

Stéphane Dumas
Matthieu Fèvre
Roland Gorlier

Questions de maths

PSI
PSI *

- Mémentos de cours
- Questions, exercices
- Solutions détaillées



Chapitre I

Petits outils

Ce chapitre a pour objectif de réviser quelques notions et techniques usuelles développées pendant l'année de sup. Il ne se veut pas une révision exhaustive du programme de première année mais permet un retour sur des notions essentielles ou parfois vite oubliées. On revient en particulier dans ce chapitre sur un certain nombre de points de calculs et sur des méthodes permettant d'obtenir des majorations ou minoration.

On désigne par la lettre $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

I.1 - Cours

I.1.1 - Généralités

[Définition I.1] Segment de $\mathbb{R}$

Si a et b sont deux réels tels que $a \leq b$, on appelle **segment** de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme $[a, b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \right\}$.

[Définition I.2] Intervalle

Si a et b désignent deux réels tels que $a \leq b$, on appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ un ensemble de l'une des formes suivantes :

$$]a, b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \right\}, [a, b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \right\},$$

$$]a, b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \right\}, [a, b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \right\},$$

$$]-\infty, b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \right\},]-\infty, b[= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \right\},$$

$$[a, +\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \right\},]a, +\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \right\},$$

$$]-\infty, +\infty[= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty \right\} = \mathbb{R}, \text{ ou l'ensemble vide } \emptyset.$$

[Propriété I.3] Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$. Autrement dit, un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall (x, y) \in K^2, [x, y] \subset K$.

⚠ On veillera à bien distinguer les trois notions : sous-ensemble (ou partie) de $\mathbb{R}$, intervalle de $\mathbb{R}$ et segment de $\mathbb{R}$. On comprendra qu'un intervalle est un type particulier de sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Un segment de $\mathbb{R}$ est un exemple d'intervalle de $\mathbb{R}$: c'est un intervalle fermé et borné.

[Propriété I.4] Inégalités triangulaires

Si u et v sont deux complexes alors :

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

$$||u| - |v|| \leq |u - v| \leq |u| + |v|.$$

On a l'égalité $|u + v| = |u| + |v|$ si et seulement si u et v sont positivement liés, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Si $u_1, \dots, u_n$ sont des complexes, alors : $\left| \sum_{i=1}^n u_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |u_i|$.

I.1.2 - Fonctions continues

Dans toute la suite, la lettre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.

[Définition I.5] Continuité sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$. On dit que la fonction f est **continue** sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I .

⚠ On évitera de parler de fonctions continues sur des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des intervalles, on risquerait alors d'être tenté d'utiliser les théorèmes qui suivent dans des cas où ils ne sont pas valables.

[Propriété I.6] Théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue de I vers $\mathbb{R}$.

Soit α et β deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si α et β appartiennent à $f(I)$ ou sont limites de suites d'éléments de $f(I)$ alors tout réel strictement compris entre α et β appartient à $f(I)$.

On retient que l'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

[Propriété I.7] Théorème des bornes atteintes

Toute fonction (réelle ou complexe) continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.

♥ *En particulier, si f est une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment K , alors sa dérivée f' est bornée sur K .*

I.1.3 - Intégration des fonctions continues**[Propriété I.8] Théorème fondamental de l'analyse**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue de I vers $\mathbb{C}$.

Alors f admet des primitives et l'on peut, pour tout réel a de I , définir la fonction de I vers $\mathbb{C}$: $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ qui est l'une des primitives de f .

C'est la seule primitive de la fonction f qui s'annule en a .

♥ *Voir l'exercice : [Q I.7 p. 25]*

[Propriété I.9] Intégrale de fonctions positives

Soit a et b deux réels avec $a \leq b$.

Soit f une fonction continue du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$.

(-) Si la fonction f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

(-) Si la fonction f est positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t) dt = 0$,
alors : $\forall t \in [a, b], f(t) = 0$.

⚡ *On déduit du premier item que si f et g sont continues sur le segment*

$[a, b]$ et $a \leq b$, alors : $f \leq g \implies \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Il faudra cependant veiller à ce que les bornes a et b soient dans l'ordre croissant. [Q I.7 p. 25]

[Propriété I.10] Sommes de Riemann à pas constant

Soit a et b deux réels avec $a \leq b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs complexes. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) \\ &= \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

- ♥ On doit penser à cette formule lorsque l'on s'intéresse aux calculs de limites d'expressions de la forme $\sum_{k=0}^n u_{n,k}$. [Q I.12 p. 25]
- ♥ On peut se ramener à $a = 0$ et $b = 1$ avec une fonction f ad hoc.

I.1.4 - Fonctions dérivables

[Propriété I.11] Dérivabilité d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a . Les propositions suivantes sont équivalentes.

- i) La fonction f est dérivable en a .
- ii) Il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d$.
- iii) La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en a , c'est-à-dire qu'il existe un complexe d tel qu'au voisinage de a on ait :

$$f(x) = f(a) + d(x - a) + o_a(x - a).$$

Dans ce cas, $f'(a) = d$.

Une fonction est dérivable sur un intervalle si et seulement si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

[Propriété I.12] Caractérisation des fonctions constantes, monotones

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle dérivable sur I .

- (-) La fonction f est constante sur l'intervalle I si et seulement si sa dérivée f' est nulle sur l'intervalle I .
- (-) La fonction f est croissante sur l'intervalle I si et seulement si sa fonction dérivée f' est positive sur l'intervalle I .
- (-) La fonction f est décroissante sur l'intervalle I si et seulement si sa fonction dérivée f' est négative sur l'intervalle I .
- (-) Si la fonction f' est strictement positive (respectivement strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I , alors la fonction f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I .

⚠ Attention, ce théorème ne s'applique pas lorsque l'on remplace l'intervalle I par une réunion d'intervalles. [Q I.5 p. 25]

⚠ Le dernier point permet d'affirmer qu'une fonction est strictement monotone même si sa dérivée s'annule en un nombre fini de points. Par exemple : $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

[Propriété I.13] Théorème de la bijection

Si f est une fonction réelle strictement monotone définie et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b , alors f est bijective.

Les bornes de l'intervalle image sont les limites de f en a et b .

La bijection réciproque est de même monotonie que f , définie et continue sur l'intervalle image.

