons utiliser sont A et B dont les coordonnées dans les axes $(O;r,z)$ sont $(0,h)$ pour le point A et $(R,0)$ pour le point B . Donc :

pour le point A on a : $h = a \times 0 + b$ (2)

ce qui donne $b = h$. Pour le point B , on a : $0 = a \times R + b$ (3)

ce qui donne $a = -\frac{b}{R}$ avec $b = h$. Soit finalement : $z = -\frac{h}{R}r + h$ (4)

et $dz = -\frac{h}{R}dr$. En utilisant la formule (1), on obtient le volume V_R du cône dont le rayon de la base est R :

$$V_R = -\pi \int_R^0 r^2 \frac{h}{R} dr \quad (5)$$

ou bien :
$$V_R = -\frac{\pi h}{R} \int_R^0 r^2 dr = -\frac{\pi h}{R} \left. \frac{r^3}{3} \right|_R^0.$$

Finalement :
$$V_R = \frac{\pi h R^2}{3}. \quad (6)$$

Pour le petit cône de rayon r_0 , on a :
$$V_{r_0} = \frac{\pi h_0 r_0^2}{3}. \quad (7)$$

Le volume d'eau dans le cône sera donc égal à :

$$V_e = V_R - V_{r_0} = \frac{\pi h R^2}{3} - \frac{\pi h_0 r_0^2}{3} \quad (8)$$

ou bien :
$$V_e = \frac{\pi}{3} (h R^2 - h_0 r_0^2). \quad (9)$$

De l'équation ci-dessus, tirons l'expression $h_0 r_0^2$. On a :

$$h_0 r_0^2 = h R^2 - \frac{3 V_e}{\pi} \quad (11)$$

d'où :

$$h_0 = h \frac{R^2}{r_0^2} - \frac{3V_e}{r_0^2 \pi}. \quad (12)$$

En utilisant les propriétés des triangles semblables, on peut écrire :

$$r_0 = R \frac{h_0}{h}, \quad (13)$$

quantité qui élevée au carrée s'écrit : $r_0^2 = R^2 \frac{h_0^2}{h^2}$. (14)

Remplaçant r_0^2 par son expression dans l'équation (12), on obtient :

$$h_0 = \frac{h^3}{h_0^2} - \frac{3V_e h^2}{\pi R^2 h_0^2} \quad (15)$$

ou bien :

$$h_0^3 = h^3 - \frac{3V_e h^2}{\pi R^2}. \quad (16)$$

Finalement :

$$h_0 = h \left(1 - \frac{3V_e}{\pi h R^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (17)$$

A.N :
$$h_0 = 0,5 \times \left(1 - \frac{3 \times 0,02}{3,14 \times 0,5 \times 0,25^2} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 0,365 \text{ m}.$$

La hauteur de l'eau notée H dans le récipient est : $H = h - h_0 = 0,5 - 0,365 = 0,135 \text{ m}$.

Nous pouvons aussi, à partir de l'équation (13) déduire la valeur de r_0 :

$$r_0 = 0,25 \times \frac{0,365}{0,5} = 0,1825 \text{ m}.$$

- a) Calculons à présent le volume d'eau supplémentaire notée V_{r_0} qu'il faut ajouter pour remplir complètement le réservoir. On a :

$$V_{r_0} = \frac{\pi h_0 r_0^2}{3} = \frac{3,14 \times 0,365 \times 0,1825^2}{3} \simeq 0,0127 \text{ m}^3.$$

- b) Si ce réservoir est rempli d'huile et contient 30,5 kg d'huile, calculons la masse volumique ρ_h de cette huile. Le volume total de l'huile est :

$$V_h = 0,02 + 0,0127 = 0,0327 \text{ m}^3$$

et la masse volumique est :
$$\rho_h = \frac{m}{V_h} = \frac{30,5}{0,0327} \simeq 932,72 \text{ kg/m}^3.$$

Chapitre 2

La viscosité

La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information.

Albert Einstein

2.1 Généralités

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide. Autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance du fluide à son mouvement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. En effet, deux couches adjacentes d'un fluide résistant à leur mouvement l'une par rapport à l'autre. Cette résistance est due à la cohésion entre les particules de fluide. Par conséquent, la cause fondamentale de la viscosité du fluide est la cohésion entre ses molécules.

Considérons deux exemples concrets pour comprendre cette notion de viscosité de manière plus pratique. Dans le champ de la pesanteur, prenons par exemple une surface plane et légèrement inclinée sur laquelle on verse une fois une petite quantité de miel et une seconde fois de l'eau. On observe que le miel à une vitesse beaucoup plus lente que celle de l'eau car sa viscosité est beaucoup plus importante ; alors, cela crée plus de résistance à l'écoulement. Dans le deuxième exemple, considérons deux plaques planes, parallèles et infinies, l'une fixe (1) et l'autre mobile (2) à la distance e qui représente aussi l'épaisseur du lubrifiant, comme illustré sur la figure 2.1. Il est généralement admis qu'en raison de l'adhérence (forces d'adhésion) entre solide et fluide, la vitesse de la couche de fluide en contact avec la surface solide immobile devient nulle : cette condition est appelée condition de non glissement.

2.1.1 Son origine

A l'échelle microscopique, dans le cas des liquides, on peut expliquer que la viscosité est engendrée par les forces de cohésion entre les molécules, qui sont des forces d'interaction entre des molécules semblables, ex : eau-eau et, par les collisions moléculaires dues également à des forces d'interaction moléculaire, dans le cas des gaz.

2.1.2 Loi de Newton de viscosité

Les figures 2.1 et 2.2 montrent deux profils de vitesse, linéaire et parabolique . La figure 2.1 montre une modélisation théorique, et la figure 2.2, un profil de vitesse obtenu expérimentalement. Dans notre étude, nous allons utiliser la figure 2.1 qui représente deux plaques planes parallèles (P_1) mobile avec une vitesse constante U sous l'action d'une force F et (P_2) fixe. Entre les deux plaques distante de e , se trouve un fluide visqueux.

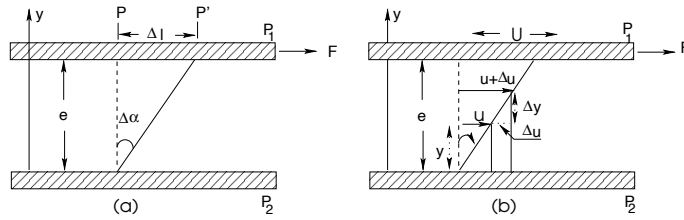


FIG. 2.1 – Profil linéaire de vitesse le long d'une plaque plane.

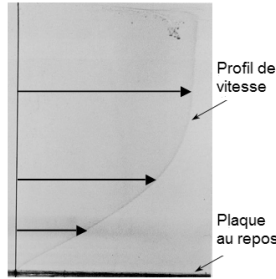


FIG. 2.2 – Visualisation d'un profil parabolique de vitesse le long d'une plaque plane.

Le profil des vitesses linéaire montré sur la figure 2.1 représente le mouvement des couches de fluide les unes sur les autres. A l'instant $t = 0$, les deux plaques sont au repos. Sous l'action d'une force constante F la plaque P_1 se déplace avec la vitesse constante U . Pendant l'intervalle de temps Δt le point P se déplace en P' . D'après la figure 2.1(a), on a :

$$\tan(\Delta\alpha) = \frac{PP'}{e} = \frac{\Delta l}{e}. \quad (2.1)$$

On considère que Δt est un très court intervalle de temps, si bien que $\Delta l = U \Delta t$ est petit par rapport à e . Par suite $\tan(\Delta\alpha)$ peut être remplacé par $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha \simeq \frac{\Delta l}{e} \quad (2.2)$$

$$\text{or } \Delta l = U \Delta t, \text{ l'équation (2.2) s'écrit : } \Delta\alpha \approx \frac{U \Delta t}{e}. \quad (2.3)$$

$$\text{Le taux de déformation est donc égal à : } \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{U}{e}. \quad (2.4)$$

D'un autre côté, d'après la figure 2.1(b), et en utilisant les propriétés des triangles semblables, on peut écrire :

$$\frac{U}{e} = \frac{\Delta u}{\Delta y} \quad (2.5)$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{U}{e}. \quad (2.6)$$

Par conséquent, dans tout fluide soumis à une déformation par cisaillement qui représente une déformation angulaire d'un objet sans changement de volume de celui-ci (voir figure 2.3), le gradient de la déformation de cisaillement $\Delta\alpha/\Delta t$ est égal au gradient de vitesse $\Delta u/\Delta y$. Soit S la zone de contact du fluide avec la plaque supérieure sur laquelle la force F est appliquée. Aussi la résistance au cisaillement générée dans le fluide sera F/S . Comme la force est constante, la contrainte de cisaillement restera également constante.

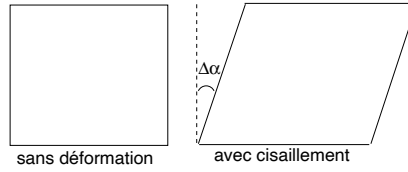


FIG. 2.3 – Déformation sans variation de volume.

Newton¹, à travers son expérience, postule que la force F est proportionnelle à la surface S de la plaque et au taux de déformation $\Delta\alpha/\Delta t$. c'est-à-dire :

$$F \propto S \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Comme conséquence, la force F (notée F_μ) peut s'écrire :

$$F_\mu = \mu S \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad (2.8)$$

ou bien, d'après l'équation (2.6) :

$$F_\mu = \mu S \frac{\Delta u}{\Delta y}. \quad (2.9)$$

Le coefficient de proportionnalité μ s'appelle viscosité dynamique. Le terme de viscosité absolue est parfois utilisé. L'unité est le kg/ms ou Poiseuille² (Pl).

L'équation (2.9) est souvent donnée en terme de contrainte de cisaillement.

$$\tau = \frac{F_\mu}{S} = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} \quad (2.10)$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) représente la loi de Newton de viscosité. Les fluides qui obéissent à cette loi s'appellent fluides newtoniens d'où ils tirent leur nom. Les fluides les plus courants sont newtoniens, y compris l'air et l'eau sur des gammes très larges de pressions et de températures. Les fluides qui n'obéissent pas à cette loi sont appelés fluides non newtoniens. Il existe une grande variété de fluides non newtoniens (par exemple les fluides viscoélastiques) qui obéissent à des relations plus compliquées entre la contrainte de cisaillement (τ) et le gradient de vitesse (du/dy). Les relations peuvent être non linéaires, similaires à la déformation plastique des solides. De tels fluides sont couramment rencontrés dans les industries des matières plastiques et des produits chimiques.

TABEAU 2.1 – Viscosité μ ($Pa \cdot s$) de quelques fluides à 20°C et 1 atmosphère.

Fluides	Viscosité dynamique μ
Eau	$1,00 \times 10^{-3}$
Eau de mer	$1,07 \times 10^{-3}$
Mercure	$1,56 \times 10^{-3}$
Kérosène	$1,92 \times 10^{-3}$
Air	$1,80 \times 10^{-5}$
Dioxyde de Carbone	$1,48 \times 10^{-5}$

1. Isaac Newton (1642-1727) est un physicien, philosophe, astronome, et mathématicien anglais.

2. Jean-Léonard-Marie Poiseuille (1797-1869), de nationalité française, mécanicien des fluides, a étudié à l'école Polytechnique de Paris. Il est connu pour sa loi de Poiseuille.

REMARQUES

1. La dimension de la viscosité dynamique μ , en utilisant les grandeurs de base F , L et T est :

$$[\mu] = [\tau] / \left[\frac{du}{dy} \right] = \frac{[F]}{[S]} / \left[\frac{du}{dy} \right] = FL^{-2}/T^{-1} = FL^{-2}T$$

ou bien en utilisant comme grandeurs de base M , L et T est :

$$[\mu] = [\tau] / \left[\frac{du}{dy} \right] = \frac{[F]}{[S]} / \left[\frac{du}{dy} \right] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} / \frac{LT^{-1}}{L} = ML^{-1}T^{-1}.$$

Comme on peut le remarquer ci-dessus, la dimension de μ peut être exprimée soit $FL^{-2}T$ en prenant comme grandeurs de base F , L et T soit $ML^{-1}T^{-1}$ en prenant comme grandeurs de base M , L et T . Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est donc Ns/m^2 ou kg/ms .

