

BUT

Vincent Richefeu
Gérald Hivin
Joseph Lisi
Pascal Villard

Les fondements de la mécanique des structures

Une introduction à l'usage
des étudiants du BUT
Génie Civil-Construction Durable
(GCCD)



Chapitre 1

Pré-requis en mathématiques

L'étude des structures et de leur comportement nécessite des notions incontournables en mathématique afin d'appréhender les principes fondamentaux qui les sous-tendent. Avec l'évolution du système éducatif, notamment les nouvelles orientations des baccalauréats généraux, il est devenu évident que les étudiants débutant leur première année au Bachelor Universitaire de Technologie (BUT) n'ont pas forcément acquis toutes les compétences mathématiques requises pour aborder sereinement les fondements de la mécanique des structures (et bien d'autres matières d'ailleurs).

Les choix multiples offerts aux étudiants au cours de leurs années de lycée peuvent engendrer des disparités dans les connaissances préalables, et il est impératif de combler ces lacunes pour assurer une compréhension approfondie des concepts à venir. Ce chapitre s'inscrit dans cette perspective, en visant à fournir une mise à niveau des compétences en mathématiques essentielles à la compréhension et à la résolution des problèmes qui seront rencontrés dans le domaine de la mécanique des structures.

Sans prétendre à l'exhaustivité, notre objectif principal est d'offrir aux étudiants les outils mathématiques nécessaires pour appréhender les notions fondamentales de la mécanique des structures. À travers des explications simplifiées et des exercices ciblés, ce chapitre vise à créer une base solide, favorisant ainsi une immersion progressive dans l'étude des structures et de leurs comportements. En embrassant cette approche, nous cherchons à établir un équilibre entre la théorie mathématique et son application concrète dans le domaine de la mécanique des structures, préparant ainsi les étudiants à relever avec confiance les défis techniques de calcul analytique auxquels ils seront confrontés.

1.1 Simplifications d'expressions littérales

La simplification d'une expression mathématique consiste à réduire au maximum son apparence tout en conservant sa signification mathématique. Voici une démarche générale pour simplifier une expression :

- ☛ identifier les termes constants (ici $5a^2$, $3b$ et 7) et les termes variables (ici x et y), et organiser l'expression de manière logique et claire. Par exemple :

$$2xy + 5a^2 + 3b - 4x^2 + 7 \xrightarrow{\text{se réorganise en}} -4x^2 + 2xy + (5a^2 + 3b + 7)$$

- ☛ combiner les termes similaires en additionnant ou en soustrayant les coefficients. Assurez-vous de respecter le signe de chaque terme. Par exemple :

$$3x + 2y - 4x + 5y - 2 \xrightarrow{\text{se combine en}} -x + 7y - 2$$

- ☛ utiliser les règles de factorisation pour simplifier davantage. Par exemple :

$$3x^2 + 6x + 2x + 4 \xrightarrow{\text{se factorise en}} 3x(x+2) + 2(x+2) \xrightarrow{\text{se factorise en}} (3x+2)(x+2)$$

- ☛ réduire les fractions en simplifiant le numérateur et le dénominateur par leur plus grand diviseur commun. Par exemple :

$$\frac{24}{36} \xrightarrow{\text{se simplifie en}} \frac{24 \div 12}{36 \div 12} = \frac{2}{3}$$

car 12 est le plus grand dénominateur commun à 24 et 36.

- ☛ appliquer les règles mathématiques pour simplifier les termes avec des exposants. En particulier, $x^a \times x^b = x^{a+b}$ et $\frac{1}{x^c} = x^{-c}$. Par exemple :

$$\frac{x^4 \cdot x^2}{x^5} \xrightarrow{\text{se simplifie en}} \frac{x^6}{x^5} = x^6 \times x^{-5} = x^{6-5} = x$$

- ☛ si possible, utiliser les trois identités remarquables du second degré pour simplifier davantage :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Pendant la procédure de simplification, il est important de garder à l'esprit les domaines de validité des variables pour éviter des simplifications non valides. De plus, puisqu'il s'agit ici de mathématiques appliquées à la physique, il est souvent utile de vérifier la cohérence des unités. Ainsi, à titre d'exemple, une longueur **ne peut pas** être une force divisée par un temps, mais le sens physique ne lui interdit pas d'être une vitesse multipliée par un temps.



Exercice 1

Simplifier (le plus possible) et mettre sous la forme d'une seule fraction.

- | | |
|--|---|
| a) $(2L)^3 \times (3L)^2$ | b) $\frac{(2L)^3}{(\sqrt{3}L)^2}$ |
| c) $\frac{(-3a)^2 \times a^5}{7a^{11}}$ | d) $1 + \frac{1}{\theta}$ |
| e) $\frac{2c}{a^3b} - \frac{3}{ab^2c}$ | f) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$ |
| g) $\frac{1}{L} + \frac{2}{L^2} + \frac{3}{L^3}$ | h) $\left(\frac{b}{ac^2}\right)^{-1} \times \left(\frac{2c^2}{a^3b}\right)^5$ |