[Propriété I.14] Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Si

(-) la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$,

(-) dérivable (au moins) sur l'ouvert $]a, b[$,

(-) et vérifie $f(a) = f(b)$,

alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

⚠ *Le résultat n'est pas valable pour une application à valeurs complexes.*

♥ *Ce théorème permet de prouver l'existence de zéros des dérivées successives d'une fonction réelle qui s'annule plusieurs fois. [Q I.11 p. 25]*

[Propriété I.15] Inégalité des accroissements finis

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une application de I vers $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que le réel K soit un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle I . Alors, la fonction f est K -lipschitzienne sur I , autrement dit :

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq K |b - a|.$$

♥ *S'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f'| \leq k$, on dit que f est **contractante**, et l'on peut utiliser ce théorème pour prouver que des suites récurrentes vérifiant une relation de type $u_{n+1} = f(u_n)$ convergent.*

On peut aussi en déduire une estimation de l'écart entre u_n et sa limite pour une valeur de n donnée.

[Propriété I.16] Théorème limite de la dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$. Si

(-) la fonction f est continue sur I ,

(-) la fonction f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$,

(-) il existe un complexe ℓ tel que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$,

alors la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

La fonction f' est donc continue en a .

♥ Si f est une fonction à valeurs réelles continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \pm\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$.

[Propriété I.17] Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Si

- (–) la fonction f est continue sur I ,
- (–) la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$,
- (–) pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, il existe un complexe ℓ_i tel que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f^{(i)}(x) = \ell_i$,

alors

la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f^{(i)}(a) = \ell_i$.

♥ Soit f une fonction définie par une expression de type :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}.$$

Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, a[\cap I$ et $]a, +\infty[\cap I$, ce théorème permet, s'il s'applique, de prouver rapidement que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I (et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I). [Q I.8 p. 25]

I.1.5 - Convexité

[Définition I.18] Fonction convexe, concave

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f est **convexe** sur I si l'on a :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

La fonction f est **concave** si et seulement si $-f$ est convexe et l'on a :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

[Propriété I.19] Interprétation graphique

La fonction f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x et y de I , pour les abscisses comprises entre x et y , la courbe représentative de f est au-dessous de la corde reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

La fonction f est concave si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de la corde reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

♥ Cette propriété est rarement utilisée pour prouver qu'une fonction réelle est convexe. On utilise plutôt la propriété [P I.21] si la régularité de la fonction le permet. [Q I.6 p. 25]

[Propriété I.20] Convexité des fonctions dérivables

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) La fonction f est convexe sur I .
- ii) La fonction f' est croissante sur I .
- iii) La courbe représentative de la fonction f est au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) La fonction f est concave sur I .
- ii) La fonction f' est décroissante sur I .
- iii) La courbe représentative de la fonction f est en-dessous de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

♥ Voir l'exercice : [Q I.6 p. 25]

[Propriété I.21] Convexité des fonctions deux fois dérivables

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur l'intervalle I . On note f'' sa dérivée seconde.

- (-) La fonction f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I .
- (-) La fonction f est concave si et seulement si f'' est négative sur I .

♥ Ces propriétés permettent d'établir des inégalités assez fines.

On montre qu'une fonction f donnée est convexe à l'aide du signe de f'' , on établit ensuite un encadrement de f à l'aide des propriétés [P I.19] et [P I.20]. [Q I.6 p. 25]

I.1.6 - Formule de Stirling**[Propriété I.22] Équivalent de la factorielle**

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}.$$

♥ Voir l'exercice : [Q I.10 p. 25]

I.1.7 - Formules de Taylor

[Propriété I.23] Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant a . On a le développement limité suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + o_a((x-a)^n).$$

⚠ Cette formule, comme le sparadrap, est à usage local. Elle ne permet pas, par exemple, d'établir une égalité sur tout un intervalle.

[Propriété I.24] Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux réels de I . On a l'égalité suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt.$$

♥ Voir l'exercice : [Q I.9 p. 25]

♥ Il est souvent plus facile d'appliquer la formule sous la forme

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(ua + (1-u)b) u^n du.$$

Cela permet notamment d'éviter d'avoir à se préoccuper de l'ordre de a et b .

[Propriété I.25] Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction réelle ou complexe de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux réels de I . Soit M un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment de bornes a et b . Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

⚠ Pour obtenir ces deux dernières formules à l'ordre n , on remarque qu'on utilise une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

⚠ On remarque également que l'on peut avoir $a \leq b$ ou $b \leq a$.

⚠ La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment de bornes a et b donc le théorème des bornes atteintes [P I.7] garantit l'existence d'un majorant M .

[Propriété I.26] Formule de Taylor polynomiale

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall a \in \mathbb{K}, P = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}.$$

♥ Voir l'exercice : [Q I.13 p. 26]

I.1.8 - Décomposition des fractions rationnelles**[Propriété I.27] Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles**

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.

(-) S'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts tels que Q s'écrive $\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ alors la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ admet une **décomposition en**

éléments simples de la forme : $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{X - \lambda_i}$

où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = \frac{P(\lambda_i)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)} = \frac{P(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)}$.

(-) Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et Q s'écrit $\prod_{i=1}^n Q_i$ où les Q_i sont des polynômes irréductibles deux à deux premiers entre eux, alors la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ admet **une décomposition en éléments simples** de la forme : $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{Q_i}$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, P_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 si Q_i est un trinôme irréductible du second degré et P_i est une constante si Q_i est un polynôme de degré 1. Ainsi $\deg(P_i) < \deg(Q_i)$.

♥ Dans la situation de la première proposition de cette propriété, il existe une méthode simple pour calculer le scalaire a_i : il suffit de multiplier chaque membre de l'égalité $\frac{P}{Q} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X - \lambda_k}$ par $(X - \lambda_i)$. Après simplification, on obtient une fraction rationnelle que l'on peut évaluer en λ_i , ce qui donne directement la valeur de a_i . [Q I.12 p. 25]

✎ Dans le cas plus général où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et le polynôme Q s'écrit $Q = \prod_{i=1}^r Q_i^{k_i}$ où $k_1, \dots, k_r$ sont des entiers strictement positifs et $Q_1, \dots, Q_r$ sont des polynômes irréductibles deux à deux premiers entre eux, l'expression de la décomposition en éléments simples est un peu plus compliquée.