2. L'unité Ns/m^2 peut s'écrire : $Ns/m^2 = (N/m^2) s = Pas$.

On peut donc utiliser le pascal seconde (Pas) ou le poiseuille (Pl) sachant que :

$$1 Pl = 1 Pas = 1 kg/ms = 1 Ns/m^2.$$

3. Dans le système (C.G.S), l'unité de la viscosité est la poise. Elle est définie comme la viscosité d'un fluide pour lequel une contrainte tangentielle d'une $dyne/cm^2$ permet de maintenir une vitesse de $1 cm/s$ entre deux plaques parallèles séparées par $1 cm$ de ce liquide. Une poise vaut une $1 dyne s/cm^2$ ou $1 g/cm.s$. Elle est donc égale à $1/10$ de poiseuille c'est-à-dire $0,1 Pas$ telle que :

$$1 Pas = 10 poises.$$

2.1.3 Variation de la viscosité dynamique avec la température

La viscosité des liquides et des gaz varient avec la température mais différemment à cause de leur nature qui est différente.

- Pour les liquides, la viscosité dynamique varie très peu avec la pression et cette variation peut être négligée ; mais elle diminue avec l'augmentation de la température (les huiles pour moteurs perdent leur efficacité à haute température). La variation avec la température est donnée par :

$$\mu = Ae^{B/T} \quad (2.12)$$

où T est la température absolue et A et B sont des constantes.

- Pour les gaz, la viscosité dynamique augmente avec la température à cause des chocs croissants entre les molécules occasionnant des frottements plus importants. Cette variation avec la température est donnée par la formule proposée par Sutherland

$$\mu = \frac{bT^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{a}{T}} \quad (2.13)$$

où a et b sont des constantes pour un gaz donné.

2.1.4 La viscosité cinématique

Souvent apparaît le rapport μ/ρ dans les problèmes de mécanique des fluides. Pour cette raison, il a été introduit le paramètre ν appelé viscosité cinématique. Elle est définie comme l'étude du mouvement sans tenir compte des causes de celui-ci, et ne concerne donc que les longueurs et les intervalles de temps. Elle peut aussi être comprise comme la surface couverte par un fluide pendant l'unité de temps sous l'influence de la gravité (durant une seconde). Elle s'exprime en m^2/s et elle est donnée par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.14)$$

On utilise aussi une unité ancienne, le Stokes tel que : $1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. La valeur de la viscosité cinématique ν à 20°C et 1 atmosphère pour l'eau est $1,01 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ et celle de l'air est $1,51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Exemple 2.1.1.

Soit un fluide contenu dans un réservoir, dont le diamètre est de $2,5 \text{ m}$ et la hauteur de $4,5 \text{ m}$. Le poids total du fluide est de 320 kN et la viscosité dynamique μ_f est de $90 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Si le poids spécifique de l'eau est égal à 9810 N/m^3 et sa masse volumique ρ_e égale à 1000 kg/m^3 , déterminer : sa densité, sa masse volumique et, sa viscosité cinématique.

1. Pour calculer la densité du fluide, nous devons connaître le volume du fluide contenu dans le conteneur. Si h est la hauteur de ce dernier, on a donc :

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \times h = \frac{\pi \times 2,5^2}{4} \times 4,5 = 22,09 \text{ m}^3$$

et le poids volumique est donnée par : $\varpi_f = \frac{F_g}{V} = \frac{320 \times 10^3}{22,09} = 14,49 \times 10^3 \text{ N/m}^3$.

La densité du fluide est donnée par : $d_f = \frac{\varpi_f}{\varpi_e} = \frac{14,49 \times 10^3}{9,81 \times 10^3} = 1,48$

avec ϖ_e est le poids volumique de l'eau égal à $\rho_e g$.

2. La masse volumique du fluide est donnée par : $\rho_f = d_f \rho_e = 1,48 \times 10^3 = 1480 \text{ kg/m}^3$.
3. La viscosité cinématique du fluide est donnée par :

$$\nu_f = \frac{\mu_f}{\rho_f} = \frac{90 \times 10^{-5}}{1480} = 6,081 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}.$$

2.2 Exercices

Exercice 2.1.

Quand une force de 3 mN est appliquée à une paroi plane (figure 2.4), la ligne AB de longueur $h = 4 \text{ mm}$, dans le liquide subit une rotation d'un angle $\Delta\theta$ avec la vitesse angulaire de $\dot{\theta} = 0,2 \text{ rad/s}$. Si la surface de la paroi en contact avec le liquide est égale à $0,6 \text{ m}^2$, déterminer la valeur approximative de la viscosité du liquide.

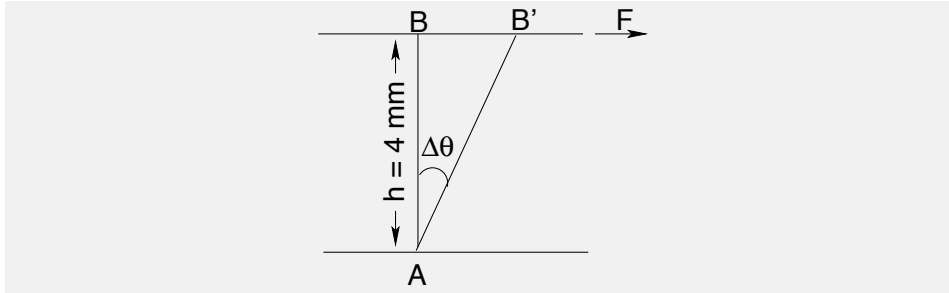


FIG. 2.4 – Détermination de la viscosité d'un fluide.

Solution 2.1.

Sous l'action de la force F , le point B se déplace en B' tel que :

$$\tan(\Delta\theta) = \frac{BB'}{h} \approx \Delta\theta \quad (1)$$

ce qui donne :

$$BB' \approx h\Delta\theta. \quad (2)$$

Le point B , sous l'action de la force F , se déplace avec la vitesse u pendant l'intervalle Δt au point B' tel que :

$$BB' = u\Delta t. \quad (3)$$

L'égalité des équations (1) et (2) donne :

$$h\Delta\theta = u\Delta t \quad (4)$$

ou bien :

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{u}{h} \quad (5)$$

ou bien :

$$\dot{\theta} = \frac{u}{h} \quad (6)$$

formule à partir de laquelle, on calcule la vitesse u telle que : $u = \dot{\theta}h$ (7)

soit : $u = 0,2 \times 4 \times 10^{-3} = 0,8 \times 10^{-3} \text{ m/s}$.

Sachant que :

$$\tau = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} \quad (8)$$

relation à partir de laquelle, on tire la valeur de la viscosité dynamique μ ,

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{\Delta u}{\Delta y}}. \quad (9)$$

$$\text{A.N : } \mu = \frac{3 \times 10^{-3}}{0,6} \bigg/ \frac{0,8 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} = \frac{3 \times 10^{-3}}{0,6} \times \frac{4 \times 10^{-3}}{0,8 \times 10^{-3}} = 0,025 \text{ Pa.s.}$$

Alternativement :

$$\tau = \mu \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (10)$$

d'où l'on tire l'expression de μ tel que : $\mu = \tau \bigg/ \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. (11)

$$\text{A.N : } \mu = \frac{3 \times 10^{-3}}{0,6 \times 0,2} = \frac{3 \times 10^{-3}}{0,12} = 0,025 \text{ Pa.}$$

Exercice 2.2.

La plaque de $0,15 \text{ m}$ de large, dans la direction perpendiculaire à la figure, passe entre deux couches, A et B, d'huile ayant une viscosité $\mu = 0,04 \text{ N.s/m}^2$ (figure 2.5). Déterminer la

force F requise pour déplacer la plaque à une vitesse constante de $6 \times 10^{-3} \text{ m/s}$. Pour ce faire, négliger les frottements sur les extrémités des supports et supposer que le profil de vitesse à travers chaque couche est linéaire.

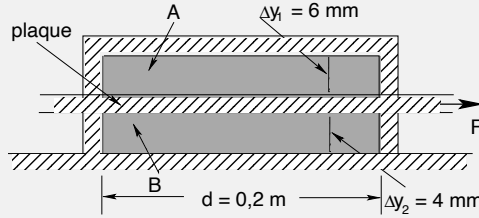


FIG. 2.5 – Plaque située entre deux couches d'huile A et B.

Solution 2.2.

L'huile est un fluide newtonien. L'équilibre des forces suivant l'axe des x est montré sur la figure 2.6.

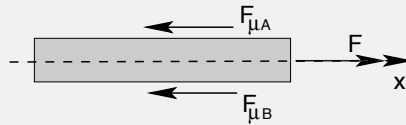


FIG. 2.6 – Plaque située entre deux couches d'huile A et B.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{\mu A} + \vec{F}_{\mu B} = \vec{0}. \quad (2)$$

$$\text{En projetant sur l'axe des } x, \text{ on obtient : } F - F_{\mu A} - F_{\mu B} = 0 \quad (3)$$

$$\text{ou bien : } F = F_{\mu A} + F_{\mu B} \quad (4)$$

$$\text{avec : } F_{\mu A} = \mu S \frac{\Delta u}{\Delta y_1} \text{ et } F_{\mu B} = \mu S \frac{\Delta u}{\Delta y_2}. \quad (5)$$

La force requise pour déplacer la plaque avec une vitesse de $6 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ est :

$$F = \mu S \frac{\Delta u}{\Delta y_1} + \mu S \frac{\Delta u}{\Delta y_2}. \quad (6)$$

$$F = 0,04 \times 0,15 \times 0,2 \times \frac{6 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-3}} + 0,04 \times 0,15 \times 0,2 \times \frac{6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}}$$

$$= 0,0009 + 0,00045 = 0,00135 \text{ N} = 1,35 \text{ mN}.$$

REMARQUE

La force F est indépendante de l'épaisseur de la plaque.

Exercice 2.3.

Même exercice que précédemment avec les mêmes données sauf la viscosité μ . La viscosité

de la couche A est $\mu_A = 0,03 \text{ N s/m}^2$ et celle de B est $\mu_B = 0,01 \text{ N s/m}^2$. Comme précédemment, négliger les frottements sur les extrémités des supports et supposer que le profil de vitesse à travers chaque couche est linéaire.

Solution 2.3.

La force requise pour déplacer la plaque avec une vitesse $u = 6 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ est :

$$F = \mu_A S \frac{\Delta u}{\Delta y_1} + \mu_B S \frac{\Delta u}{\Delta y_2} \text{ avec } \Delta u = u - 0.$$

$$F = 0,03 \times 0,15 \times 0,2 \times \frac{6 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-3}} + 0,01 \times 0,15 \times 0,2 \times \frac{6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} = 0,003 \text{ N} = 3 \text{ mN}.$$

Exercice 2.4.

Une plaque métallique carrée de côté $a = 1,8 \text{ m}$ et d'épaisseur $e = 1,8 \text{ mm}$, pesant 60 N , doit être soulevée à travers un intervalle vertical de 30 mm et d'étendue infinie (voir figure 2.7). L'huile dans l'intervalle a une masse volumique $\rho_h = 950 \text{ kg/m}^3$ et une viscosité de 3 N s/m^2 . Si la plaque métallique doit être levée à une vitesse constante $u = 0,12 \text{ m/s}$, trouver la force et la puissance requises. Le profil des vitesses dans l'huile est supposé linéaire.

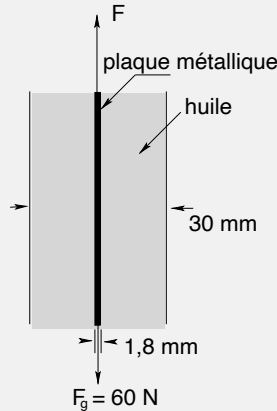


FIG. 2.7 – Plaque métallique soulevée verticalement.

Solution 2.4.

Dans cet exercice, nous nous proposons de calculer la force $\vec{F}$ et la puissance requise pour soulever la plaque métallique à la vitesse u .

Calculons la résultante des forces de frottement F_μ qui résiste au mouvement d'ascension de la plaque métallique. Pour cela, on utilisera la loi de Newton, on a :

$$f_\mu = \mu S \frac{\Delta u}{\Delta y}. \quad (1)$$

La force de frottement f_μ est la résultante des forces de frottement sur un côté de la plaque.