Correction de l'exercice 1

- | |
|---|
| a) $(2L)^3 \times (3L)^2 = (2^3L^3) \times (3^2L^2) = 8L^3 \times 9L^2 = 8 \times 9 \times L^{3+2} = \boxed{72L^5}$ |
| b) $\frac{(2L)^3}{(\sqrt{3}L)^2} = \frac{8L^3}{3L^2} = \boxed{\frac{8L}{3}}$ |
| c) $\frac{(-3a)^2 \times a^5}{7a^{11}} = \frac{9a^2 \times a^5}{7a^{11}} = \frac{9a^7}{7a^{11}} = \boxed{\frac{9}{7a^4}}$ |
| d) $1 + \frac{1}{\theta} = \frac{\theta}{\theta} + \frac{1}{\theta} = \boxed{\frac{1+\theta}{\theta}}$ |
| e) $\frac{2c}{a^3b} - \frac{3}{ab^2c} = \frac{2bc^2}{a^3b^2c} - \frac{3a^2}{a^3b^2c} = \boxed{\frac{2bc^2 - 3a^2}{a^3b^2c}}$ |
| f) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{a^2}{bca} + \frac{b^2}{acb} + \frac{c^2}{abc} = \boxed{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}}$ |

$$g) \frac{1}{L} + \frac{2}{L^2} + \frac{3}{L^3} = \frac{L^2}{L^3} + \frac{2L}{L^3} + \frac{3}{L^3} = \boxed{\frac{L^2 + 2L + 3}{L^3}}$$

$$h) \left(\frac{b}{ac^2}\right)^{-1} \times \left(\frac{2c^2}{a^3b}\right)^5 = \left(\frac{ac^2}{b}\right) \times \left(\frac{32c^{10}}{a^{15}b^5}\right) = \frac{32ac^{12}}{a^{15}b^6} = \boxed{\frac{32c^{12}}{a^{14}b^6}}$$

1.2 Équations linéaires à une inconnue

Résoudre une équation linéaire à une inconnue consiste à trouver la valeur de l'inconnue qui satisfait l'équation. En pratique, le principe consiste à déplacer tous les termes qui ne contiennent pas l'inconnue du côté opposé de l'équation. La manipulation des équations linéaires implique l'utilisation de certaines règles de base. Voici les deux règles principales pour manipuler des équations linéaires :

- ☛ Addition ou soustraction des mêmes termes des deux côtés. Si vous ajoutez ou soustrayez le même terme des deux côtés de l'équation, l'équation reste équivalente. Exemple :

$$2x + 5 = 10 \xrightarrow{-5} 2x + 5 - 5 = 10 - 5 \Rightarrow 2x = 5$$

- ☛ Multiplication par le même nombre non nul des deux côtés. Si vous multipliez les deux côtés de l'équation par le même nombre non nul, l'équation reste équivalente. Exemple :

$$2x = 5 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 2x \times \frac{1}{2} = 5 \times \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

En suivant ces règles élémentaires, vous pouvez manipuler des équations linéaires de manière à isoler l'inconnue et trouver sa valeur. Il est essentiel de maintenir l'équation équilibrée en appliquant les mêmes opérations des deux côtés.

Exercice 2

Isoler l'inconnue x et simplifier.

a) $2x - 3 = 0$

b) $-x - 3 = 2$

c) $-4x + 8 = -1$

d) $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

e) $-\frac{x}{4} + 2 = -\frac{2}{3}$

f) $\frac{x}{3} - 1 = -\frac{5}{2}$



Correction de l'exercice 2

$$\text{a) } 2x - 3 = 0 \xrightarrow{+3} 2x = 3 \xrightarrow{\div 2} \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$\text{b) } -x - 3 = 2 \xrightarrow[-2]{+x} -3 - 2 = x \Rightarrow \boxed{x = -5}$$

$$\text{c) } -4x + 8 = -1 \xrightarrow[+1]{+4x} 8 + 1 = 4x \xrightarrow{\div 4} \boxed{x = \frac{9}{4}}$$

$$\text{d) } x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \xrightarrow{+1/3} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{3+2}{2 \times 3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{6}}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } -\frac{x}{4} + 2 &= -\frac{2}{3} \xrightarrow[+2/3]{+x/4} 2 + \frac{2}{3} = \frac{x}{4} \\ \Rightarrow \frac{6+2}{3} &= \frac{x}{4} \xrightarrow{\times 4} x = 4 \times \frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{32}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{x}{3} - 1 &= -\frac{5}{2} \xrightarrow{+1} \frac{x}{3} = \frac{-5+2}{2} \xrightarrow{\times 3} x = 3 \times \frac{-3}{2} \\ \Rightarrow \boxed{x &= -\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

En mathématiques, et donc en mécanique, les termes « inconnue » et « paramètre littéral » se réfèrent à des concepts différents dans le contexte des équations. L'inconnue est la valeur que l'on cherche à trouver dans une équation. Elle est souvent représentée par une lettre, généralement x ou t , mais elle peut être notée, par exemple, θ s'il s'agit d'un angle ou même F s'il s'agit d'une force. L'objectif est de résoudre l'équation en trouvant une valeur ou un ensemble de valeurs pour cette inconnue qui satisfait l'équation.

Un paramètre littéral est également représenté par une lettre, mais contrairement à une inconnue, il ne s'agit pas d'une valeur que nous essayons de trouver. Il est utilisé comme un coefficient ou un facteur constant dans une équation. Les paramètres littéraux restent constants tout au long de la résolution de l'équation. Considérons, par exemple, l'équation :

$$qx - P - Y_B = 0$$

Ici, q , P et Y_B sont des **paramètres littéraux** pouvant être traités comme des constantes données, et un objectif peut être de résoudre l'équation pour déterminer l'**inconnue** x .

En résumé, l'inconnue est la valeur que vous essayez de trouver dans une équation, tandis que les paramètres littéraux sont traités comme des constantes sensées être connues. Il est important de faire la distinction entre les deux concepts lors de la résolution d'équations pour éviter toute confusion. L'objectif de l'exercice suivant est de se familiariser avec ces notions de variables et de paramètres.