Elle s'écrit dans ce cas $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{U_{i,j}}{Q_i^j} \right)$ où, pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$ et tout j de $\llbracket 1, k_i \rrbracket$, $U_{i,j}$ désigne un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg(Q_i)$.

I.2 - Questions

[Question I.1] Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels.

Développer la somme $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2$. (Éclairage page 26, Réponse page 28)

[Question I.2] Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels.

Montrer que $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| = \sum_{i=1}^n |a_i|$ si et seulement si les réels de la famille $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont tous de même signe. (Éclairage page 26, Réponse page 28)

[Question I.3] Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes non nuls.

Montrer que $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| = \sum_{i=1}^n |a_i|$ si et seulement si les complexes de la famille $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont tous de même argument. (Éclairage page 26, Réponse page 29)

[Question I.4] Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Résoudre l'équation $\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = 0$,

d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$. (Éclairage page 26, Réponse page 29)

[Question I.5] Simplifier au maximum l'expression de la fonction

$$f : t \mapsto \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{2t}{1-t^2} \right) + \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)$$

définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(Éclairage page 26, Réponse page 30)

[Question I.6] Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$.

(Éclairage page 26, Réponse page 31)

[Question I.7] Étudier le plus complètement possible la fonction F définie par $F : x \mapsto \int_x^{x^3} \frac{e^{t^2}}{t} dt$.

(Éclairage page 26, Réponse page 32)

[Question I.8] Montrer que la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}_*^+ \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(Éclairage page 27, Réponse page 34)

[Question I.9] Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, a[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [0, a[$. (Éclairage page 27, Réponse page 35)

[Question I.10] Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!(2n-2)!(3n)!432^n}{(6n)!}$.

(Éclairage page 27, Réponse page 36)

[Question I.11] Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé, de degré n et à racines simples. Montrer que son polynôme dérivé est encore scindé et à racines simples.

(Éclairage page 27, Réponse page 36)

[Question I.12] On rappelle que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Que vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(2k+1)}$?

(Éclairage page 27, Réponse page 36)

[Question I.13] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n admettant n racines deux à deux distinctes que l'on note $x_1, \dots, x_n$.

Montrer que pour tout i fixé dans $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$2 \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \frac{1}{x_j - x_i} = \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}.$$

(Éclairage page 27, Réponse page 38)

I.3 - Éclairages

[Éclairage I.1] Remarquons que l'on peut écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \right).$$

Il est nécessaire de ne pas mettre le même indice dans deux sommes dont on fait le produit pour bien faire apparaître les doubles produits. (Réponse page 28)

[Éclairage I.2] Utilisons le résultat de la question 1 et élevons au carré.

(Réponse page 28)

[Éclairage I.3] En multipliant par $e^{-i\theta}$ où θ est un argument de $\sum_{i=1}^n a_i$, on

se ramène à un calcul avec des réels.

(Réponse page 29)

[Éclairage I.4] Pensons aux sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique.

(Réponse page 29)

[Éclairage I.5] On pourra commencer par dériver la fonction f en faisant attention aux ensembles sur lesquels f est dérivable.

(Réponse page 30)

[Éclairage I.6] On pense aux inégalités liées à la convexité. [P I.19 p.20] et [P I.20 p.21].

(Réponse page 31)

[Éclairage I.7] Il n'est pas possible de calculer cette intégrale par les moyens classiques que sont la primitivation, l'intégration par parties et le changement de variable.

On est donc conduit à utiliser des moyens indirects et à étudier d'abord la définition et la monotonie de F puis les limites à partir d'encadrements de l'intégrande. Pour l'étude du comportement au voisinage de 0, on pourra utiliser l'intégration d'un développement limité et pour celle du comportement au voisinage de $+\infty$, on pourra utiliser une intégration par parties. [P I.9 p.17].

(Réponse page 32)

[Éclairage I.8] On peut montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en exprimant ses dérivées successives comme des produits d'expressions polynomiales en $\frac{1}{x}$ par $e^{-\frac{1}{x}}$ puis appliquer le théorème limite de la dérivée [P I.16 p.19] ou le théorème de prolongement de classe C^k [P I.17 p.20].

(Réponse page 34)

[Éclairage I.9] La forme du terme général de la suite nous incite à utiliser une formule de Taylor [P I.23 p.22].

(Réponse page 35)

[Éclairage I.10] Il est préférable d'utiliser la propriété des factorielles avant d'utiliser l'équivalent de Stirling. [P I.22 p.21].

(Réponse page 36)

[Éclairage I.11] On peut utiliser la fonction polynomiale associée à P et utiliser le théorème de Rolle [P I.14 p.19] pour découvrir entre deux racines consécutives de P une racine de P' .

(Réponse page 36)

[Éclairage I.12] On peut effectuer une décomposition en éléments simples [P I.27 p.23] de la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2(2X+1)}$ qui permettra d'exprimer

la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(2k+1)}$ en fonction de sommes de la forme : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On pourra alors utiliser une somme de Riemann [P I.10 p.17] pour conclure.

(Réponse page 36)

[Éclairage I.13] On peut utiliser la formule de Taylor polynomiale [P I.26 p.23] et une décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

(Réponse page 38)

I.4 - Réponses

[Réponse I.1]

(Développement)

(Relire la question : page 24)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^n a_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j$.

Donc $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^n a_j\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_i a_j$.

D'où :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.}$$

[Réponse I.2]

(Inégalité triangulaire)

(Relire la question : page 24)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Les sommes proposées vérifient : $\left|\sum_{i=1}^n a_i\right| \in \mathbb{R}_+$ et $\sum_{i=1}^n |a_i| \in \mathbb{R}_+$. Donc

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^n a_i\right| = \sum_{i=1}^n |a_i| &\iff \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|\right)^2 \\ &\iff \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i a_j| \\ &\iff \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_i a_j| - a_i a_j) = 0 \\ &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j \implies |a_i a_j| - a_i a_j = 0). \end{aligned}$$

En effet, pour tous les indices i et j , par définition de la valeur absolue, les nombres $|a_i a_j| - a_i a_j$ sont positifs.

Conclusion : Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si tous les réels de la famille $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont de même signe.