La résultante totale pour les deux côtés en contact avec l'huile est :

$$F_\mu = f_\mu + f_\mu = 2f_\mu \quad (2)$$

c'est-à-dire :

$$F_\mu = 2\mu S \frac{\Delta u}{\Delta y}. \quad (3)$$

Le nombre 2 apparaît du fait que les deux faces de la plaque métallique sont en contact avec l'huile comme le montre la figure 2.8, avec F_μ la résultante des forces de frottement et $S = a^2$ la surface de la plaque métallique. Soit :

$$F_\mu = 2\mu a^2 \frac{\Delta u}{\Delta y} \quad (4)$$

d'après la figure 2.8, on a :

$$\vec{F} + \vec{F}_\mu + \vec{F}_g = \vec{0}. \quad (5)$$

La projection suivant l'axe Oz , nous donne :

$$F - F_\mu - F_g = 0 \quad (6)$$

ou bien :

$$F = F_\mu + F_g \quad (7)$$

soit :

$$F = 2\mu a^2 \frac{\Delta u}{\Delta y} + F_g. \quad (8)$$

On a : $\Delta y = \frac{30 - 1,8}{2} = 14,1 \text{ mm}$ (voir figure 2.8) et $S = a^2 = 1,8^2 = 3,24 \text{ m}^2$.

$$F = 2 \times 3 \times 3,24 \times \frac{0,12}{0,0141} + 60 = 165,45 + 60 \simeq 225,45 \text{ N}.$$

La puissance en watts requise est donnée par la formule usuelle $\dot{W} = Fu$, soit :

$$\dot{W} = Fu = 225,45 \times 0,12 \simeq 27,054 \text{ watts}.$$

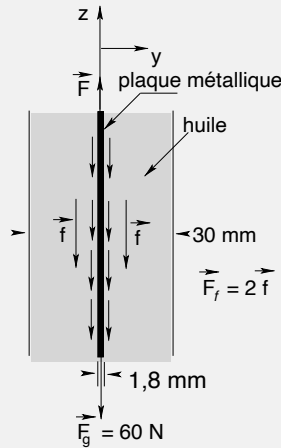


FIG. 2.8 – Bilan des forces s'exerçant sur la plaque métallique carrée.

Exercice 2.5.

Dans cet exercice le profil des vitesses sur une plaque est parabolique (voir figure 2.9) et l'épaisseur de la couche de fluide est de 20 cm. On fait l'hypothèse que pour $y = h$, la vitesse du fluide atteint sa valeur maximum.

1. Déterminer l'équation du profil des vitesses et,

2. calculer le gradient des vitesses et la contrainte de cisaillement à une distance de 0, 10, et 20 cm de la plaque si la viscosité du fluide est égale à 8,5 poises.

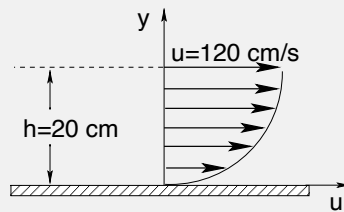


FIG. 2.9 – Profil parabolique des vitesses.

Solution 2.5.

1. Déterminons l'équation de répartition des vitesses. Le profil étant parabolique, l'équation a la forme suivante :

$$u = ay^2 + by + c. \quad (1)$$

On a trois inconnues à déterminer a , b et c . Il faut donc trois équations. En effet, pour cela il faut trois conditions aux limites.

- a) $y = 0, u = 0$,
- b) $y = h, u = U_{max} = 120 \text{ cm/s}$,
- c) $y = h, u$ est maximum égale à U_{max} , et la dérivée du/dy est nulle, soit $\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = 0$,

avec :

$$\frac{du}{dy} = 2ay + b. \quad (2)$$

- i. La première condition donne : $c = 0$,
- ii. la seconde condition donne : $U_{max} = ah^2 + bh$, (3)
- iii. la troisième condition donne : $0 = 2ah + b$. (4)

La résolution des équations (3) et (4) donne :

$$a = -\frac{U_{max}}{h^2} \quad (5)$$

et :

$$b = \frac{2U_{max}}{h}. \quad (6)$$

En remplaçant a , b et c par leur valeurs, l'équation du profil des vitesse devient :

$$u = \frac{2U_{max}}{h} \left(y - \frac{y^2}{2h} \right). \quad (7)$$

En calculant les valeurs de a et b , l'équation ci-dessus peut-être écrite comme suit :

$$u = -0,3y^2 + 12y \quad (8)$$

et :

$$\frac{du}{dy} = \frac{2U_{max}}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right). \quad (9)$$

Calcul du gradient de vitesses et la contrainte de cisaillement à une distance de 0, 10, et 20 cm. Gradient des vitesses et contrainte de cisaillement :

a) $\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = 12 \text{ s}^{-1}$ et $\tau = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = 0,85 \times 12 = 10,2 \text{ N/m}^2$,

- b) $\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\frac{h}{2}} = 6 \text{ s}^{-1}$ et $\tau = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\frac{h}{2}} = 0,85 \times 6 = 5,1 \text{ N/m}^2$,
- c) $\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = 0 \text{ s}^{-1}$ et $y = 20 \text{ cm} : \tau = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = 0,85 \times 0 = 0 \text{ N/m}^2$.

Exercice 2.6.

Une plaque rectangulaire de dimensions $0,50 \text{ m} \times 0,50 \text{ m}$ pesant 500 N glisse sur un plan incliné faisant un angle de 30° avec l'horizontale, à une vitesse de $1,75 \text{ m/s}$. Si l'espace de 2 mm entre la plaque et la surface inclinée est rempli d'une huile lubrifiante, trouver sa viscosité et exprimez-la en poise ainsi qu'en Ns/m^2 (Voir figure 2.10).

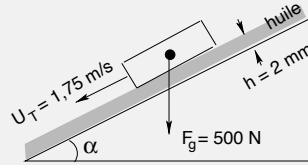


FIG. 2.10 – Glissement d'un bloc sur un plan incliné lubrifié par un film d'huile.

Solution 2.6.

De la même façon que pour l'exercice précédent, on a :

$$F_g \sin \alpha - \mu S \frac{U_T}{h} = 0$$

expression à partir de laquelle on tire la viscosité dynamique μ . On a : $\mu = \frac{h F_g \sin \alpha}{U S}$.

A.N :
$$\mu = \frac{0,002 \times 500 \times \sin 30^\circ}{1,75 \times 0,5 \times 0,5} \simeq 1,143 \text{ Ns/m}^2 = 11,43 \text{ poises}.$$

Exercice 2.7.

Un bloc pesant $45,36 \text{ kg}$ glisse le long d'un plan incliné comme le montre la figure 2.11, avec une vitesse constante. La surface du bloc en contact avec le plan incliné est plane et a pour superficie $0,186 \text{ m}^2$. Une fine couche d'huile entre le bloc et le plan a une épaisseur de $0,0254 \text{ cm}$, l'inclinaison du plan est de 30° par rapport à l'horizontale et la vitesse du bloc est de $1,83 \text{ m/s}$. Trouver la viscosité dynamique μ du film lubrifiant.

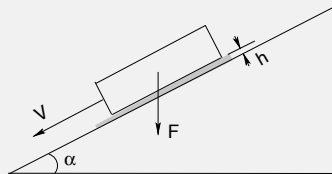


FIG. 2.11 – Mouvement d'un bloc sur un plan incliné lubrifié d'une couche d'huile.

Solution 2.7.

Dans cet exercice, nous allons donner une solution légèrement plus détaillée que pour les exercices précédents. Comme on le sait, le profil des vitesses entre le bloc et la paroi du plan incliné est parabolique. Un schéma grossier est donné sur la figure 2.12. En effet, la couche d'huile d'épaisseur h est constituée de la superposition de couches se déplaçant les unes sur les autres. Les molécules formant la fine couche qui se trouve au niveau de la paroi du plan incliné s'incrudent dans cette dernière, et cette couche de fluide est évidemment au repos lors de son contact avec la paroi. Plus loin de la paroi, le fluide a une vitesse v , qui augmente avec la distance y de la paroi, donnant ainsi une distribution parabolique de la vitesse (voir figure 2.12). Ce mouvement des couches les unes par rapport aux autres provoque la présence d'une contrainte visqueuse ou de cisaillement τ entre les deux couches voisines donnée par la loi de Newton. Le coefficient dynamique μ est donné par :

$$\mu = \tau / \frac{dv}{dy}. \quad (1)$$

Dans les exercices précédents, il a été démontré que : $F_g \sin \alpha = \tau S$ (2)

d'où l'expression de τ : $\tau = \frac{F_g \sin \alpha}{S}. \quad (3)$

A.N : $\tau = \frac{45,36 \times 9,81 \times \sin 30^\circ}{0,186} = 1196,19 \text{ Pa}.$

De l'équation de Newton, on a : $\tau dy = \mu dv. \quad (4)$

qu'on peut écrire : $\tau \int_0^h dy = \mu \int_0^V dv \quad (5)$

ou bien : $\tau h = \mu V. \quad (6)$

A.N : $\mu = \frac{\tau h}{V} = \frac{1196,19 \times 0,254 \times 10^{-3}}{1,83} = 0,166 \text{ Pa.s}. \quad (7)$

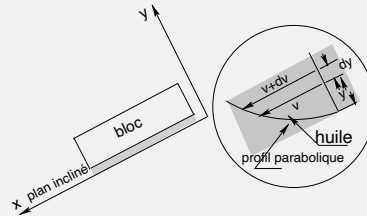


FIG. 2.12 – Profil parabolique de la vitesse.

Exercice 2.8.

Un bloc ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de masse $M = 4,54 \text{ kg}$, dont le côté perpendiculaire au plan de la figure est de $25,4 \text{ cm}$, est tiré vers le haut d'un plan, incliné à 15° par rapport à l'horizontale, sur un film d'huile de viscosité dynamique μ égale à $3,7 \times 10^{-2} \text{ N.s/m}^2$ à $37,8^\circ\text{C}$ (voir figure 2.13). La vitesse U du bloc est constante et égale à $1,524 \text{ m/s}$ et l'épaisseur du film d'huile est de $0,0254 \text{ mm}$. Le profil de vitesse dans le film est linéaire. Déterminer la force nécessaire F pour tirer le bloc vers le haut.

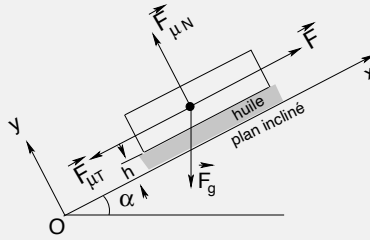


FIG. 2.13 – Bloc tiré vers le haut sur un plan incliné.

Solution 2.8.

Les forces qui interviennent sur le bloc sont : la force de traction $\vec{F}$, la force tangentielle de frottement $\vec{F}_{\mu T}$, la force normale $\vec{F}_{\mu N}$ et le poids $\vec{F}_g$ (voir figure 2.13). La somme vectorielle de ces forces est donnée par :

$$\vec{F} + \vec{F}_{\mu T} + \vec{F}_{\mu N} + \vec{F}_g = M \vec{\gamma}. \quad (1)$$

Comme le mouvement se fait à vitesse constante, $\vec{\gamma} = \vec{0}$ et l'équation (1) s'écrit :

$$\vec{F} + \vec{F}_{\mu T} + \vec{F}_{\mu N} + \vec{F}_g = \vec{0}. \quad (2)$$

La projection des forces sur l'axe du mouvement (x), on obtient :

$$F - F_{\mu T} + 0 - F_g \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

ou bien :

$$F = F_{\mu T} + F_g \sin \alpha \quad (4)$$

or la force de frottement est donnée par :

$$F_{\mu T} = \mu S \frac{dv}{dy} = \mu S \frac{U}{h} \quad (5)$$

En remplaçant (5) dans (4), on obtient :

$$F = \mu S \frac{U}{h} + M g \sin \alpha \quad (6)$$

$$F = 3,7 \times 10^{-2} \times 0,254^2 \times \frac{1,524}{0,0254 \times 10^{-3}} + 4,54 \times 9,81 \times \sin 37,8 = 154,75 \text{ N}.$$

Exercice 2.9.

Un bloc de masse M est en mouvement à vitesse constante U sur un plan horizontal sous l'influence d'une force horizontale et constante F . Un film mince d'huile d'épaisseur h et de viscosité μ se trouve entre le bloc et le plan ; le bloc est cubique d'arête égale à $a \text{ mm}$ (voir figure 2.14).

Déterminer :

1. L'intensité et la direction de la contrainte de cisaillement τ_{yx} agissant sur la face inférieure du bloc et sur la plaque de support.
2. L'expression du temps nécessaire pour perdre 95% de sa vitesse initiale lorsque la force F est soudainement supprimée.
3. Tracer la forme de la courbe de vitesse en fonction du temps.