Exercice 3

La relation qui lie le déplacement vertical δ de l'extrémité d'une poutre console (on verra plus tard de quoi il s'agit) aux données du problème s'écrit :

$$\delta = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

où ℓ est la longueur de la poutre, P est le poids placé au bout de la poutre, E et I sont respectivement des propriétés élastique et géométrique de la poutre. En considérant les propriétés E et I comme fixées, répondre aux questions suivantes :

- Quelle est l'expression du poids P si on mesure un déplacement vertical δ pour une poutre de longueur ℓ donnée ?
- Quelle est l'expression de la longueur ℓ si on mesure un déplacement vertical δ pour un poids P donné ?
- Comment doit être modifié le poids P pour que le déplacement δ soit réduit d'un quart ?
- Comment doit être modifiée la longueur ℓ pour que le déplacement δ soit réduit de moitié ?



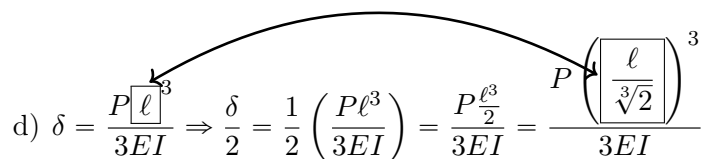
Correction de l'exercice 3

$$\text{a) } \delta = \frac{P\ell^3}{3EI} \Rightarrow \delta \times 3EI = P\ell^3 \Rightarrow \frac{3EI\delta}{\ell^3} = P \Rightarrow \boxed{P = \frac{3EI\delta}{\ell^3}}$$

$$\text{b) } \delta = \frac{P\ell^3}{3EI} \Rightarrow \ell^3 = \frac{3EI\delta}{P} \Rightarrow \boxed{\ell = \sqrt[3]{\frac{3EI\delta}{P}}}$$

$$\text{c) } \delta = \frac{\boxed{\frac{P}{4}}\ell^3}{3EI} \Rightarrow \frac{3}{4}\delta = \frac{3}{4} \left(\frac{P\ell^3}{3EI} \right) = \frac{\boxed{\frac{3P}{4}}\ell^3}{3EI}$$

Pour que le déplacement δ soit réduit d'un quart, il faut donc également réduire le poids P d'un quart de sa valeur.



$$\text{d) } \delta = \frac{P \ell^3}{3EI} \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{P \ell^3}{3EI} \right) = \frac{P \frac{\ell^3}{2}}{3EI} = \frac{P \left(\frac{\ell}{\sqrt[3]{2}} \right)^3}{3EI}$$

Pour que le déplacement δ soit réduit de moitié, il faut donc diviser la longueur de la poutre par $\sqrt[3]{2} \simeq 1.26$.

1.3 Système de deux équations linéaires à deux inconnues

Résoudre un système de deux équations linéaires avec deux inconnues peut être accompli par différentes méthodes. Nous en présentons deux : les méthodes par substitution et par combinaison.

1.3.1 Méthode par substitution d'une variable

Considérons un système de deux équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 6 \end{cases} \quad \text{cas particulier de la forme} \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Les étapes de résolution par substitution sont les suivantes :

- ☛ **Choisir l'une des équations et isoler l'une des inconnues.** Par exemple, supposons que nous isolions y dans la première équation :

$$\begin{cases} 3y = 7 - 2x \\ 4x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{7 - 2x}{3} \\ 4x - y = 6 \end{cases}$$

- ☛ **Substituer dans l'autre équation.** Prendre l'expression obtenue dans l'étape précédente et la substituer dans l'autre équation pour créer une nouvelle équation avec une seule inconnue.

$$\begin{cases} y = \frac{7 - 2x}{3} \\ 4x - \underbrace{\frac{7 - 2x}{3}}_y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{7 - 2x}{3} \\ \frac{14x}{3} - \frac{7}{3} = 6 \end{cases}$$

- ☛ **Résoudre l'équation obtenue** pour trouver la valeur de l'inconnue.

$$\frac{14x - 7}{3} = 6 \Rightarrow 14x - 7 = 18 \Rightarrow 14x = 25 \Rightarrow \boxed{x = \frac{25}{14}}$$

- ☛ **Substituer la valeur trouvée dans l'une des équations originales** pour trouver la valeur de l'autre inconnue.

$$4x - y = 6 \Rightarrow y = 4x - 6 = 4 \times \frac{25}{14} - \frac{6 \times 14}{14} = \frac{16}{14} \Rightarrow \boxed{y = \frac{8}{7}}$$

- ☛ **Vérifier** que les valeurs trouvées pour les deux inconnues satisfont les deux équations originales.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \times \frac{25}{14} + 3 \times \frac{8}{7} = \frac{98}{14} = 7 \quad \checkmark \\ 4 \times \frac{25}{14} - \frac{8}{7} = \frac{84}{14} = 6 \quad \checkmark \end{cases}$$

Si cela semble un peu complexe au premier abord, la pratique permet de surmonter cette impression.



Exercice 4

Résoudre avec la **méthode par substitution** les systèmes d'équations linéaires suivants.