[Réponse I.3]**(Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$)***(Relire la question : page 24)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$. Supposons que $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| = \sum_{i=1}^n |a_i|$ et

notons θ un argument de $\sum_{i=1}^n a_i$. Alors $\sum_{i=1}^n a_i e^{-i\theta} \in \mathbb{R}_+$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} (a_i e^{-i\theta}) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^n a_i e^{-i\theta} \right) = \left| \sum_{i=1}^n a_i e^{-i\theta} \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| = \sum_{i=1}^n |a_i| = \sum_{i=1}^n |a_i e^{-i\theta}| \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum_{i=1}^n (|a_i e^{-i\theta}| - \operatorname{Re} (a_i e^{-i\theta})) = 0$ et c'est une somme de réels

positifs puisque pour tout nombre complexe z , $\operatorname{Re} (z) \leq |z|$.

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_i e^{-i\theta}| = \operatorname{Re} (a_i e^{-i\theta})$ donc chaque $a_i e^{-i\theta}$ est un réel positif noté r_i . Autrement dit, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = r_i e^{i\theta}$ et finalement les complexes de la famille $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont tous de même argument θ .

Réciproquement, si on suppose que les complexes de la famille $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont tous de même argument noté θ , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un réel positif r_i tel que $a_i = r_i e^{i\theta}$. On en déduit directement que :

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n r_i e^{i\theta} \right| = \left| \sum_{i=1}^n r_i \right| |e^{i\theta}| = \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n |a_i|$$

Finalement, pour $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de nombres complexes non nuls, on

a l'égalité : $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| = \sum_{i=1}^n |a_i|$ si et seulement si les complexes de la famille $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont tous de même argument.

[Réponse I.4]**(Calcul d'une somme classique)***(Relire la question : page 24)*

Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

(-) Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, on a : $\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=1}^n 1 = n \neq 0$ donc θ n'est pas solution

de l'équation $\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = 0$.

(-) Si $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$ alors $\exp(i k \theta) \neq 1$ et en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, on calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \exp(i k \theta) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\exp(i\theta) \times \frac{1 - \exp(in\theta)}{1 - \exp(i\theta)} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\exp(i\theta) \frac{\exp(i \frac{n\theta}{2}) (\exp(-i \frac{n\theta}{2}) - \exp(i \frac{n\theta}{2}))}{\exp(i \frac{\theta}{2}) (\exp(-i \frac{\theta}{2}) - \exp(i \frac{\theta}{2}))} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\exp \left(i \frac{(n+1)\theta}{2} \right) \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right) \end{aligned}$$

Donc finalement,
$$\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \cos \left(\frac{(n+1)\theta}{2} \right) \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = 0 &\iff \sin \left(\frac{n\theta}{2} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \left(\frac{(n+1)\theta}{2} \right) = 0 \\ &\iff \frac{n\theta}{2} \equiv 0 [\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{(n+1)\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\iff \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n} \right] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{n+1} \left[\frac{2\pi}{n+1} \right] \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, il est impossible que $\theta \equiv 0 [2\pi]$ donc on peut finalement conclure que dans tous les cas

$$\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = 0 \iff \left(\theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n} \right] \text{ et } \theta \not\equiv 0 [2\pi] \right) \text{ ou } \theta \equiv \frac{\pi}{n+1} \left[\frac{2\pi}{n+1} \right].$$

[Réponse I.5]

(Une fonction constante par endroits)

(Relire la question : page 25, le cours : [P I.12 p.18])

La fonction Arc tan est dérivable partout sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction Arc sin est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$.

Or pour $t \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{2t}{1+t^2} \right| \leq 1$ et $\left| \frac{2t}{1+t^2} \right| = 1 \iff t \in \{-1, 1\}$ donc par composée, f est dérivable sur chacun des trois intervalles $]-\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $] 1, +\infty[$.

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on calcule alors :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\frac{2(1-t^2)-(2t) \times (-2t)}{(1-t^2)^2}}{1 + \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2} + \frac{\frac{2(1+t^2)-(2t) \times (2t)}{(1+t^2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}} \\ &= \frac{2 + 2t^2}{(1-t^2)^2 + (2t)^2} + \frac{2 - 2t^2}{(1+t^2) \sqrt{(1+t^2)^2 - (2t)^2}} \\ &= \frac{2(1+t^2)}{(1+t^2)^2} + \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)|1-t^2|} \\ &= \frac{2}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{|1-t^2|}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, si $t \in]-1, 1[$, $f'(t) = \frac{4}{1+t^2}$ et sinon $f'(t) = 0$.

Ainsi, la fonction f est constante sur l'intervalle $]-\infty, -1[$ et sa valeur est égale à sa limite en $-\infty$ donc nulle. De même, elle est constante sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et sa valeur est égale à sa limite en $+\infty$ donc nulle. Enfin, sur l'intervalle $] -1, 1[$, elle a la même dérivée que $t \mapsto 4 \operatorname{Arc tan}(t)$ et la même valeur en $0 \in]-1, 1[$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall t \in]-1, 1[, f(t) = 4 \operatorname{Arc tan}(t) \text{ et } f(t) = 0 \text{ lorsque } |t| > 1.}$$

[Réponse I.6]

(Encadrement usuel de $\sin$)

(Relire la question : page 25, le cours : [P I.19 p.20], [P I.20 p.21]
[P I.21 p.21])

La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on sait que $\forall x \in I$, $\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$. Donc, d'après la propriété [P I.21], la fonction sinus est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = x$.

Une équation de la corde passant par les points $(0, 0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ est $y = \frac{2}{\pi}x$.

D'après les propriétés [P I.19] et [P I.20], par concavité sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la courbe de la fonction sinus est en dessous de la tangente et au-dessus de cette corde, ce qui se traduit par :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x.}$$

[Réponse I.7]**(Fonction définie par une intégrale)**

(Relire la question : page 25, le cours : [P I.8 p.17], [P I.9 p.17])

☞ Il est impossible de calculer cette intégrale, c'est pour cela que l'on emploie les méthodes qui suivent.

Tout d'abord, la fonction $g : t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_*^-$ et $\mathbb{R}_*^+$ et n'est pas définie en 0.

(-) Étudions la définition de la fonction $F : x \mapsto \int_x^{x^3} \frac{e^{t^2}}{t} dt$.