Solution 2.9.

Les équations de base utilisées sont :

- La loi de viscosité de Newton : $\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$.
- La deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F} = M \vec{\gamma}$.

On considère aussi que :

- Le fluide est newtonien.
- Le profil des vitesses est linéaire $\frac{du}{dy} = \frac{U}{h}$ (voir figure 2.14).

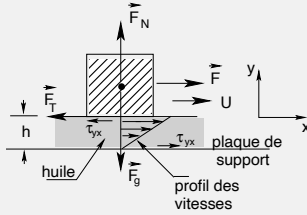


FIG. 2.14 – Représentation des différentes forces s'exerçant sur le bloc en mouvement.

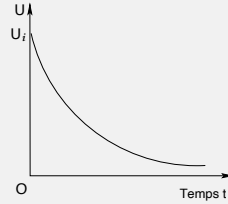


FIG. 2.15 – Vitesse du bloc en fonction du temps.

1. Déterminons l'intensité et la direction de la contrainte de cisaillement τ_{yx} agissant sur la face inférieure du bloc et sur la plaque du support. La contrainte de cisaillement τ_{yx} agit toujours dans le sens opposé au mouvement. Comme le bloc se déplace dans le sens des x positifs, la contrainte de cisaillement s'exerçant sur la face inférieure du bloc agit dans le sens inverse comme le montre la figure 2.14. De même pour la plaque, on peut considérer que le bloc est à l'arrêt et que c'est la plaque qui se déplace dans le sens inverse c'est-à-dire dans le sens des x négatifs (mouvement relatif). Dans ce cas la contrainte de cisaillement est dans le sens des x positifs (voir figure 2.14). La force $F_{\mu T}$ est la résultante des forces de frottement s'exerçant sur la face inférieure du bloc. La contrainte de cisaillement est donnée par :

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{u}{h}. \quad (1)$$

$$\text{et la force de frottement } F_{\mu T} \text{ est égale à : } F_{\mu T} = \tau_{yx} S = \mu S \frac{U}{h}. \quad (2)$$

S étant la surface de la face inférieure en contact avec l'huile égale à a^2 .

$$\text{Soit : } F_{\mu T} = \mu a^2 \frac{U}{h}. \quad (3)$$

2. Déterminons à présent l'expression du temps nécessaire pour perdre 95% de sa vitesse initiale lorsque la force F est soudainement supprimée. Dans ce cas la vitesse U n'est plus constante car en l'absence de la force de traction F le mouvement sera non uniforme et décéléré. Utilisons la deuxième loi de Newton, on a :

$$\vec{F} + \vec{F}_g + \vec{F}_{\mu T} + \vec{F}_N = M \frac{dU}{dt}. \quad (4)$$

La projection de ces forces sur l'axe des x donne :

$$-F_{\mu T} + F = M \frac{dU}{dt}. \quad (5)$$

Si on supprime brusquement la force F , l'équation (5) devient :

$$F_{\mu T} = -M \frac{dU}{dt} \quad (6)$$

ou bien :

$$\mu a^2 \frac{U}{h} = -M \frac{dU}{dt}. \quad (7)$$

La séparation des variables donne : $\frac{dU}{U} = -\frac{\mu a^2}{Mh} dt.$ (8)

L'intégration des deux membres de l'équation (8) s'écrit :

$$\int_{U_i}^U \frac{dU}{U} = - \int_0^t \frac{\mu a^2}{Mh} dt \quad (9)$$

en notant « U_i » la vitesse du bloc à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire l'instant où la force F est supprimée. Soit :

$$\ln \frac{U}{U_i} = -\frac{\mu a^2}{Mh} t. \quad (10)$$

à partir de l'équation (10), on tire l'expression du temps t telle que :

$$t = -\frac{Mh}{\mu a^2} \ln \frac{U}{U_i}. \quad (11)$$

Si la vitesse initiale U_i perd 95% de sa valeur alors :

$$U = U_{95\%} = U_i - 0,95 U_i = 0,05 U_i$$

et dans ce cas là : $\ln \frac{0,05 U_i}{U_i} = \ln(0,05) = -3.$

Soit : $t = 3,0 \times \frac{Mh}{\mu a^2}.$ (12)

3. Évolution de la vitesse en fonction du temps. D'après l'équation (11), on a :

$$U = U_i \exp \left[- \left(\frac{\mu a^2}{Mh} \right) t \right] \quad (13)$$

Comme on peut le constater, la vitesse diminue exponentiellement en fonction du temps.

Exercice 2.10.

Le bloc cubique de masse M glisse sur une couche mince d'huile d'épaisseur h . La surface de contact du bloc est S . A l'instant $t = 0$, la masse m est libérée à partir du repos (voir figure 2.16). Déterminer :

1. l'expression de la force visqueuse sur le bloc lors du déplacement à la vitesse v ,
 2. l'équation différentielle régissant la vitesse du bloc en fonction du temps,
 3. l'expression pour la vitesse du bloc $v = v(t)$; dessiner le graphe.
 4. Si $v = 1 \text{ m/s}$ à $t = 1 \text{ s}$, calculer la valeur de la viscosité dynamique μ .
- On donne : $M = 5 \text{ kg}$, $m = 1 \text{ kg}$, $S = 25 \text{ cm}^2$, $h = 0,5 \text{ mm}$ et $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

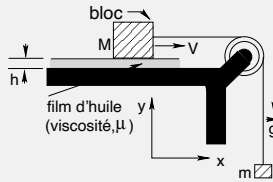


FIG. 2.16 – Déplacement d'un bloc sur un plan horizontal.

Solution 2.10.

Les équations de base pouvant être utilisées dans cet exercice sont les suivantes.

- La loi de Newton de viscosité pour les fluides newtoniens

$$F_{\mu T} = \mu S \frac{dv}{dy}. \quad (1)$$

- L'application de la seconde loi de Newton : $\sum \vec{F} = M \vec{\gamma}$. (2)

1. L'expression de la force visqueuse sur le bloc lors de son déplacement en considérant le fluide newtonien et le profil des vitesses linéaire est :

$$F_{\mu T} = \mu S \frac{dv}{dy} = \mu S \frac{v}{h} \quad (3)$$

où v est la vitesse du bloc cubique.

2. Nous déterminons maintenant l'équation différentielle régissant la vitesse du bloc en fonction du temps $v = v(t)$. Pour cela, on divise le système en deux comme le montre la figure 2.17 (a) et (b) et l'équation (2) est appliquée pour les deux schémas.

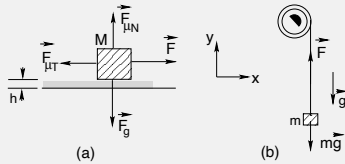


FIG. 2.17 – Division du système en deux et représentation schématique des forces.

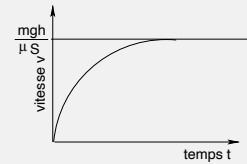


FIG. 2.18 – La vitesse en fonction du temps.

Pour le schéma (a), on a :

$$\vec{F}_{\mu T} + \vec{F}_{\mu N} + \vec{F}_g + \vec{F} = M \vec{\gamma}. \quad (4)$$

La projection sur l'axe des x donne : $-F_{\mu T} + F = M \frac{dv}{dt}$ (5)

où v est la vitesse du bloc. En remplaçant $F_{\mu T}$ par son expression tirée de (1), on obtient :

$$-\mu S \frac{v}{h} + F = M \frac{dv}{dt}. \quad (6)$$

De même : pour le schéma (b), la projection sur l'axe des y donne :

$$F - mg = -m \frac{dv_m}{dt}. \quad (7)$$

où v_m est la vitesse de la masse m . En retranchant (7) de (6), on obtient :

$$-\mu S \frac{v}{h} + mg = M \frac{dv}{dt} + m \frac{dv_m}{dt}.$$

Comme $v_m = v$, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$-\mu S \frac{v}{h} + mg = (M + m) \frac{dv}{dt}. \quad (8)$$

On peut aussi l'arranger de la manière suivante :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\mu S}{(M + m)h} v = \frac{mg}{M + m} \quad (9)$$

ou bien :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\mu S}{(M + m)h} v - \frac{mg}{M + m} = 0. \quad (10)$$

on obtient donc une équation différentielle du 1^{er} ordre.

3. L'expression pour la vitesse du bloc $v = v(t)$ est obtenue en résolvant l'équation (10). Pour résoudre l'équation (10), on peut la simplifier en faisant le changement de variable suivant :

$$u = \frac{\mu S}{(M + m)h} v - \frac{mg}{M + m} \quad (11)$$

et :

$$du = \frac{\mu S}{(M + m)h} dv \quad \text{ou bien} \quad dv = \frac{(M + m)h}{\mu S} du.$$

Remplaçant dans l'équation (10), on obtient :

$$\frac{du}{dt} + \frac{\mu S}{(M + m)h} u = 0. \quad (12)$$

En séparant les variables, on obtient :

$$\frac{du}{u} = -\frac{\mu S}{(M + m)h} dt. \quad (13)$$

L'intégration des deux membres de (13) donne :

$$\ln \frac{u}{C} = -\frac{\mu S}{(M + m)h} t \quad (14)$$

ou bien :

$$u = C \exp \left\{ - \left[\frac{\mu S}{(M + m)h} \right] t \right\}. \quad (15)$$

C étant la constante d'intégration. Le paramètre demandé est la vitesse v et non u pour cela on utilise l'équation (11) dans (15) et on obtient :

$$v = \frac{mgh}{\mu S} + \frac{h(M + m)}{\mu S} C \exp \left\{ - \left[\frac{\mu S}{(M + m)h} \right] t \right\}. \quad (16)$$

Pour déterminer la constante d'intégration C , on utilise la condition suivante : à $t = 0$, $v = 0$ et à partir de l'équation (16), on obtient : $C = -\frac{mgh}{(M + m)}$. En remplaçant C par son expression et en simplifiant les termes qui se ressemblent, on obtient :

$$v = \frac{mgh}{\mu S} - \frac{mgh}{\mu S} \exp \left\{ - \left[\frac{\mu S}{(M + m)h} \right] t \right\} \quad (17)$$

ou bien :

$$v = \frac{mgh}{\mu S} \left(1 - \exp \left\{ - \left[\frac{\mu S}{(M + m)h} \right] t \right\} \right). \quad (18)$$

REMARQUE

La valeur absolue de la tension dans la corde s'appuyant sur la poulie est notée « F ». Sur la figure (a), la corde exerce la force « $\vec{F}$ » dirigée dans le sens positif des x .

Sur la figure (b), la corde exerce sur la masse m une force égale à la tension « F » orientée vers le haut.

La vitesse augmente exponentiellement en fonction du temps et atteint la vitesse terminale v_T qui peut être obtenue en faisant tendre le temps t vers l'infini. Dans ce cas l'équation

(18) donne $v_T = \frac{mgh}{\mu S}$ comme le montre la figure 2.18.

4. Calculons la valeur de la viscosité dynamique μ si pour $t = 1 \text{ s}$, $v = 1 \text{ m/s}$. En remplaçant les paramètres physiques par leurs valeurs, l'équation (18) devient :

$$1 = \frac{1 \times 9,81 \times 0,5 \times 10^{-3}}{\mu \times 25 \times 10^{-4}} \left(1 - \exp \left\{ - \left[\frac{\mu \times 25 \times 10^{-4}}{(5+1) \times 0,5 \times 10^{-3}} \right] \times 1 \right\} \right)$$

ou bien : $0,5\mu = 1 - \exp(-0,833\mu)$. (19)

La valeur de la viscosité peut être obtenue en utilisant la méthode des approximations successives en donnant successivement des valeurs à μ et en comparant le résultat du membre de gauche avec celui de droite. La valeur de μ retenue est celle pour laquelle les deux résultats sont très proches. On peut aussi tracer le graphe de la fonction $0,5\mu$ ainsi que celui de la fonction $1 - \exp(-0,833\mu)$ comme ceci est montré sur la figure 2.19. Le point d'intersection des deux courbes représente la racine de l'équation (19). En utilisant l'une ou l'autre des deux méthodes, on remarque qu'il y a deux points d'intersections. Le premier à l'origine des axes de coordonnées (0,0) et l'autre au point M de coordonnées (1,35088; 0,67544) comme le montre la figure 2.19. Physiquement c'est le deuxième point d'intersection qui est retenu. On prend donc $\mu = 1,351 \text{ N s/m}^2$ avec une erreur relative de 0,0028%.