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 45 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5F_1 + 20F_2 = 65 \\ 4F_1 + 8F_2 = 28 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2a + 8b = 6 \\ 5a + 2b = 6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4F + T - 7 = 0 \\ 2F + 3T - 11 = 0 \end{cases}$$



Correction de l'exercice 4

Ces quatre systèmes d'équations peuvent être résolus avec la méthode par substitution.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 45 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 45 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 3y = 45 \\ x = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5y = 45 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y = 9 \\ x = 9 \end{cases}}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5F_1 + 20F_2 = 65 \\ 4F_1 + 8F_2 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5F_1 + 20F_2 = 65 \\ 4F_1 = 28 - 8F_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5F_1 + 20F_2 = 65 \\ F_1 = 7 - 2F_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \times (7 - 2F_2) + 20F_2 = 65 \\ F_1 = 7 - 2F_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10F_2 = 30 \\ F_1 = 7 - 2F_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} F_2 = 3 \\ F_1 = 1 \end{cases}}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2a + 8b = 6 \\ 5a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 6 - 8b \\ 5a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 - 4b \\ 5a + 2b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 - 4b \\ 5 \times (3 - 4b) + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 - 4b \\ -18b = -9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4F + T - 7 = 0 \\ 2F + 3T - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 7 - 4F \\ 2F + 3T - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = 7 - 4F \\ 2F + 3 \times (7 - 4F) - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 7 - 4F \\ -10F + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} T = 3 \\ F = 1 \end{cases}}$$

1.3.2 Méthode par combinaison des équations

Une autre méthode consiste à combiner les deux équations de manière à se débarrasser d'une inconnue. Pour résoudre le système par combinaison des équations, reprenons le système d'équations linéaires à deux inconnues que nous avons étudié précédemment. Afin de faciliter la compréhension et l'application de cette méthode, nous allons réorganiser les équations en alignant les termes similaires :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$$

- ☛ Si nécessaire, **multiplier les équations** par des coefficients appropriés afin que le coefficient d'une des inconnues (celle qu'on veut éliminer) soit le même dans les deux équations. Dans notre exemple, multiplions la deuxième équation par 3 pour que le terme $\pm 3y$ apparaisse dans les deux équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3 \times (4x - y) = 3 \times 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 12x - 3y = 18 \end{cases}$$

- ☛ **Additionner ou soustraire les équations** obtenues à l'étape précédente. Cela créera une nouvelle équation avec une seule inconnue.

$$(2x + 12x) + (3y + (-3y)) = (7 + 18) \Rightarrow 14x = 25$$

- ☛ **Résoudre l'équation obtenue** pour trouver la valeur de l'inconnue.

$$14x = 25 \Rightarrow \boxed{x = \frac{25}{14}}$$

- ☛ **Substituer** la valeur trouvée dans l'une des équations originales pour trouver la valeur de l'autre inconnue.

$$4x - y = 6 \Rightarrow 4 \times \frac{25}{14} - y = 6 \Rightarrow \boxed{y = \frac{8}{7}}$$

- ☛ **Vérifier la solution** et assurez-vous que les valeurs trouvées pour les deux inconnues satisfont les deux équations originales.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \times \frac{25}{14} + 3 \times \frac{8}{7} = \frac{98}{14} = 7 \quad \checkmark \\ 4 \times \frac{25}{14} - \frac{8}{7} = \frac{84}{14} = 6 \quad \checkmark \end{cases}$$

**Exercice 5**

Résoudre avec la **méthode par combinaison** les systèmes d'équations linéaires suivants.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 45 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5F_1 + 20F_2 = 65 \\ 4F_1 + 8F_2 = 28 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2a + 8b = 6 \\ 5a + 2b = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4F + T - 7 = 0 \\ 2F + 3T - 11 = 0 \end{cases}$$

**Correction de l'exercice 5**

En appelant la première équation ① et la seconde équation ②, ces quatre systèmes d'équations peuvent être résolus avec la méthode par combinaison.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 45 & \text{①} \\ x - y = 0 & \text{②} \end{cases}$$

Considérons la combinaison ① - 2 × ② :

$$5y = 45 \Rightarrow y = \frac{45}{5} \Rightarrow \boxed{y = 9}$$

En utilisant cette valeur de y dans l'équation ②, on trouve :

$$x - y = 0 \Rightarrow x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 9}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5F_1 + 20F_2 = 65 & \text{①} \\ 4F_1 + 8F_2 = 28 & \text{②} \end{cases}$$

Considérons la combinaison 4 × ① - 5 × ② :

$$40F_2 = 120 \Rightarrow F_2 = \frac{120}{40} \Rightarrow \boxed{F_2 = 3}$$

En utilisant cette valeur de F_2 dans l'équation ②, on trouve :

$$4F_1 + 8 \times 3 = 28 \Rightarrow 4F_1 + 24 = 28 \Rightarrow \boxed{F_1 = 1}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2a + 8b = 6 & \text{①} \\ 5a + 2b = 6 & \text{②} \end{cases}$$

Considérons la combinaison ① $- 4 \times$ ② :

$$-18a = -18 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1}$$

En utilisant cette valeur de a dans l'équation ②, on trouve :

$$2 + 8b = 6 \quad \Rightarrow \quad 8b = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

$$\text{d)} \quad \begin{cases} 4F + T - 7 = 0 & \text{①} \\ 2F + 3T - 11 = 0 & \text{②} \end{cases}$$

Considérons la combinaison ① $- 2 \times$ ② :

$$-5T + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{-15}{-5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 3}$$

En utilisant cette valeur de T dans l'équation ②, on trouve :

$$2F + 3 \times 3 - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2F = 11 - 9 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 1}$$

1.4 Dérivation d'un polynôme

Un polynôme est une expression algébrique constituée de plusieurs termes, chaque terme étant une variable élevée à une puissance (positive ou nulle), multipliée par un coefficient constant. Formellement, un polynôme est de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m = \sum_{n=0}^m a_n x^n$$

où $P(x)$ est la fonction polynomiale, x est la variable, $a_0, \dots, a_m$ sont les coefficients constants (certains éventuellement nuls). La valeur de m (disons un entier positif ou nul) est le degré du polynôme, c'est-à-dire le plus grand exposant dans le polynôme, à condition que a_m ne soit pas nul.