Si $x > 0$, l'intervalle de bornes x et x^3 est inclus dans $\mathbb{R}_*^+$, donc $F(x)$ est bien définie en tant qu'intégrale de la fonction continue g .

Si $x < 0$, il est inclus dans $\mathbb{R}_*^-$ donc pour la même raison, $F(x)$ est bien définie. La fonction F n'est pas définie en 0. Ainsi

$$F \text{ est définie sur } D_F = \mathbb{R}^*.$$

(-) Étudions la parité de la fonction F .

$\forall x \in D_F, -x \in D_F. F(-x) = \int_{-x}^{-x^3} \frac{e^{t^2}}{t} dt$. En effectuant le changement de variable $u = -t$ on obtient : $F(-x) = \int_x^{x^3} -\frac{e^{u^2}}{-u} du = F(x)$.

$$F \text{ est paire.}$$

On limite alors l'étude de F à $\mathbb{R}_*^+$.

(-) Étudions les variations de la fonction F .

La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}_*^+$, elle y admet des primitives [P I.8]. Soit G une primitive (nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$) de g sur $\mathbb{R}_*^+$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, F(x) = G(x^3) - G(x)$.

Ainsi, par composition, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, F'(x) = 3x^2 G'(x^3) - G'(x) = 3x^2 g(x^3) - g(x) = 3x^2 \frac{e^{x^6}}{x^3} - \frac{e^{x^2}}{x}.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, F'(x) = \frac{3e^{x^6} - e^{x^2}}{x}.$$

Or si $x \in]0, 1[$, $x^2 \leq \ln(3) < x^6 + \ln(3)$ et si $x \geq 1$, $x^2 \leq x^6 < x^6 + \ln(3)$ donc pour tout $x > 0$, $F'(x) > 0$. Par conséquent, la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

Comme de plus $F(1) = 0$, F est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$.

Au voisinage de 0, on remarque que $\frac{e^{t^2}}{t} = \frac{1}{t} + t + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t)$. En particulier, si l'on prolonge la fonction $\alpha : t \mapsto g(t) - \frac{1}{t}$ par la valeur 0 en 0, la fonction α ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}$. Si l'on note A la primitive de α qui s'annule en 0, puisque $\alpha(t) = t + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t)$, par théorème d'intégration des développements limités, $A(t) = A(0) + \frac{t^2}{2} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^2)$. Ainsi, on peut en déduire que pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x^3} \left(\frac{1}{t} + \alpha(t) \right) dt \\ &= \int_x^{x^3} \frac{1}{t} dt + A(x^3) - A(x) \\ &= \ln(x^3) - \ln(x) + \left(\frac{x^6}{2} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^6) \right) - \left(\frac{x^2}{2} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2) \right) \\ &= 2 \ln(x) - \frac{x^2}{2} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

En particulier, $F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2 \ln(x)$.

Pour déterminer le comportement de F au voisinage de $+\infty$, on procède par intégration par parties. Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x^3} \left(2te^{t^2} \times \frac{1}{2t^2} \right) dt \\ &= \left[\frac{e^{t^2}}{2t^2} \right]_x^{x^3} - \int_x^{x^3} e^{t^2} \times \left(\frac{-1}{t^3} \right) dt \\ &= \frac{e^{x^6}}{2x^6} - \frac{e^{x^2}}{2x^2} + \int_x^{x^3} \frac{e^{t^2}}{t^3} dt. \end{aligned}$$

On peut également affirmer que si $x \geq 1$ alors $x^3 \geq x$ donc

$$\left| \int_x^{x^3} \frac{e^{t^2}}{t^3} dt \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{x^3} \frac{e^{t^2}}{t} dt = \frac{F(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et d'autre part $x^4 e^{x^2-x^6} = \frac{x^2}{1-x^4} \times (x^2 - x^6) e^{x^2-x^6} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

finalement $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^6}}{2x^6}$.

[Réponse I.8]**(Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$)***(Relire la question : page 25, le cours : [P I.17 p.20])*

Soit g la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles $\mathbb{R}_*^-$ et $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x < 0$ et tout entier n , $g^{(n)}(x) = 0$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} g^{(n)}(x) = 0$, il suffit de prouver que $g^{(n)}$ admet la même limite nulle à droite de 0 pour appliquer le théorème [P I.17].

◇ Déterminons, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $g^{(n)}(x)$.

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \text{ et } g''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

On conjecture que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x > 0, g^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$.

Montrons alors par récurrence que la propriété H_n : « il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0, g^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

H_0 est vérifiée avec $P_0 = 1$ car $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, g(x) = P_0 \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie.

Il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0, g^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$ donc :

$$\forall x > 0, g^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{x^2} P_n \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} P_n' \left(\frac{1}{x} \right) \right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Ainsi, si l'on note $P_{n+1} = X^2 P_n - X^2 P_n' \in \mathbb{R}[X]$ alors

$$\forall x > 0, g^{(n+1)}(x) = P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Donc H_{n+1} est vraie et on conclut par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que : } \forall x > 0, g^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

◇ Par croissances comparées, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow 0^+} g^{(n)}(x) = 0$. Ainsi on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow 0^+} g^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g^{(n)}(x) = 0.$$

D'après le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ [P I.17], la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

[Réponse I.9] (Application de la formule de Taylor reste intégral)

(Relire la question : page 25, le cours : [P I.24 p.22])

Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, a[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

(-) Soit $x \in [0, a[$. Montrons que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \geq 0$ donc la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Notons $R_n(x) = \int_0^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La positivité de $f^{(n+1)}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) \geq 0$.

D'après la formule de Taylor reste intégral [P I.24], on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + R_n(x) = f(x),$$

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $f(x)$. Ainsi le théorème de la limite monotone assure la convergence de cette suite.

Donc la suite $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi convergente.

(-) Soit maintenant $y \in [0, a[$ et $x \in]y, a[$. On a pour tout $t \in]0, y[$, $\frac{y-t}{x-t} < \frac{y}{x}$.
Donc par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq R_n(y) \leq \left(\frac{y}{x}\right)^n \int_0^y \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq \left(\frac{y}{x}\right)^n R_n(x).$$

De plus, la suite $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^n = 0$

car $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$. Donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(y) = 0$. On en déduit, d'après

la formule de Taylor, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)y^k}{k!} = f(y)$.