Valeur de μ laquelle l'équation (18) devient :

$$v = 1,45 [1 - \exp(-1,126t)] \quad (20)$$

dont le graphe est donné par la figure 2.20.

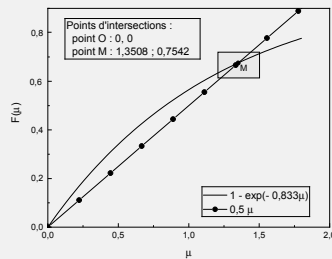


FIG. 2.19 – Coordonnées du point d'intersection de deux courbes.

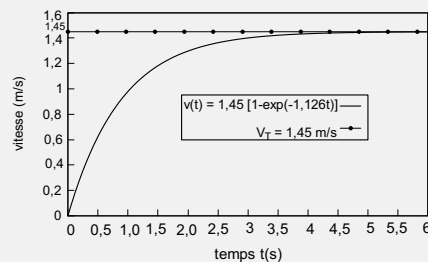


FIG. 2.20 – Graphe de la vitesse en fonction du temps, équation (20).

Exercice 2.11.

Un bloc cubique glisse sur une couche mince d'huile de viscosité dynamique à 30°C égale à $0,4 \text{ N s/m}^2$ et d'épaisseur h sur un plan incliné illustré par la figure 2.21. Répondre aux questions qui suivent.

1. Déterminer l'accélération initiale.
2. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps.
3. Faire une esquisse de l'évolution de la vitesse $v = v(t)$.
4. Déterminer la vitesse lors du glissement sans huile et faire l'étude de cette vitesse.

On donne : $M = 2 \text{ kg}$, $L = 0,2 \text{ m}$, $h = 0,02 \text{ mm}$, $\alpha = 30^\circ$.

Solution 2.11.

Comme pour le cas précédent, les formules utilisées sont les suivantes.

- La loi de viscosité de Newton : $F_{\mu T} = \mu S \frac{dv}{dy}$.
- La seconde loi de Newton : $\sum \vec{F} = m \vec{\gamma}$, où $\vec{\gamma}$ est l'accélération de la masse.

On considère le fluide (huile) newtonien et le profil de vitesse linéaire $dv/dy = v/h$.

1. Déterminons l'accélération initiale. En utilisant la deuxième loi de Newton, on a :

$$M \vec{g} + \vec{F}_{\mu T} + \vec{F}_{\mu N} = M \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1)$$

La projection des différentes forces sur l'axe du mouvement (axe des x), donne :

$$M g \sin \alpha - F_{\mu T} = M \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

qu'on peut aussi écrire en remplaçant la force $F_{\mu T}$ par son expression :

$$M g \sin \alpha - \mu S \frac{dv}{dy} = M \frac{dv}{dt}. \quad (3)$$

Comme le profil des vitesses est linéaire alors $\frac{dv}{dy} = \frac{v}{h}$ et l'équation (3) devient :

$$M g \sin \alpha - \mu S \frac{v}{h} = M \frac{dv}{dt}. \quad (4)$$

En divisant les deux membres de cette équation par la masse M , on obtient :

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha - \frac{\mu S}{M h} v \quad (5)$$

L'accélération initiale est obtenue à $v = 0$, on a : $\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha. \quad (6)$

A.N : $\frac{dv}{dt} = 9,81 \times \sin 30^\circ = 9,81 \times 0,5 = 4,91 \text{ m/s}^2.$

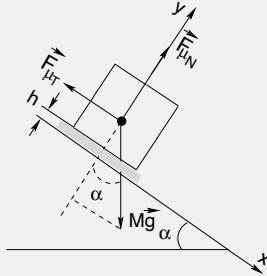


FIG. 2.21 – Forces agissant sur le bloc.

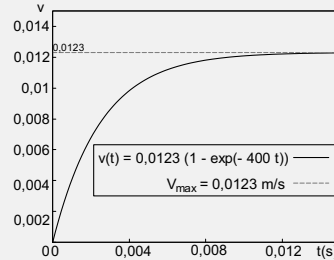


FIG. 2.22 – Vitesse en fonction du temps.

2. Déterminons l'expression de la vitesse en fonction du temps. Faisons un changement de variable dans l'équation (6). Posons :

$$u = g \sin \alpha - \frac{\mu S}{M h} v \quad (7)$$

d'où : $du = -\frac{\mu S}{M h} dv$ ou bien $dv = -\frac{M h}{\mu S} du.$

En remplaçant ces résultats dans l'équation (7), on obtient :

$$-\frac{Mh}{\mu S} \frac{du}{dt} = u \text{ et } \frac{du}{dt} = -\frac{\mu S}{Mh} u \quad (8)$$

dont l'intégration donne : $\ln \frac{u}{C} = -\frac{\mu S}{Mh} t$ (9)

où C est la constante d'intégration. Remplaçons u par son expression tirée de (7), on obtient :

$$g \sin \alpha - \frac{\mu S}{Mh} v = C \exp \left\{ -\left(\frac{\mu S}{Mh} \right) t \right\} \quad (10)$$

relation à partir de laquelle, on tire l'expression de la vitesse v ,

$$v = \frac{Mgh}{\mu S} \sin \alpha - \frac{Mh}{\mu S} C \exp \left\{ -\left(\frac{\mu S}{Mh} \right) t \right\}. \quad (11)$$

La constante d'intégration C peut être déterminée en utilisant la condition suivante : à $t = 0$, $v = 0$. À partir de l'équation (11), on obtient : $C = g \sin \alpha$.

En remplaçant la constante C par son expression dans l'équation (11), on obtient :

$$v = \frac{Mgh}{\mu S} \sin \alpha \left[1 - \exp \left\{ -\left(\frac{\mu S}{Mh} \right) t \right\} \right] \quad (12)$$

qu'on peut écrire : $v = v_T \left[1 - \exp \left\{ -\left(\frac{\mu S}{Mh} \right) t \right\} \right]$

où v_T est la vitesse terminale égale à $Mgh \sin \alpha / \mu S$.

A.N :
$$v_T = \frac{2 \times 9,81 \times 0,02 \times 10^{-3}}{0,4 \times 0,04} \times 0,5 = 0,0123 \text{ m/s}$$

et :
$$\frac{\mu S}{Mh} = \frac{0,4 \times 0,04}{2 \times 0,02 \times 10^{-3}} = 0,4 \times 10^3 = 400 \text{ s}^{-1}$$

et l'équation (12) s'écrit : $v = 0,0123 (1 - e^{-400t})$.

3. Faisons une esquisse de l'évolution de la vitesse $v = v(t)$.

La vitesse v augmente exponentiellement avec le temps et atteint une limite qui est la vitesse terminale $v_T = 0,0123 \text{ m/s}$ (voir figure 2.22).

4. Dans cette question, on calcule la vitesse du glissement sans huile, puis on en fait l'étude.

En l'absence d'huile, le contact entre le bloc et le plan incliné est le contact entre deux solides rigides. Notons « F_T » et « F_N » la force tangentielle et la force normale exercée par le plan incliné sur le bloc. En présence de mouvement la loi de Coulomb s'écrit :

« $F_T = (\mu_k) F_N$ » où « μ_k » est le coefficient de frottement.

À partir de la figure 2.21, la projection des forces sur l'axe des y donne :

$$-Mg \cos \alpha + 0 + F_N = 0 \text{ ou bien : } F_N = Mg \cos \alpha. \quad (13)$$

Or $F_T = \mu_k F_N$ c'est-à-dire $F_T = \mu_k Mg \cos \alpha$. L'équation (3) devient dans ce cas :

$$Mg \sin \alpha - \mu_k Mg \cos \alpha = M \frac{dv}{dt} \text{ ou bien : } g (\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha) = \frac{dv}{dt}. \quad (14)$$

Deux cas se présentent :

- a) quand $\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha > 0$, la vitesse croît de façon continue,
- b) quand $\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha \leq 0$, le bloc s'arrête.

Chapitre 3

Fluides newtoniens et fluides non newtoniens

Il n'existe que deux choses infinies, l'univers et la bêtise humaine... mais pour l'univers, je n'ai pas de certitude absolue.

Albert Einstein

3.1 Généralités

Les fluides sont principalement classés en deux catégories : les fluides newtoniens et les fluides non newtoniens. Les fluides non newtoniens sont également classés en deux catégories : les fluides non newtoniens dont le comportement rhéologique dépend du temps et ceux dont le comportement est indépendant du temps. La hiérarchie de la classification est illustrée sur la figure 3.1.

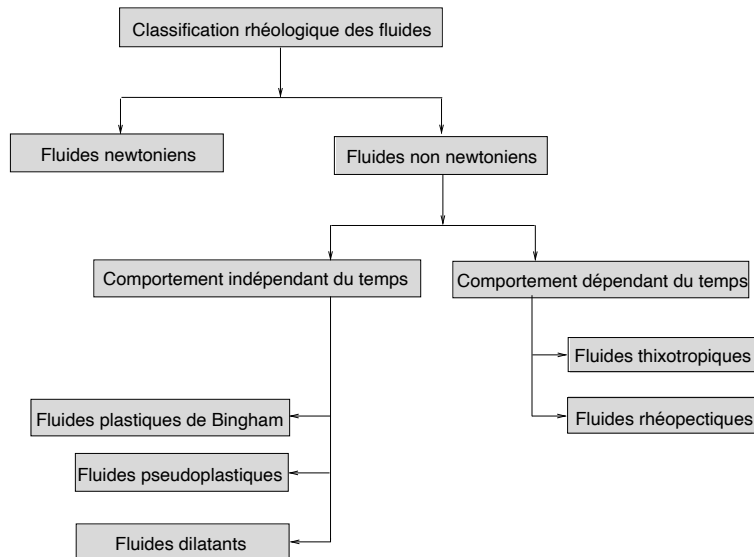


FIG. 3.1 – Hiérarchie de la classification rhéologique des fluides.

3.2 Fluides newtoniens

Les fluides qui se comportent conformément à l'équation (2.11) sont appelés fluides newtoniens. La viscosité dynamique μ n'est fonction que de l'état thermodynamique du fluide,

en particulier de sa température. Les fluides les plus courants tels que l'air pour les gaz et, l'eau, l'huile, l'essence, l'alcool, le kérosène, le benzène et la glycérine pour les liquides sont classés en tant que fluides newtoniens.

3.3 Fluides non newtoniens

Ce sont des fluides plus complexes car leur viscosité dépend de la contrainte (τ) qu'on leur applique. En effet, la viscosité de certains fluides non newtoniens augmente lorsque l'on exerce une force sur eux. D'autres fluides non newtoniens voient leur viscosité diminuer lorsqu'ils sont soumis à une contrainte. En général, les fluides qui n'obéissent pas à l'équation (2.11) sont appelés fluides non newtoniens. Il existe une grande classe de fluides qui montre une relation non linéaire avec la vitesse pour toute contrainte de cisaillement. Cette classe de fluides peut être approchée par un seul terme polynomial de la forme est $\tau = Ax^n$ où x est relié au gradient de vitesse. Du point de vue physique, le coefficient dépend du gradient de vitesse. Cette relation est appelée relation de puissances ou modèle d'Ostwald¹ et elle peut être écrite comme suit :

$$\tau = K \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (3.1)$$

qu'on peut mettre sous la forme : $\tau = K (du/dy)^{n-1} (du/dy)$. Le taux de cisaillement (du/dy) est aussi appelé vitesse de cisaillement, laquelle a pour unité s^{-1} . Le paramètre K constant est appelé coefficient de consistance du fluide et n indice d'écoulement. Notons que le paramètre n est sans dimension mais K a une dimension et a pour unité $N s^n / m^2$. Cependant, K est également égal à la viscosité du fluide à un taux de cisaillement de $1 s^{-1}$, il s'agit donc d'un paramètre de «viscosité» avec des unités équivalentes. La quantité $K (du/dy)^{n-1}$ est appelée viscosité dynamique apparente μ_{app} ou effective μ_{eff} . Elle n'a cependant pas de signification physique réelle et bien souvent on s'intéresse à une «viscosité infinie μ_∞ » qui est la viscosité du fluide lorsque le cisaillement tend vers l'infini. On dit que le cisaillement tend vers l'infini si (du/dy) est infiniment grand. L'équation ci-dessus peut s'écrire :

$$\tau = \mu_{app} \left(\frac{du}{dy} \right) \quad (3.2)$$

La différence entre les fluides newtoniens et les fluides non newtoniens est montrée sur la figure 3.2. La viscosité du fluide non newtonien dépend du gradient de vitesse en plus de l'état du fluide. Il est évident que si $n = 1$ le modèle de la loi de puissance se réduit à celle d'un fluide newtonien avec $K = \mu$. Comme les fluides newtoniens ont une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et le gradient de vitesse, la pente est constante et, par conséquent, la viscosité est constante alors que les pentes des courbes pour les fluides non newtoniens varient et la viscosité change avec le gradient de vitesse.