Pour dériver chaque terme¹, il est nécessaire d'utiliser la règle de dérivation d'un *monôme* de la forme $a x^n$: $\frac{d}{dx}(a x^n) = n a x^{n-1}$ pour $\{n \in \mathbb{Z}\}$. Il faut donc

1. Rappelons-nous que « la dérivée d'une somme est la somme des dérivées ».

appliquer cette règle à chaque monôme du polynôme, ce qui s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_n a_n x^n \right) = \sum_n n a_n x^{n-1}$$



Exercice 6

Déterminer l'expression dérivée $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ des polynômes suivants.

- a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$
- b) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$
- c) $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 2$
- d) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^2} + 3x - 5$ (Rappel : $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$)



Correction de l'exercice 6

- a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$
- b) $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 10x - 7$
- c) $f'(x) = 20x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 12x - 5$
- d) $f'(x) = 4x^3 - 2x^{-3} + 3 = 4x^3 - \frac{2}{x^3} + 3$ (Rappel : $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$)

1.5 Intégration d'un polynôme

Pour intégrer chaque terme d'un polynôme, il est nécessaire d'utiliser la règle suivante pour chaque monôme :

$$\int a_n x^n dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

où $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \neq -1\}$ et C est une constante réelle. Ce qui s'écrit :

$$\int \left(\sum_{n \neq -1} a_n x^n \right) dx = \sum_{n \neq -1} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Pour le cas particulier où $n = -1$, il s'agit en fait de la fonction inverse $\frac{1}{x}$ qui a pour primitive la fonction $\ln|x|$.

**Exercice 7**

Déterminer l'expression primitive $F(x) = \int f(x)dx$ des polynômes suivants.

a) $f(x) = 20x^3 - x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 1$

c) $f(x) = 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + 3$

d) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^3} + 3$ (Rappel : $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$)

e) $f(x) = 3 - \frac{7}{x}$

**Correction de l'exercice 7**

a) $F(x) = 20\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C = 5x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

b) $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + C$

c) $F(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x + C$

d) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{(-2)}x^{-2} + 3x + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2x^2} + 3x + C$

e) $F(x) = 3x - 7\ln|x| + C$

1.6 Équations quadratiques à une inconnue

La maîtrise des équations quadratiques, c'est-à-dire des équations polynomiales de degré 2, revêt une importance certaine dans le domaine de la mécanique des structures. Dans une telle équation, le terme de plus haut degré est une variable élevée à la puissance 2. Généralement, une équation du second degré s'écrit :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a , b et c sont des constantes, et x est la variable. L'équation est dite du second degré en raison de la présence du terme ax^2 .

La représentation graphique d'une fonction du second degré est une parabole. La forme générale de la parabole dépend des coefficients a , b et c de l'équation. Si $a > 0$, la parabole s'ouvrira vers le haut, tandis que si $a < 0$, elle s'ouvrira vers le bas². Pour résoudre cette équation, c'est-à-dire trouver les valeurs de x qui satisfont l'équation, il est tout d'abord nécessaire de calculer le discriminant, noté Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Le discriminant joue un rôle crucial dans la détermination du nombre et du type de solutions de l'équation du second degré.

- ☛ Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes et réelles. Graphiquement, cela signifie que la parabole associée à la fonction $ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des x en deux points différents.
- ☛ Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle double. Graphiquement, cela signifie que la parabole touche l'axe des x en un seul point, appelé le sommet de la parabole.
- ☛ Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle. Graphiquement, cela signifie que la parabole n'intercepte pas l'axe des x , et donc l'équation n'a que des solutions complexes (imaginaires). Dans cet ouvrage, il ne sera jamais nécessaire de prendre en considération ces solutions complexes.

La résolution d'une équation du second degré peut être effectuée à l'aide de la formule quadratique, également appelée formule de Bhaskara, donnée par :

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{pour } \Delta \geq 0$$

Exercice 8

Résoudre les équations quadratiques suivantes.

- a) $x^2 + 4x + 3 = 0$
- b) $x^2 + 2x + 5 = 0$
- c) $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$
- d) $-x^2 - 3x + 2 = 0$
- e) $x^2 - 4x + 4 = 0$

2. Remarquons que si $a = 0$, l'équation n'est pas quadratique mais linéaire.



Correction de l'exercice 8

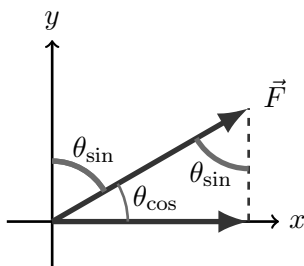
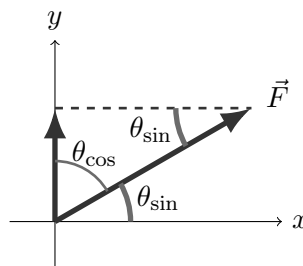
- a) $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$, donc $\Delta > 0$ et les deux solutions (racines) sont $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = -2 \pm 1$, c'est-à-dire $x = -3$ et $x = -1$
- b) $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16$, donc $\Delta < 0$ et il n'existe pas de racine réelle.
- c) $\Delta = \frac{3^2}{2^2} - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} - \frac{4}{2} = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4}$, donc $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2}$. Les deux racines réelles sont $x = \frac{-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $x = -1$ et $x = -\frac{1}{2}$
- d) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 17$, donc $\Delta > 0$ et les deux solutions (racines) sont $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{-2}$, soit $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$
- e) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$, donc la racine double est $x = \frac{4}{2}$, c'est-à-dire $x = 2$

1.7 Projection d'un vecteur

Lorsque vous avez un vecteur dans un plan, vous pouvez le *projeter* sur chacun des axes x et y . Cela implique de trouver la composante du vecteur qui pointe dans la direction de chaque axe. Il existe différentes méthodes pour effectuer ces projections, mais nous allons en présenter une³ dans le cas où un angle est donné par rapport à un axe quelconque. Dans cette situation, l'angle est non orienté, ce qui signifie qu'il est donné comme une valeur positive.