Ainsi

$$\forall y \in [0, a[, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)y^k}{k!} = f(y).$$

[Réponse I.10]**(Calcul de limites avec des équivalents)**

(Relire la question : page 25, le cours : [P I.22 p.21])

Posons $u_n = \frac{(n+1)!(2n-2)!(3n)!432^n}{(6n)!}$ pour tout entier n supérieur ou égal

à 1. On peut écrire alors $u_n = \frac{(n+1)}{(2n)(2n-1)} \times \frac{n!(2n)!(3n)!}{(6n)!} \times 432^n$.

Avec l'équivalent de Stirling [P I.22], on en déduit que

$$\begin{aligned} u_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{4n^2} \times \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \left(\frac{3n}{e}\right)^{3n} \sqrt{6\pi n}}{\left(\frac{6n}{e}\right)^{6n} \sqrt{12\pi n}} \times 432^n \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{4n} 3^{3n}}{4n} \times \frac{2^{2n} 3^{3n}}{6^{6n}} \times \sqrt{\frac{(2\pi n)(4\pi n)(6\pi n)}{12\pi n}} \quad \text{d'où} \\ u_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!(2n-2)!(3n)!432^n}{(6n)!} = \frac{\pi}{2}.$

[Réponse I.11]**(Application du théorème de Rolle)**

(Relire la question : page 25, le cours : [P I.14 p.19])

Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé, de degré n et à racines simples notées $a_1, \dots, a_n$ avec $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $P(a_i) = P(a_{i+1}) = 0$ et l'application polynomiale associée au polynôme P est dérivable sur $[a_i, a_{i+1}]$ donc, d'après le théorème de Rolle [P I.14], il existe un réel $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$.

On a donc exhibé $n-1$ racines $b_1, \dots, b_{n-1}$ de P' telles que $b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1}$ et comme P' est de degré $n-1$, P' est encore scindé et à racines simples.

[Réponse I.12]**(Un peu de décomposition en éléments simples)**

(Relire la question : page 25, le cours : [P I.27 p.23], [P I.10 p.17])

Soit k un entier naturel non nul. D'après la propriété [P I.27], nous savons qu'il existe des réels a , b et c tels que :

$$\frac{1}{X^2(2X+1)} = \frac{aX+b}{X^2} + \frac{c}{2X+1} \quad (E).$$

Multiplions l'égalité (E) par $2X+1$ et évaluons en $\frac{-1}{2}$. On obtient $c = 4$.

En soustrayant $\frac{4}{2X+1}$ à $\frac{1}{X^2(2X+1)}$, on obtient la fin de la décomposition

en éléments simples : $\frac{1}{X^2(2X+1)} - \frac{4}{2X+1} = \frac{1-4X^2}{X^2(2X+1)} = \frac{1-2X}{X^2}$.

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2(2k+1)} = \frac{1}{k^2} - \frac{2}{k} + \frac{4}{2k+1}$ et en sommant on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(2k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{4}{2k+1}.}$$

Décomposons la somme $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}$ en la somme des termes d'indices impairs et la

somme des termes d'indices pairs. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}. \text{ Donc } \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \right) + 1 = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(2k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 4 \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 4 + 4 \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 4 + 4 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 4 + 4 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 4 + \frac{4}{2n+1} + \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

On reconnaît dans la dernière somme une somme de Riemann [P I.10] de la fonction continue $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Par conséquent,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$. Par passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(2k+1)} = \frac{\pi^2}{6} - 4 + 4 \ln(2).}$$

[Réponse I.13]**(Application de la formule de Taylor)**

(Relire la question : page 26, le cours : [P I.26 p.23])

☞ On remarque que $P'(x_i) \neq 0$ car x_i est une racine simple de P .

(-) Montrons tout d'abord que pour tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ qui se factorise en $P = \mu \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ on a : $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X - x_i}$.

En utilisant la formule de dérivation d'un produit, une récurrence prouve que si $P_1, \dots, P_n$ sont des polynômes, alors

$$\left(\prod_{i=1}^n P_i \right)' = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} P_j \right) P_i' \left(\prod_{j=i+1}^n P_j \right).$$

En appliquant cette formule de dérivation avec $P_i = (X - x_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et en multipliant par μ , on obtient :

$$P' = \mu \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} (X - x_j) \right) \times \left(\prod_{j=i+1}^n (X - x_j) \right). \quad \boxed{\text{Donc } \frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X - x_i}.$$

(-) Fixons i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$: $\frac{P'}{P} - \frac{1}{X - x_i} = \frac{(X - x_i)P' - P}{(X - x_i)P} = \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \frac{1}{X - x_j}$.

D'après la formule de Taylor [P I.26], $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_i)}{k!} (X - x_i)^k$.

Or $P(x_i) = 0$ donc $P - (X - x_i)P'(x_i) = (X - x_i)^2 \sum_{k=2}^n \frac{P^{(k)}(x_i)}{k!} (X - x_i)^{k-2}$ et donc

$$\frac{P'}{P} - \frac{1}{X - x_i} = \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \frac{1}{X - x_j} = - \frac{\sum_{k=2}^n \frac{P^{(k)}(x_i)}{k!} (X - x_i)^{k-2}}{\sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(x_i)}{k!} (X - x_i)^{k-1}}.$$

En évaluant en $X = x_i$, seuls les termes $(X - x_i)$ d'exposant nul subsistent. On obtient donc, après multiplication par -2 :

$$\boxed{2 \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \frac{1}{x_j - x_i} = \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}.$$

Chapitre II

Intégration

Pour bien aborder ce chapitre, il est impératif de maîtriser les notions de première année concernant l'intégration des fonctions continues sur un segment, les relations de comparaison et les développements limités.
On désigne par la lettre $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

II.1 - Cours

II.1.1 - Intégrales de fonctions continues par morceaux

[Définition II.1] Sur un segment

Soit a et b deux réels. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que la fonction f **est continue par morceaux sur** $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ du segment $[a, b]$ telle que :

- (-) pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, f est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$,
- (-) pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, f admet une limite finie à gauche et à droite en a_k , et f admet une limite finie à droite en $a = a_0$ et une limite finie à gauche en $b = a_n$.

On dit alors que σ est une **subdivision du segment** $[a, b]$ **adaptée à** f .

♥ Voir l'exercice : [Q II.1 p. 49]

[Propriété II.2] Fonction bornée

Si a et b sont des réels avec $a \leq b$, toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ est bornée.