- **Fluides dont la loi de comportement est indépendants du temps**

Dans ces types de fluides, la contrainte de cisaillement τ dépend uniquement de la vitesse de déformation de cisaillement à température constante. Ceux-ci peuvent être classés dans les trois catégories suivantes.

1. **Fluides de Bingham** : parfois appelés fluides à écoulement continu, les fluides de Bingham exigent l'application d'une contrainte de cisaillement (τ_0) avant que l'écoulement

1. Armand de Waele (1887-1966) était un chimiste britannique, connu pour ses contributions à la rhéologie. Le nom d'Ostwald de Waele a été attribué à sa relation obtenue pour les fluides non newtoniens.

ne démarre, comme illustré sur la figure 3.2. En dessous de cette contrainte seuil, le fluide va se comporter comme un solide et au-delà de cette contrainte, le comportement sera le même que celui d'un fluide newtonien. Pour τ supérieur ou égal à τ_0 , la pente essentiellement linéaire à la courbe indique une viscosité apparente constante. Des exemples de fluides de Bingham sont le chocolat, la moutarde, la mayonnaise, le dentifrice, la peinture et l'asphalte.

Les équations qui régissent le comportement d'un fluide de Bingham sont les suivantes :

$$\frac{du}{dy} = \begin{cases} 0 & \tau < \tau_0 \\ \frac{\tau - \tau_0}{\mu} & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

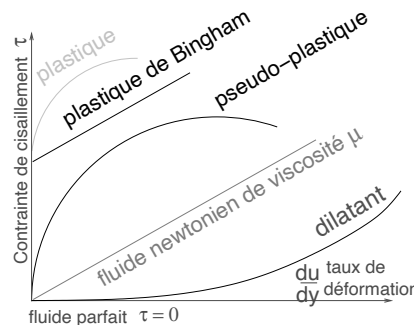


FIG. 3.2 – Contrainte de cisaillement τ en fonction du gradient de vitesse.

2. **Fluide rhéo-fluidifiant ou pseudo-plastique** : C'est le cas où $n < 1$. Le fluide a un comportement rhéofluidifiant ou pseudo-plastique. La viscosité diminue lorsque le gradient de vitesse augmente. Cela donne un système de plus en plus fluide comme par exemple le ketchup. En effet, le ketchup s'écoule plus rapidement si on exerce une forte contrainte sur le tube le contenant.
3. **Fluide dilatant** : C'est le cas où $n > 1$. Le fluide a un comportement rhéo-épaississant qui au contraire, quand on l'agite, il devient de plus en plus visqueux et de plus en plus difficile à mélanger, phénomène assez rare. Il est observé principalement pour certaines suspensions concentrées de très petites particules (par exemple des suspensions d'amidon) et certains fluides polymères inhabituels. C'est le cas aussi d'une solution d'alcool polyvinylique dans l'eau : au-delà d'une certaine concentration, quand on agite fortement la solution liquide, celle-ci devient plus visqueuse et peut même se gélifier. En se référant à nouveau à la figure 3.2, le graphique de la contrainte de cisaillement par rapport au gradient de vitesse pour les fluides dilatants se trouve au-dessous de la droite des fluides newtoniens. La courbe commence par une faible pente, indiquant une faible viscosité apparente. Ensuite, la pente augmente avec le gradient de vitesse croissant. Des exemples de fluides dilatants sont des suspensions avec des concentrations élevées de matières solides telles que l'amidon de maïs dans l'éthylène glycol, l'amidon dans l'eau et le dioxyde de titane, un ingrédient de la peinture.

REMARQUE

Sur la figure 3.2, le cas du fluide parfait (c'est-à-dire $\tau = 0$ ou $\mu = 0$) est aussi indiqué.

- **Fluides dont la loi de comportement est dépendante de temps**

C'est une sorte de fluide non newtonien dans lequel la viscosité est fonction de la température, du taux de cisaillement et de la durée du taux de cisaillement, comme le montre la figure 3.3. Ce type de fluide est subdivisé dans les deux catégories suivantes :

1. **Fluide thixotropique** : Ce type de fluide est également appelé fluide à amincissement temporel, car dans un tel fluide, la viscosité diminue avec le temps. Par exemple, le yaourt.
2. **Fluide rhéopectique** : Ce type de fluide est également appelé fluide épaississant dans le temps parce que dans un tel fluide, la viscosité augmente avec le temps. Par exemple, plâtre de gypse.

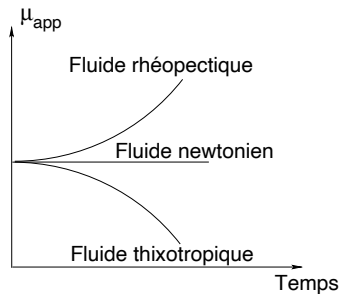


FIG. 3.3 – Variation de la viscosité dynamique apparente avec le temps pour les fluides.

3.4 Mesure de la viscosité

Les appareils utilisés pour la mesure de la viscosité s'appellent des viscosimètres et il en existe plusieurs types. La mesure de la viscosité d'un fluide doit se faire à température constante car comme on l'a vu précédemment, la viscosité du fluide est très sensible à cette dernière. Les viscosimètres se divisent en trois classes :

- le viscosimètre de type Poiseuille (utilisé essentiellement dans le cas des liquides newtoniens) dans lequel l'écoulement du fluide dans un tube cylindrique en général vertical est laminaire. L'écoulement est provoqué généralement par l'action de la pesanteur qui est souvent suffisante. Dans certains cas, en plus de la pesanteur, le mouvement de cisaillement est engendré par l'ajout d'une différence de pression ΔP aux extrémités du tube cylindrique contenant l'échantillon (le plus simple est le viscosimètre d'Ostwald),
- le viscosimètre de Couette dont lequel le fluide subit un cisaillement tangentiel entre deux surfaces solides, l'une au repos, l'autre mobile,
- le viscosimètre à chute de bille dont les possibilités sont limitées mais qui est très souvent utilisé.

Nous décrivons deux dispositifs permettant la mesure de la viscosité. Le viscosimètre à écoulement laminaire et le viscosimètre à chute de bille.

3.4.1 Le viscosimètre d'Ostwald

On l'appelle aussi viscosimètre à écoulement laminaire. Il est basé sur la loi de Poiseuille. Il est utilisé pour la mesure rapide de la viscosité absolue d'un liquide newtonien. C'est un tube capillaire vertical où en général, la seule pesanteur est responsable de l'écoulement. Il est utilisé essentiellement pour l'étude des liquides newtoniens de faible viscosité. Pour des fluides très visqueux, on ajoute une différence de pression ΔP entre les deux extrémités (haut et bas) de la conduite pour provoquer l'écoulement.

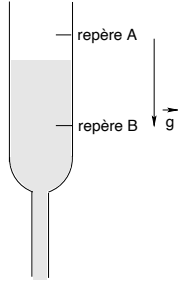


FIG. 3.4 – Viscosimètre d'Ostwald simplifié.

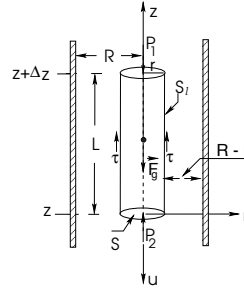


FIG. 3.5 – Écoulement dans un tube vertical.

Le principe du viscosimètre d'Ostwald² est de mesurer le temps d'écoulement d'un volume donné de fluide maintenu à température constante à travers un tube vertical de section circulaire de faible diamètre (figure 3.4). Ce viscosimètre utilise la loi de Poiseuille établie pour un écoulement laminaire du fluide.

On fait s'écouler dans le tube le liquide à étudier puis un liquide de référence. Les grandeurs dans le liquide de référence seront notées avec l'indice 0.

On va établir ci-après que le rapport des viscosités cinématiques est égal au rapport des temps d'écoulement.

$$\nu = \nu_0 \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \quad \text{avec } \mu = \rho \nu, \quad (3.4)$$

donc : $\mu = \rho \nu_0 \frac{\Delta t}{\Delta t_0}$, ou bien :

$$\mu = k \rho \Delta t, \quad (3.5)$$

où k est une constante qui dépend de l'appareil.

Procédons à la démonstration de l'équation (3.4).

Écoulement dans un conduit vertical

Considérons l'écoulement dans le champ de la pesanteur dans un conduit vertical de rayon R et d'axe Oz de faible section de base. L'écoulement se fait dans le sens inverse à l'axe Oz comme le montre la figure 3.5. Découpons un élément de volume de forme cylindrique de longueur L et de rayon r et d'axe Oz (figure 3.5). Sur les sections de base de cet élément de volume s'exercent les forces de pression $F_1 = P_1 S$ et $F_2 = P_2 S$. Sur la surface latérale S_l s'exerce la force F_μ qui est la résultante des forces de frottement exercées par le fluide

2. Chimiste et Physicien allemand, lauréat du prix Nobel, considéré comme l'un des fondateurs de la chimie physique. Ostwald reçut, en 1909, le prix Nobel de chimie. Il produisit également une œuvre importante en philosophie des sciences et en théorie de la connaissance (monisme).

extérieur au petit cylindre sur la surface S_l , et qui est donc τS_l . Notons que les forces de pression sur la surface S_l ont une résultante nulle pour des raisons de symétrie. Enfin il faut tenir compte du poids de ce petit cylindre de liquide $F_g = mg$. L'écoulement vertical dans le petit cylindre est obtenu par la combinaison de l'action de la pesanteur et d'un gradient de pression et également du frottement sur la surface du petit cylindre de rayon r . Lorsque le régime permanent est obtenu la somme des forces qui agissent sur ce petit volume est égale à zéro. Nous avons :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ou bien} \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_\mu + \vec{F}_g = \vec{0}, \quad (3.6)$$

avec :

S_l : la surface latérale S_l du volume cylindrique de rayon r égale à $2\pi rL$,

S : la section droite S égale à πr^2 .

La projection sur l'axe Oz donne : $-F_1 + F_2 + F_\mu - F_g = 0$. (3.7)

En remplaçant F_1 , F_2 , F_μ et F_g par leurs expressions, on obtient :

$$-P_1 S + P_2 S + \tau S_l - F_g = 0. \quad (3.8)$$

Dans l'équation (3.8) et comme le montre la figure 3.5, $P_1 = P(z + \Delta z)$ et $P_2 = P(z)$ et la quantité $P_2 - P_1 = P(z) - P(z + \Delta z) = -[P(z + \Delta z) - P(z)] = -\Delta P(z)$.

On fait l'hypothèse que la pression en amont de l'écoulement est plus grande que la pression en aval, c'est-à-dire $\Delta P > 0$.

$$-\Delta P \pi r^2 + 2\pi rL\tau - mg = 0. \quad (3.9)$$

En remplaçant m par ρV , avec $V = \pi r^2 L$, l'équation devient :

$$-\Delta P \pi r^2 + 2\pi rL\tau - \rho \pi r^2 Lg = 0. \quad (3.10)$$

En simplifiant l'équation (3.10), on obtient : $2\tau = \left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right) r$. (3.11)

Posons $K_1 = \rho g + \frac{\Delta P}{L}$. L'équation (3.11) s'écrit : $\tau = K_1 r/2$. (3.12)

On admet que la vitesse u ne dépend que de r et qu'elle ne dépend pas de z . De plus $u(r)$ décroît quand r augmente en ayant sa valeur maximale au centre du conduit en $r = 0$, et en ayant une valeur nulle sur la paroi du conduit en $r = R$. Cette hypothèse implique que (du/dr) est négatif. Le frottement τ sur la frontière du petit cylindre de rayon r , exercé par le fluide extérieur à ce petit cylindre, est positif et est donc, le fluide étant newtonien, $\tau = \mu (du/dr)$.