La partie la plus décisive de la méthode consiste à déterminer si l'angle dont nous disposons est « adjacent » ($\theta_{\cos}$) ou « opposé » ($\theta_{\sin}$) à l'axe sur lequel la projection doit être effectuée. Pour ce faire, nous considérons le triangle rectangle formé par le vecteur à projeter et l'axe sur lequel nous voulons le projeter. Le schéma suivant illustre comment cette identification est effectuée.

3. Si vous avez une approche qui vous convient mieux, suivez-la sans hésitation. Vous pouvez aussi adapter la méthode selon vos habitudes.

Projection sur l'axe x Projection sur l'axe y

Dans cette approche, l'angle est considéré géométriquement plutôt que trigonométriquement. La méthode de projection se déroule comme suit :

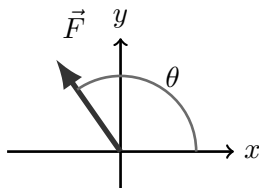
- ① Faire pivoter le vecteur à projeter, par la pensée, jusqu'à ce que l'angle que l'on souhaite utiliser soit compris entre 0° et 90° .
- ② Déterminer visuellement si le vecteur à projeter est dans la même direction que le vecteur $\vec{x}$ ou $\vec{y}$, selon que la projection est effectuée sur $\vec{x}$ ou $\vec{y}$.
- ③ Selon que l'angle est adjacent ou opposé à l'axe de projection, utiliser respectivement le cosinus ou le sinus.



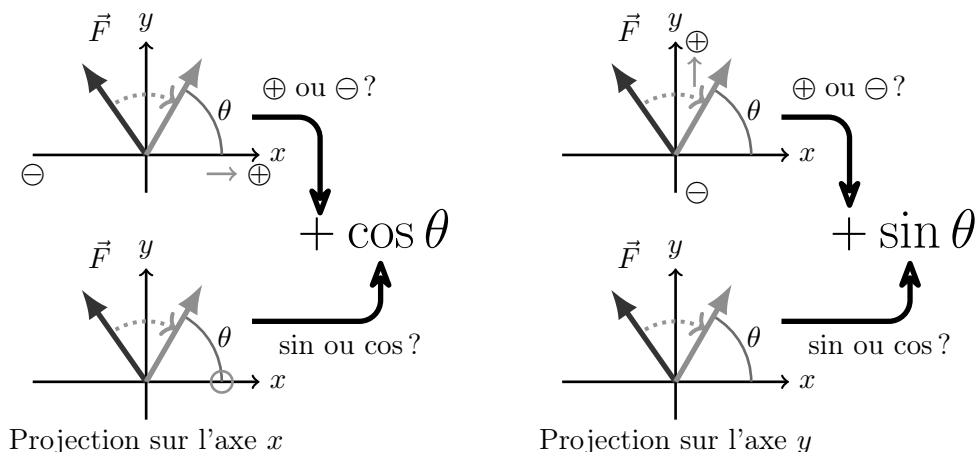
Remarque

Pour déterminer s'il faut utiliser le cosinus ou le sinus pour la projection, il est essentiel de visualiser le triangle rectangle formé par le vecteur à projeter (hypoténuse) et le vecteur projeté, qui se situe soit du côté adjacent, soit du côté opposé à l'angle considéré.

Prenons, en guise d'exemple, un vecteur dont l'orientation est donnée par l'angle θ comme indiqué ci-après :



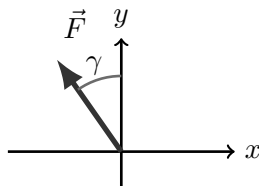
Nous souhaitons le projeter sur les axes x puis y . Faisons le visuellement :



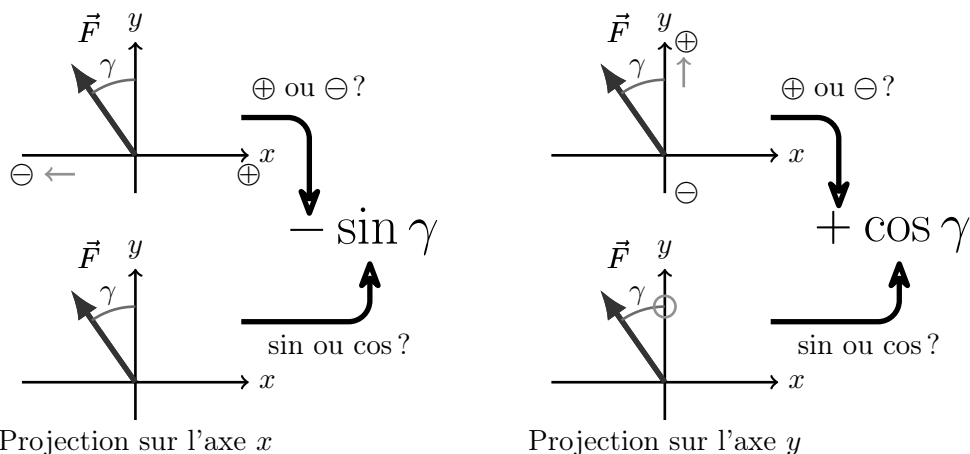
Dans cet exemple, la représentation graphique de l'angle θ est supérieure à 90° . Nous imaginons donc que l'angle diminue jusqu'à se situer entre 0° et 90° ; ceci constitue l'étape ①. Pour une projection sur l'axe x , le raisonnement se déroule en deux étapes afin de déterminer le facteur de l'intensité F à utiliser : ① le vecteur tourné pointe vers la droite, c'est-à-dire vers les x positifs, cela indique que le facteur est positif, ② l'arc de l'angle θ touche l'axe x cela indique que le facteur fait intervenir le cosinus de θ . Ainsi, la composante x de la force $\vec{F}$, autrement dit « la projection de $\vec{F}$ sur l'axe x » est $F \cos(\theta)$.