♥ Voir l'exercice : [Q II.1 p. 49]

[Définition II.3] Sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On dit que f est **continue par morceaux sur l'intervalle** I , si elle est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I .

✎ On constate donc qu'une fonction est continue par morceaux sur un segment si et seulement si on peut subdiviser ce segment en un nombre fini de segments sur l'intérieur desquels la fonction est continue et aux extrémités desquels elle possède des limites finies.

Pour qu'une fonction soit continue par morceaux sur un intervalle, on peut avoir besoin d'un nombre infini de tels segments. [Q II.1 p. 49]

[Propriété II.4] Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble noté $\text{Cpm}(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Il est stable par le produit de fonctions.

[Propriété II.5] Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision du segment $[a, b]$ adaptée à f . Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note f_i le prolongement continu sur $[a_i, a_{i+1}]$ de la restriction de f à l'ouvert $]a_i, a_{i+1}[$. On définit alors $\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i, a_{i+1}]} f_i$. Cette quantité ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f , on l'appelle **intégrale de a à b de f** .

[Propriété II.6] Intégrale de fonctions égales sauf en un nombre fini de points

Soit f et g deux fonctions à valeurs complexes continues par morceaux sur le segment $[a, b]$. Si f et g sont égales excepté en un nombre fini de points alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

[Propriété II.7] Fonction d'intégrale nulle

Soit $f \in \text{Cpm}([a, b], \mathbb{R})$. Si $f \geq 0$ et $\int_{[a,b]} f = 0$ alors f n'est pas nécessairement nulle, mais le nombre de points où elle ne s'annule pas est fini.

II.1.2 - Intégrales généralisées

[Définition II.8] Intégrale généralisée convergente, divergente

(-) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.

On dit que **l'intégrale** $\int_a^b f(t) dt$, **impropre en** b , est **convergente** si

$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie en b^- .

On note alors $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ **diverge**.

(-) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \{-\infty\} \cup]-\infty, a[$.

Soit $f :]c, a] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $]c, a]$.

On dit que **l'intégrale** $\int_c^a f(t) dt$, **impropre en** c , est **convergente** si

$x \mapsto \int_x^a f(t) dt$ admet une limite finie en c^+ .

On note alors : $\int_c^a f(t) dt = \lim_{x \rightarrow c^+} \int_x^a f(t) dt$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_c^a f(t) dt$ **diverge**.

♥ Cette proposition n'est utilisée que lorsque l'on souhaite prouver que l'intégrale converge et en même temps déterminer sa valeur.

Pour prouver seulement la convergence, on utilisera souvent d'autres méthodes. On préférera notamment comparer l'intégrale à étudier à des intégrales connues. [Q II.2 p. 49], [Q II.4 p. 50], [Q II.5 p. 50]

[Q II.7 p. 50], [Q II.11 p. 51]

♥ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Soit $c \in [a, b[$.

Soit $f \in \text{Cpm}([a, b[, \mathbb{R})$. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seule-

ment si l'intégrale $\int_c^b f(t) dt$ converge, et l'on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

La relation de Chasles [P II.15] généralisera cette notion.

⚡ Conformément à la caractérisation séquentielle des limites, la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ implique que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite b , la suite $\left(\int_a^{x_n} f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(t) dt$. Cependant, l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite b telle que la suite $\left(\int_a^{x_n} f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ne suffit pas à assurer la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$. [Q II.4 p. 50], [Q II.5 p. 50]

[Propriété II.9] Fonction prolongeable par continuité en $b \in \mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[$. Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ est une application continue par morceaux sur $[a, b[$ qui admet une limite finie en b^- , alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge.

♥ Voir l'exercice : [Q II.5 p. 50]

[Propriété II.10] Condition nécessaire mais non suffisante de convergence au voisinage de $+\infty$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une application continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si f admet une limite en $+\infty$ et si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors la limite de f en $+\infty$ est nulle.

⚡ L'implication réciproque est fausse.

Par exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ n'est pas convergente bien que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$.

Par ailleurs, il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en $+\infty$, mais dont l'intégrale sur $[a, +\infty[$ converge. [Q II.5 p. 50]

⚡ On retient donc que si le problème d'intégrabilité est en un point fini de $\mathbb{R}$, alors l'existence d'une limite finie de f au point étudié suffit à assurer la convergence de l'intégrale.

Si le problème d'intégrabilité est en l'infini, le calcul de la limite de l'intégrande permet dans certains cas de prouver la divergence de l'intégrale, mais il ne permet jamais de prouver sa convergence. [Q II.6 p. 50]

[Propriété II.11] Intégrales sur un intervalle quelconque

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge s'il existe $m \in]a, b[$ tel que les intégrales $\int_a^m f(t) dt$ et $\int_m^b f(t) dt$ convergent. Dans ce cas, quel que soit le réel m' choisi dans $]a, b[$, les intégrales $\int_a^{m'} f(t) dt$ et $\int_{m'}^b f(t) dt$ convergent, la valeur de $\int_a^{m'} f(t) dt + \int_{m'}^b f(t) dt$ ne dépend pas du choix du réel m' et l'on note :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^m f(t) dt + \int_m^b f(t) dt.$$

⚠ L'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt$ ne suffit pas à assurer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$. En revanche, la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ implique la convergence de $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$, et implique donc aussi l'existence des limites finies en $+\infty$ de $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ et $x \mapsto \int_{-x}^0 f(t) dt$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt$ existe par somme de limites. [Q II.6 p. 50]

II.1.3 - Propriétés de l'intégrale généralisée

Dans ce paragraphe, a et b sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$.

[Propriété II.12] Linéarité de l'intégrale

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$ telles que les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt$ converge et : $\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt$.

♥ On en déduit les propriétés (un peu abusivement formulées) suivantes :
 (–) la somme de deux intégrales convergentes est convergente,
 (–) la somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente est divergente.

⚠ Cependant il faut faire attention dans nos calculs : il se peut que l'on puisse prouver que l'intégrale $\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt$ converge, mais que l'on ne puisse pas écrire : $\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt$ car les deux intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ divergent.

[Propriété II.13] Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(-) Les fonctions $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont continues par morceaux sur $]a, b[$.