Sur la frontière du petit cylindre, on a donc en tenant compte de l'équation (3.12) :

$$-\frac{K_1}{2\mu} r = \frac{du}{dr} \quad \text{ou bien} \quad du = -\frac{K_1}{2\mu} r dr. \quad (3.13)$$

L'intégration de cette équation, donne : $u = -\frac{K_1}{4\mu} r^2 + C$ (3.14)

où C est la constante d'intégration. Elle peut être obtenue avec la condition d'adhérence suivante : pour $r = R$, $u = 0$. D'où $C = (K_1/4\mu) R^2$ et l'équation (3.14) devient :

$$u = -\frac{K_1}{4\mu} r^2 + \frac{K_1}{4\mu} R^2 \quad \text{ou bien} \quad u = \frac{K_1}{4\mu} (R^2 - r^2). \quad (3.15)$$

Appliquons la loi de répartition des vitesses (3.15) à la détermination du débit volumique Q_v . Le débit volumique d'un fluide qui traverse une section est le volume de fluide qui traverse la section droite par unité de temps. Il est égal au produit de la vitesse moyenne d'écoulement par la section droite c'est-à-dire $Q_v = U_m S$ (ici U_m est la vitesse moyenne et S est l'aire de la section droite du conduit de rayon R). Le débit élémentaire à travers l'aire infiniment petite

dS est :

$$dQ_v = u dS. \quad (3.16)$$

Remplaçons dans l'équation (3.16) la vitesse u par son expression donnée par (3.15), nous obtenons :

$$dQ_v = \frac{K_1}{4\mu} (R^2 - r^2) dS \quad (3.17)$$

ou bien :

$$Q_v = \frac{K_1}{4\mu} \int_S (R^2 - r^2) dS. \quad (3.18)$$

La valeur de cette intégrale est :

$$Q_v = \frac{K_1}{4\mu} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr. \quad (3.19)$$

Le résultat de l'intégrale ci-dessus est :

$$Q_v = \frac{K_1 \pi}{2\mu} \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)_0^R = \frac{K_1 \pi R^4}{8\mu} \quad (3.20)$$

ou bien en remplaçant K_1 tirée de (3.11) et (3.12) par son expression, on obtient :

$$Q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\rho g + \frac{\Delta P}{L} \right) \quad (\text{loi de Poiseuille}). \quad (3.21)$$

Dans le cas où seule l'action de la pesanteur est responsable de l'écoulement, on a $\Delta P = 0$. Dans ce cas, l'équation (3.21) devient :

$$Q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu} \rho g. \quad (3.22)$$

Le volume considéré de liquide dans le viscosimètre est SL , où L est la hauteur de liquide et $S = \pi R^2$ l'aire de la section droite du conduit. Le temps d'écoulement de ce volume de liquide est Δt . On introduit la vitesse moyenne de l'écoulement $U_m = L/\Delta t$. On peut écrire $Q_v = U_m S$. L'équation (3.22) peut être mise sous la forme :

$$\frac{L}{\Delta t} \pi R^2 = \frac{\pi R^4}{8\mu} \rho g. \quad (3.23)$$

Après simplification, on obtient :

$$\mu = \frac{\rho g R^2}{8L} \Delta t. \quad (3.24)$$

Il est souvent nécessaire, pour améliorer la précision des mesures, de faire la même expérience avec un liquide newtonien de référence de masse volumique et de viscosité connues ρ_0 , μ_0 . Si Δt_0 représente le temps d'écoulement mis par le liquide de référence à parcourir la distance L et en utilisant l'équation (3.24), on obtient :

$$\mu_0 = \frac{\rho_0 g R^2}{8L} \Delta t_0. \quad (3.25)$$

En faisant le rapport de (3.24) sur (3.25) et après simplification, on obtient :

$$\mu = \mu_0 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\Delta t}{\Delta t_0}, \quad (3.26)$$

relation qui peut être exprimée en terme de viscosité cinématique :

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \quad \text{soit} \quad \nu = \nu_0 \frac{\Delta t}{\Delta t_0}. \quad (3.27)$$

Connaissant ν_0 , il suffit de mesurer les temps d'écoulement du liquide ainsi que celui du liquide de référence pour déduire ν . Cette technique a permis d'introduire une grandeur sans dimension appelée degré d'Engler E égal $\Delta t/\Delta t_0$.

L'équation ci-dessus devient :

$$\nu = \nu_0 E \quad (3.28)$$

où la viscosité cinématique ν_0 choisie est celle de l'eau.

Cas où la conduite est horizontale

Dans le cas où la conduite est horizontale, l'écoulement est engendré par un gradient de pression créé entre l'entrée et le sortie de la conduite. La projection du poids $\vec{F}_g$ sur l'axe Oy qui représente la direction d'écoulement est égale à zéro (figure 3.6). Ceci revient à annuler dans l'équation (3.21) la gravité g . On obtient :

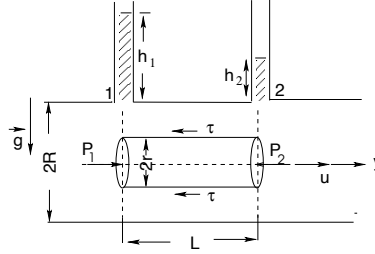


FIG. 3.6 – Rhéomètre de type Poiseuille en position horizontale.

$$Q_v = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \mu L}. \quad (3.29)$$

Nous avons aussi :

$$Q_v = U_m \pi R^2 = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \mu L} \quad (3.30)$$

et :

$$Q_{v0} = U_{m0} \pi R^2 = \frac{\pi R^4 \Delta P_0}{8 \mu_0 L}. \quad (3.31)$$

On peut aussi écrire :

$$\frac{L}{\Delta t} \pi R^2 = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \mu L} \quad (3.32)$$

et :

$$\frac{L}{\Delta t_0} \pi R^2 = \frac{\pi R^4 \Delta P_0}{8 \mu_0 L}. \quad (3.33)$$

Le rapport des équations (3.32) et (3.33) donne :

$$\boxed{\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta P_0} \frac{\mu_0}{\mu}}. \quad (3.34)$$

Dans le conduit horizontal, l'écoulement a lieu dans la direction des y . Donc P_1 est supérieur à P_2 . Les deux piézomètres sont ouverts sur l'atmosphère ; sur les deux surfaces libres aux hauteurs h_1 et h_2 , les pressions du fluide sont donc les mêmes et égales à la pression atmosphérique. On admet, comme dans le cas du conduit vertical, que la pression dans la conduite horizontale ne dépend que de la variable y . Ainsi dans toute la section droite à la base du premier piézomètre, la pression est P_1 . En particulier, on a P_1 au point 1 (figure 3.6). Dans le tube piézométrique, l'équilibre statique de la colonne de liquide conduit à : $P_1 - \rho g h_1 = P_a$, de même on a : $P_2 - \rho g h_2 = P_a$. La définition de la pression et la loi de l'hydrostatique seront précisées dans le Chapitre 6 (dans les paragraphes 6.2 et 6.3 pour la pression, et dans le paragraphe 6.6 pour la loi de l'hydrostatique). Dans cet exercice nous admettons l'ensemble de ces résultats.

La lecture des deux hauteurs h_1 et h_2 sur les deux piézomètres permet de déterminer la différence de pression $\Delta P = P_1 - P_2$. En effet,

$$P_2 - \rho g h_2 = P_1 - \rho g h_1 \quad (3.35)$$

ou bien : $P_1 - P_2 = \Delta P = \rho g h$ avec $h = h_1 - h_2$. (3.36)

Pour le liquide de référence, on a : $P_{1,0} - \rho_0 g h_{1,0} = P_{2,0} - \rho_0 g h_{2,0}$ (3.37)

ou bien : $P_{1,0} - P_{2,0} = \Delta P_0 = \rho_0 g h_0$ avec $h_0 = h_{1,0} - h_{2,0}$. (3.38)

Le rapport des équations (3.36) et (3.38) donne : $\frac{\Delta P}{\Delta P_0} = \frac{\rho h}{\rho_0 h_0}$. (3.39)

En remplaçant le rapport $\Delta P/\Delta P_0$ par son expression dans l'équation (3.34), on obtient :

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \frac{\rho h}{\rho_0 h_0} \frac{\mu_0}{\mu} \quad (3.40)$$

d'où l'on tire l'expression de la viscosité dynamique μ , tel que :

$$\mu = \mu_0 \frac{\rho h}{\rho_0 h_0} \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \quad (3.41)$$

qu'on peut mettre aussi sous la forme suivante :

$$v = \frac{h}{h_0} v_0 \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \quad \text{ou bien} \quad v = k_h v_0 \frac{\Delta t}{\Delta t_0}. \quad (3.42)$$

C'est une équation similaire à l'équation (3.27) obtenue précédemment en étudiant le viscosimètre d'Ostwald avec la présence d'un coefficient sans dimension $k_h = h/h_0$.

3.4.2 Le viscosimètre à bille

Le viscosimètre à chute de bille est basé sur le principe de mesure d'Höppler. Il permet une mesure simple et précise de la viscosité dynamique des fluides newtoniens transparents.

Le principe est de chronométrer le temps de chute d'une bille soumise à son propre poids dans un tube rempli de liquide. Ce dernier représente l'échantillon pour lequel on doit mesurer la viscosité. Une formule de conversion permet de transformer le temps mesuré en valeur de viscosité. Cette méthode efficace permet d'obtenir des mesures de viscosité très pertinentes.

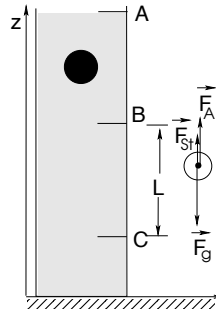


FIG. 3.7 – Viscosimètre à chute de bille.

Sur le schéma de la figure 3.7, la sphère est soumise à trois forces :

1. son poids $\vec{F}_g = m \vec{g} = \rho_s V \vec{g}$,
2. la poussée d'Archimède $\vec{F}_A = \rho V \vec{g}$,
3. la force de frottement $\vec{F}_{St} = 6 \pi \mu R \vec{u}$. C'est la force de Stokes³ pour des écoulements à faible nombre de Reynolds.

3. George Gabriel Stokes (13 août 1819 – 1^{er} février 1903), est un mathématicien et physicien britannique né en Irlande. Professeur de l'Université de Cambridge, il apporta des contributions majeures concernant la mécanique des fluides (Navier-Stokes par exemple), l'optique et la géodésie. Il a été nommé baronnet pour le mérite scientifique.

Les notations sont les suivantes :

ρ_s la masse volumique de la sphère,

ρ la masse volumique du liquide,

μ la viscosité dynamique du liquide,

R le rayon de la sphère et,

V le volume de la sphère égal à $4\pi R^3/3$.

La poussée d'Archimède sera étudiée dans le chapitre 14 de cet ouvrage. Quant à la force de frottement, dite aussi traînée de Stokes, elle sera démontrée dans des cours plus avancées de mécanique des fluides. Ici nous admettons cette formule. La somme vectorielle des trois forces s'annule lorsque la sphère atteint sa vitesse terminale c'est-à-dire une vitesse limite constante. Pratiquement, la sphère atteint sa vitesse terminale dès son arrivée au repère A. Elle parcourt donc le trajet $BC = L$ à vitesse constante que nous notons u_T . On a donc :

$$\vec{F}_g + \vec{F}_A + \vec{F}_{St} = \vec{0}. \quad (3.43)$$

La projection sur l'axe Oz donne : $-F_g + F_A + F_{St} = 0$ (3.44)

ou bien : $-\rho_s V g + \rho V g + 6\pi\mu R u_T = 0.$ (3.45)

En mettant en facteur la quantité $V g$ et en remplaçant le volume V par son expression, l'équation (3.45) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$-(\rho_s - \rho) \frac{4}{3} \pi R^3 g + 6\pi\mu R u_T = 0. \quad (3.46)$$

à partir de laquelle on peut tirer l'expression de μ telle que :

$$\mu = \frac{2R^2}{9u_T} (\rho_s - \rho) g. \quad (3.47)$$

Comme il a été présenté ci-dessus, le viscosimètre à chute de bille permet de mesurer le temps nécessaire à la chute d'une bille soumise à la gravité dans un tube rempli avec l'échantillon à tester. Comme le mouvement de la bille est rectiligne et uniforme à partir du repère B (voir figure 3.7), la distance parcourue est $L = u_T \Delta t$. On déduit la vitesse terminale u_T tel que $u_T = L/\Delta t$ où L et Δt sont mesurés donc connus. En remplaçant u_T par son expression dans l'équation (3.47), on obtient :

$$\mu = \frac{2R^2}{9L} (\rho_s - \rho) g \Delta t \quad (3.48)$$

qu'on peut mettre sous la forme : $\mu = K(\rho_s - \rho) \Delta t$ (3.49)

avec : $K = 2gR^2/9L$ (K constante dont la valeur est donnée par le fabricant).