Pour une projection sur l'axe y , le raisonnement est : ① le vecteur tourné pointe vers la haut, c'est-à-dire vers les y positifs indiquant que le facteur est positif, ② l'arc de l'angle θ ne touche pas l'axe y indiquant que le facteur fait intervenir le sinus de θ . Ainsi, la composante y de la force $\vec{F}$ est $F \sin(\theta)$.

Prenons maintenant un second exemple avec le même vecteur, mais dont l'orientation est cette fois donnée par l'angle γ , comme indiqué ci-après :



L'opération visuelle à faire pour projeter ce vecteur sur les axes x et y se schématise comme suit.



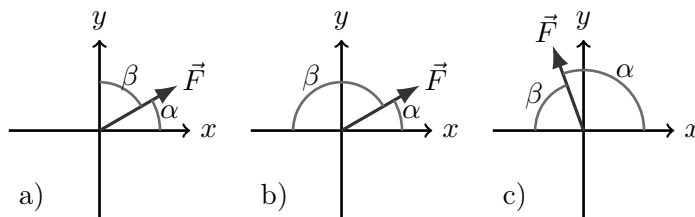
Cette fois, l'angle γ représenté est compris entre 0° et 90° , il n'est donc pas nécessaire de le tourner mentalement. Pour une projection sur l'axe x , le raisonnement se déroule en deux étapes : ① le vecteur pointe vers la gauche, c'est-à-dire vers les x négatifs indiquant que le facteur est négatif, ② l'arc de l'angle γ ne touche pas l'axe x indiquant que le facteur fait intervenir le sinus de γ . Ainsi, la composante x de la force $\vec{F}$ est $-F \sin(\gamma)$.

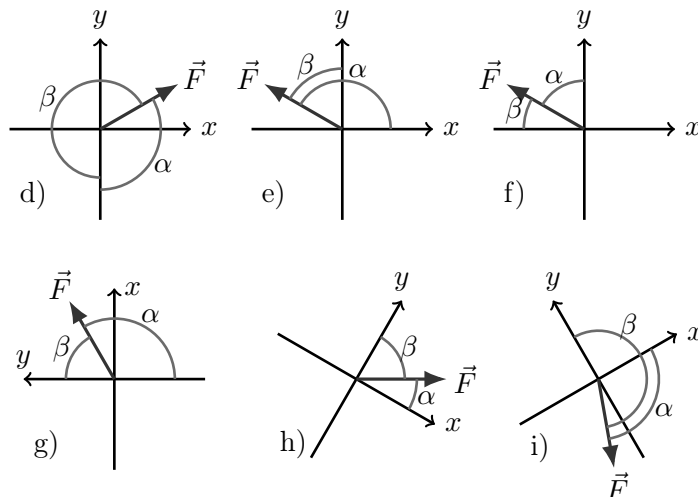
Pour une projection sur l'axe y , le raisonnement est : ① le vecteur pointe vers la haut, c'est-à-dire vers les y positifs indiquant que le facteur est positif, ② l'arc de l'angle γ touche l'axe y indiquant que le facteur fait intervenir le cosinus de γ . Ainsi, la composante y de la force $\vec{F}$ est $F \cos(\gamma)$.



Exercice 9

Donner l'expression des composantes x et y du vecteur $\vec{F}$ (de norme F) en fonction de l'angle α , puis de l'angle β (valeurs positives), pour chacun des cas suivants. Attention à la direction des axes pour les 3 derniers cas.





 Correction de l'exercice 9

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \vec{F} &= F \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} & \text{b)} \quad \vec{F} &= F \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \\
 \text{c)} \quad \vec{F} &= F \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} & \text{d)} \quad \vec{F} &= F \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ -\cos \beta \end{pmatrix} \\
 \text{e)} \quad \vec{F} &= F \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} & \text{f)} \quad \vec{F} &= F \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \\
 \text{g)} \quad \vec{F} &= F \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} & \text{h)} \quad \vec{F} &= F \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} \\
 \text{i)} \quad \vec{F} &= F \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

1.8 Les mathématiques au service de la physique

Dans cette dernière section sur les pré-requis en mathématique, il est important de noter que les mathématiques sont un sujet à part entière, mais ce

n'est pas le sujet principal de cet ouvrage. Ici, l'objectif est de s'initier à la mécanique des structures. Cela signifie que les notions de mathématiques que nous avons abordées ici doivent être maîtrisées, mais nous ne les approfondirons pas davantage par la suite.

En mécanique des structures, il est essentiel de comprendre les unités de mesure utilisées pour décrire les propriétés physiques des matériaux et des structures. Les unités les plus couramment utilisées dans ce domaine sont les suivantes :

- ☛ La longueur : le mètre (m) est l'unité de longueur de base dans le système international (SI). Cependant, d'autres unités de longueur peuvent être utilisées, telles que le centimètre (cm) ou le millimètre (mm).
- ☛ La force : le newton (N) est l'unité de force dans le SI. Un newton est la force nécessaire pour accélérer un objet de 1 kilogramme à un mètre par seconde carré.
- ☛ La pression : le pascal (Pa) est l'unité de pression dans le SI. Un pascal est la pression exercée par une force de 1 N sur une surface de 1 m^2 .

Travailler avec des unités de mesure cohérentes signifie que toutes les grandeurs physiques utilisées dans un calcul ou une analyse doivent être exprimées dans des unités « compatibles ». Par exemple, si une pression est exprimée en pascals, alors cette quantité en pascals correspond à une force en newtons appliquée sur une surface en mètres carrés. Nous verrons dans les chapitres suivants qu'il est cependant pratique d'utiliser d'autres unités pour exprimer des pressions, des forces et des longueurs. On peut par exemple utiliser ensemble des megapascals (MPa), des newtons (N) et des millimètres (mm). Ainsi, $1 \text{ MPa} = (1 \text{ N})/(1 \text{ mm}^2)$ sera plus simple à manipuler que $1 \times 10^6 \text{ Pa} = (1 \text{ N})/(1 \times 10^{-6} \text{ m}^2)$ dans des équations ou sur une calculatrice. L'utilisation d'unités cohérentes facilite la communication et la collaboration avec d'autres professionnels de la mécanique des structures, car les résultats obtenus sont exprimés dans des unités standardisées. Le choix des unités à utiliser en cohérence ne sont pas les mêmes dans tous les domaines.

Certaines variables sont sans unité, car elles représentent des rapports sans dimension. Par exemple, les déformations sont souvent exprimées en termes de rapports de longueurs, tels que des mètres par mètre (m/m) ou des millimètres par millimètres (mm/mm). Ces rapports sans dimension sont utilisés pour décrire les changements de forme d'une structure sous l'influence d'un chargement mécanique. De même, les angles sont souvent exprimés en radian, qui est aussi une unité sans dimension du fait qu'un radian est défini comme le rapport de la longueur d'un arc de cercle à la longueur du rayon du cercle.

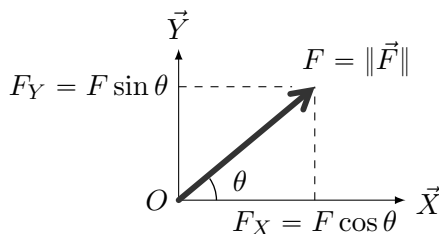
Chapitre 2

Efforts dans les structures (poutres et treillis isostatiques)

2.1 Force et moment

2.1.1 Force

Un vecteur force $\vec{F}$ est défini par une **intensité** F exprimée en newton (N) et une **orientation** θ exprimée en degré ($^\circ$) ou en radian par rapport à un axe de référence. Dans le repère $(\vec{X}, \vec{Y})$, le vecteur force est défini par ses deux composantes cartésiennes F_X et F_Y .



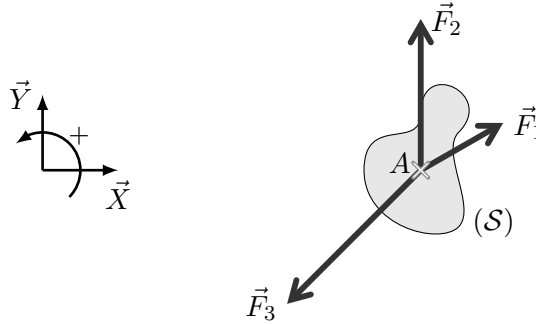
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \cos \theta \\ F \sin \theta \end{pmatrix}$$

La résultante d'un système de forces est le vecteur force correspondant à l'action conjuguée de toutes les forces du système étudié. Si la résultante des forces appliquées à un solide est non nulle alors le solide se déplace dans la direction portée par la résultante. En mécanique des structures, il est usuel de schématiser les vecteurs de force par une flèche de longueur quelconque, avec son intensité (sa valeur). Dans les calculs, il est possible d'obtenir une intensité négative, ce qui paraît impossible puisque l'intensité est, par définition, positive. Cela signifiera simplement que le sens de la force doit être inversé.

 Exemple

Le solide ($\mathcal{S}$) est sollicité au point A par trois forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ d'intensité respective 5 kN, 8 kN, et 10 kN et d'inclinaison 30° , 90° et -135° par rapport à l'axe horizontal. Déterminer :

- les composantes des forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, et $\vec{F}_3$ dans le repère $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.
- les composantes de la résultante $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ dans le repère $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.
- l'intensité F de la résultante (norme du vecteur $\vec{F}$) et son angle d'inclinaison α par rapport à $\vec{X}$.



 Solution

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 5 \times \cos(30^\circ) \\ 5 \times \sin(30^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 4,33 \text{ kN} \\ 2,5 \text{ kN} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 8 \times \cos(90^\circ) \\ 8 \times \sin(90^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \text{ kN} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 10 \times \cos(-135^\circ) \\ 10 \times \sin(-135^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -7,07 \text{ kN} \\ -7,07 \text{ kN} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \simeq \begin{pmatrix} -2,74 \text{ kN} \\ 3,43 \text{ kN} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \|\vec{F}\| \simeq \sqrt{(-2,74)^2 + (3,43)^2} = 4,39 \text{ kN}$$

et

$$\alpha \simeq \arctan\left(\frac{-3,43}{2,74}\right) + 180^\circ = 128,62^\circ$$

Dans cet exemple, une manipulation mathématique de vecteurs est requise. Elle n'est pas expliquée en détail ici, car les opérations vectorielles seront nettement plus simples dans le reste de l'ouvrage.



Exercice 10

Trouver les composantes F_X et F_Y de la force $\vec{F}$ qui s'applique sur un élément de structure, sachant que la résultante (somme vectorielle) des forces est nulle. Remarquez que, puisque les composantes de $\vec{F}$ ne sont pas connues, elles sont dessinées et considérées *a priori* comme positives (vers le haut pour $F_Y > 0$, et vers la droite pour $F_X > 0$).