3.5 Exercices

Exercice 3.1.

Les propriétés rhéologiques d'une suspension particulière peuvent être raisonnablement approximées par un modèle plastique de « Bingham ». Lorsqu'il y a écoulement, on suppose que le comportement obéit à une loi de puissance, sur la gamme de vitesse de cisaillement de 10 à 50 s^{-1} . On admet que le coefficient de consistance, K est égal à $10 \text{ N s}^n/\text{m}^2$ et l'indice de comportement d'écoulement, n est $0,2$ dans le modèle de la loi de puissance (voir la

formule 3.1). Quelles seront les valeurs approximatives de la limite élastique et de la viscosité apparente plastique dans le modèle de Bingham ?

Solution 3.1.

Calculons la valeur la limite élastique τ_0 et celle de la viscosité apparente μ_{app} . D'après la loi de puissance, on a :

$$\tau = 10 \times \left(\frac{du}{dy} \right)^{0,2},$$

pour $du/dy = 10 \text{ s}^{-1}$, on a : $\tau = 10 \times (10)^{0,2} \simeq 15,85 \text{ Pa}$,

pour $du/dy = 50 \text{ s}^{-1}$, on a : $\tau = 10 \times (50)^{0,2} \simeq 21,87 \text{ Pa}$.

D'après le modèle de Bingham : $\tau = \tau_0 + \mu_{app} \left(\frac{du}{dy} \right)$

en remplaçant la contrainte τ et le gradient des vitesses du/dy par leurs valeurs calculées précédemment, on obtient :

$$\begin{cases} 15,85 = \tau_0 + \mu_{app}(10), \\ 21,87 = \tau_0 + \mu_{app}(50). \end{cases}$$

La résolution de ce système de deux équations conduit à la valeur de la contrainte $\tau_0 = 14,28 \text{ Pa}$ et à la valeur de la viscosité apparente $\mu_{app} = 0,152 \text{ N s/m}^2$. L'équation de Bingham est :

$$\tau = 14,28 + 0,152 \left(\frac{du}{dy} \right).$$

Exercice 3.2.

Un liquide newtonien de viscosité $\mu = 0,1 \text{ N s/m}^2$ circule dans une conduite. À la suite d'un changement de procédé, une petite quantité de polymère est ajoutée au liquide, ce qui fait que le liquide présente des caractéristiques non-newtoniennes ; sa rhéologie est décrite de manière adéquate par le modèle « loi de puissance » et l'indice d'écoulement est $n = 0,33$. La viscosité apparente (μ_{app}) du fluide modifié est égale à la viscosité (μ) du liquide d'origine à un taux de cisaillement, $du/dy = 1000 \text{ s}^{-1}$. Déterminer la loi de puissance appelée équation rhéologique ?

Solution 3.2.

Déterminons l'équation rhéologique. La forme de cette dernière est connue et elle est donnée par la loi de puissance (3.1). Il suffit de calculer le coefficient de consistance K . D'après les équations (3.1) et (3.2) on a :

$$\mu_{app} = K \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1} \text{ et } 0,1 = K \times (1000)^{0,33-1}$$

d'où on tire $K = 10 \text{ Pa s}^n$. L'équation rhéologique est : $\tau = 10 (du/dy)^{0,33}$.

Exercice 3.3.

Les propriétés rhéologiques d'une suspension d'argile de porcelaine peuvent être estimées par un modèle plastique de Bingham. Lorsqu'il y a écoulement, on suppose que le comportement obéit à une loi de puissance, sur une plage de vitesse de cisaillement de 10 à 100 s⁻¹. Si la contrainte seuil appelée aussi la limite d'élasticité est de 15 Pa et que la viscosité plastique est de 150 mPas, quelles seront les valeurs approximatives du coefficient de consistance de la loi de puissance et de l'indice de comportement d'écoulement ?

Solution 3.3.

En utilisant le modèle plastique de Bingham, on a $\tau = \tau_0 + \mu_{app}(du/dy)$.

Pour $du/dy = 10$, on a : $\tau = 15 + 0,15 \times 10 = 16,5 \text{ Pa}$,

pour $du/dy = 100$, on a : $\tau = 15 + 0,15 \times 100 = 30 \text{ Pa}$.

Utilisons à présent la loi de puissance pour déterminer le coefficient de consistance K et l'indice de comportement de l'écoulement n , on a :

$$16,5 = K (10)^n \text{ et } 30 = K (100)^n.$$

On obtient un système de deux équations à deux inconnues K et n . Le rapport de ces deux équations donne :

$$\frac{30}{16,5} = \frac{(100)^n}{(10)^n} = 10^n$$

c'est-à-dire : $1,82 = 10^n$ ou bien : $n = \frac{(\ln 1,82)}{\ln(10)} \simeq \frac{0,599}{2,303} \simeq 0,26$.

On peut calculer à présent la valeur du coefficient de consistance K , on a :

$$K = \frac{16,5}{10^{0,26}} \simeq \frac{16,5}{1,82} \simeq 9,07 \text{ Pa s}^n$$

et l'équation de la loi de puissance est : $\tau = 9,07 \left(\frac{du}{dy} \right)^{0,26}$.

Exercice 3.4.

Considérons un viscosimètre à écoulement laminaire (viscosimètre d'Ostwald) de rayon R et de hauteur L . On note V le volume compris entre les deux repères A et B (figure 3.4).

1. On place un liquide de référence de masse volumique ρ_0 dans le viscosimètre, et on mesure un temps de chute Δt_0 pour le fluide placé entre les deux repères A et B. Exprimer la viscosité dynamique μ_0 de ce liquide de référence en fonction des caractéristiques du viscosimètre et de Δt_0 .
2. Après avoir rincé et séché soigneusement le viscosimètre, on l'utilise avec un liquide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ pour lequel le temps chronométré vaut Δt . Exprimer sa viscosité en fonction de celle du liquide de référence.
3. Le liquide de référence utilisé est de l'eau pure : $\mu_0 = 10^{-3} \text{ Pa s}$ et $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$. On mesure $\Delta t_0 = 6 \text{ min } 31 \text{ s}$. Calculer la constante de ce viscosimètre.
4. Le liquide étudié de masse volumique $\rho = 768 \text{ kg/m}^3$ donne $\Delta t = 7 \text{ min } 13 \text{ s}$. Déterminer sa viscosité dynamique μ .
5. Une mesure du volume donne $V = 5 \text{ ml}$, en déduire le rayon du capillaire et la vitesse moyenne d'écoulement.

Solution 3.4.

1. Pour le liquide de référence, l'équation (3.25) peut s'écrire : $\mu_0 = K \rho_0 \Delta t_0$ en considérant $K = g R^2 / 8 L$. La constante K dépend du viscosimètre.

2. On fait de même pour l'échantillon et on obtient : $\mu = K \rho \Delta t$.

Le rapport des deux expressions ci-dessus donne l'équation (3.26), c'est-à-dire :

$$\mu = \mu_0 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\Delta t}{\Delta t_0}.$$

3. Si on utilise l'eau pure comme liquide de référence, la constante du viscosimètre peut être calculée comme suit :

$$K = \frac{\mu_0}{\rho_0 \Delta t_0} = \frac{10^{-3}}{10^3 \times 391} \simeq 2,56 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}.$$

4. La valeur de la viscosité dynamique μ pour l'échantillon est :

$$\mu = K \rho \Delta t = 2,56 \times 10^{-9} \times 768 \times 433 \simeq 0,851 \text{ Pas}.$$

5. Pour le rayon du tube capillaire, on peut utiliser l'équation suivante : $K = g R^2 / 8 L$, d'où l'on tire l'expression du rayon R tel que : $R = \sqrt{8 K L / g}$.

C'est le volume $V = \pi R^2 L$ qui est donné à partir duquel on tire L tel que :

$$L = \frac{V}{\pi R^2}.$$

En remplaçant L par son expression dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$R = \left(\frac{8 K V}{\pi g} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{8 \times 2,56 \times 10^{-9} \times 5 \times 10^{-6}}{3,14 \times 9,81} \right)^{\frac{1}{4}} \simeq 0,76 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Pour calculer la vitesse moyenne U_m , il faut connaître le débit volumique Q_v (volume par unité de temps). Ceci peut être obtenu en divisant le volume V par le temps Δt . Il vient :

$$Q_v = \frac{5 \times 10^{-6}}{433} \simeq 1,155 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Le débit volumique est aussi égal au produit de la vitesse moyenne d'écoulement par la surface S de la section du tube, c'est-à-dire : $Q_v = U_m S$.

La surface de la section du tube est $S = \pi R^2$ c'est-à-dire :

$$S = 3,14 \times (0,76 \times 10^{-4})^2 \simeq 1,814 \times 10^{-8} \text{ m}^2$$

La vitesse moyenne est dans ce cas là : $U_m = \frac{Q_v}{S} = \frac{1,155 \times 10^{-8}}{1,814 \times 10^{-8}} \simeq 0,64 \text{ m/s}.$

Exercice 3.5.

La loi de Stokes donne la force de frottement $\vec{F}_{St} = -6\pi\mu R \vec{u}$ s'exerçant sur une sphère de rayon R , se déplaçant à la vitesse $\vec{u}$ dans un liquide de masse volumique ρ_l . Une bille sphérique de masse volumique ρ_s et de rayon R est abandonnée sans vitesse initiale dans un tube vertical contenant ce liquide de viscosité μ à la température constante T (voir figure 3.7). Le tube porte trois repères A , B et C , régulièrement espacés : $AB = BC = 10 \text{ cm}$. On suppose la loi de Stokes vérifiée.

1. Faire le bilan des forces agissant sur la bille, et appliquer la relation fondamentale de la dynamique.
2. En déduire que la bille atteint une vitesse terminale de norme u_T et l'exprimer à partir de ρ_l , μ , R et ρ_s .
3. Quand cette vitesse terminale est atteinte, montrer que la viscosité dynamique est proportionnelle au temps de chute de la bille.
4. Une mesure du temps de chute donne : $\Delta t_1 = 16 \text{ s}$ (la bille a un mouvement accéléré $u \leq u_T$) pour parcourir AB , puis $\Delta t_2 = 15,9 \text{ s}$ (la bille à un mouvement uniforme et se déplace avec la vitesse terminale u_T) pour parcourir BC . Calculer la viscosité dynamique de ce liquide.
Données : $\rho_l = 1260 \text{ kg/m}^3$; $\rho_s = 3800 \text{ kg/m}^3$; $R = 1,25 \text{ mm}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Solution 3.5.

1. Bilan des forces : l'équation vectorielle traduisant la loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F}_{St} + \vec{F}_A + \vec{F}_g = m \vec{\gamma} \quad (1)$$

où le vecteur $\vec{\gamma}$ est l'accélération de la bille et m sa masse. La projection de toutes ces forces sur l'axe Oz donne :

$$6\pi\mu Ru + \rho_l gV - mg = -m \frac{du}{dt} \quad (2)$$

où V est le volume de la bille, qui est aussi le volume du liquide déplacé. Le signe $(-)$ dans le second membre de l'équation (2) est dû au fait que le mouvement se fait dans le sens inverse à l'axe Oz. L'équation ci-dessus peut aussi s'écrire :

$$6\pi\mu Ru + \rho_l gV - \rho_s gV = -\rho_s V \frac{du}{dt}.$$

Sachant que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, on obtient après simplification :

$$\frac{du}{dt} + \frac{9\mu}{2\rho_s R^2} u = \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_s} g. \quad (3)$$

2. Résolution de l'équation ci-dessus : on a plusieurs méthodes à notre disposition. La plus simple est de faire un changement de variable en posant par exemple :

$$v = \frac{9\mu}{2\rho_s R^2} u - \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_s} g = K_1 u - K_2.$$

La dérivée de v par rapport à t donne :

$$\frac{dv}{dt} = K_1 \frac{du}{dt}$$

soit :

$$\frac{1}{K_1} \frac{dv}{dt} + v = 0$$

ou bien :

$$\frac{dv}{v} = -K_1 dt.$$

L'intégration de l'équation ci-dessus donne :

$$\ln \frac{v}{C} = -K_1 t$$

soit :

$$v = C e^{-K_1 t}$$

où C est la constante d'intégration.

En remplaçant v par son expression, on obtient :

$$K_1 u - K_2 = C e^{-K_1 t}.$$