(-) L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^b \mathcal{R}e(f(t)) dt$ et $\int_a^b \mathcal{I}m(f(t)) dt$ convergent. Dans ce cas, on a alors :

$$\mathcal{R}e\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \mathcal{R}e(f(t)) dt,$$

$$\mathcal{I}m\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \mathcal{I}m(f(t)) dt.$$

(-) L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_a^b \overline{f(t)} dt$ converge. En cas de convergence, on a : $\overline{\int_a^b f(t) dt} = \int_a^b \overline{f(t)} dt$.

♥ Voir les exercices : [Q II.5 p. 50], [Q II.15 p. 52]

[Propriété II.14] Positivité et croissance de l'intégrale

Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(-) Si $f \geq 0$ et si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

(-) Si $f \geq g$ et si les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt.$$

♥ Voir les exercices : [Q II.12 p. 51], [Q II.13 p. 51], [Q II.14 p. 52]

[Propriété II.15] Relation de Chasles

Soit $c \in]a, b[$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.

Si les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

[Propriété II.16] Changement de variables

Soit α et β des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]\alpha, \beta[$ dans $]a, b[$ (respectivement strictement décroissante de $]\beta, \alpha[$ dans $]a, b[$) et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.

Alors l'intégrale $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$ est convergente si et seulement si

l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, et en cas de convergence :

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du = \int_a^b f(t) dt.$$

♥ Voir les exercices : [Q II.2 p. 49], [Q II.3 p. 49], [Q II.5 p. 50]

[Propriété II.17] Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. Si la fonction fg admet une limite finie à droite en a et une limite finie à gauche en b , alors les intégrales

$\int_a^b f'(t)g(t) dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t) dt$ sont de même nature et si elles convergent,

on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

♥ On retient que pour que l'on puisse écrire une intégration par parties, il suffit de prouver l'existence de 2 termes sur 3, parmi les deux intégrales et le crochet. Leur existence entraîne alors l'existence du troisième.

En cas de doute, le plus sûr reste de se ramener à des intégrales de fonctions continues par morceaux sur un segment avant de faire tendre les bornes vers les valeurs souhaitées. [Q II.12 p. 51], [Q II.14 p. 52]

[Q II.15 p. 52]

♥ Comme pour les intégrales de fonctions continues, il y a essentiellement trois tactiques pour déterminer la valeur d'une intégrale généralisée.

(-) Faire apparaître la dérivée d'une fonction connue.

(-) Procéder à une intégration par parties.

(-) Effectuer un changement de variable.

Pour ces trois cas, voir l'exercice [Q II.2 p. 49]

II.1.4 - Fonctions intégrables

[Propriété II.18] Convergence par majoration

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $]a, b[$.

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

On peut facilement adapter ce théorème au cas où l'intégrale est impropre en la borne inférieure de l'intervalle d'intégration.

[Propriété II.19] Comparaison entre intégrales de fonctions positives

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$.

Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $0 \leq f \leq g$.

Si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge, et dans ce cas :

$$0 \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

[Propriété II.20] Convergence absolue

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Si l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **absolument convergente**.

$$\text{Dans ce cas, } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

[Définition II.21] Fonction intégrable

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue par morceaux sur I . On dit que f est **intégrable** sur I si son intégrale sur I est absolument convergente. On note alors $\int_I f$ ou $\int_I f(t) dt$ son intégrale sur I .

⚡ *Soulignons que l'intégrale sur I de f peut être convergente sans que f ne soit intégrable sur $[a, b]$. L'intégrale est dite alors **semi-convergente**.*

Par exemple, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, qui converge mais ne converge pas absolument, est semi-convergente. [Q II.7 p. 50]

[Propriété II.22] Espace des fonctions intégrables

L'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I est un espace vectoriel que l'on note $L^1(I, \mathbb{K})$.

[Propriété II.23] Fonctions intégrables de référence

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(–) Fonctions exponentielles : la fonction $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha > 0$.

(–) Fonctions de Riemann : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

(–) Soit a, A et B des réels tels que $A < a < B$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x - a|^\alpha}$ est intégrable sur $]a, B]$ et $[A, a[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

(–) La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$.

♥ *Voir les exercices : [Q II.5 p. 50], [Q II.8 p. 50]*

[Propriété II.24] Lien avec un problème d'intégrabilité en 0

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$. La fonction f est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(t + a)$ est intégrable sur $]0, b - a]$.

♥ *Pour étudier un problème d'intégrabilité en une borne finie autre que 0, on se ramène donc usuellement par changement de variable en un problème en 0. C'est plus pratique puisque les formules usuelles de développements limités se font en 0 et que les intégrales de référence concernent des problèmes d'intégrabilité en 0 (ou en une borne infinie).*

II.1.5 - Critères de convergence par comparaison

On va donner les énoncés des critères pour l'étude de la convergence d'une intégrale impropre en la seule borne de droite de l'intervalle d'intégration. On peut évidemment énoncer des théorèmes analogues pour le cas où le problème d'intégrabilité est pour la seule borne de gauche.

♥ *Lorsque l'on étudie l'intégrabilité d'une fonction f sur un intervalle I , on commence par étudier les points de continuité de f , afin de repérer les points donnant lieu à un problème d'intégrabilité.*

S'il y a plusieurs lieux de problèmes d'intégrabilité à étudier, on découpe l'intervalle d'intégration en plusieurs intervalles de façon à analyser séparément chaque problème d'intégration. [Q II.9 p. 51]

[Propriété II.25] Critère de comparaison

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. Si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique l'intégrabilité de f sur $[a, b[$.

♥ *Cette propriété prouve donc que sous les mêmes hypothèses, si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$, alors g n'est pas non plus intégrable sur $[a, b[$. On peut donc aussi bien l'utiliser pour prouver l'intégrabilité d'une fonction que pour prouver sa non intégrabilité. [Q II.5 p. 50], [Q II.7 p. 50]*

[Propriété II.26] Critère de domination

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.

Si $f = O_b(g)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique l'intégrabilité de celle de f sur $[a, b[$.

♥ *Avec les mêmes hypothèses : si $f = O_b(g)$ et si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a, b[$.*

[Q II.3 p. 49], [Q II.5 p. 50], [Q II.11 p. 51]

♥ *On a les mêmes conclusions si $f = o_b(g)$.*

[Q II.12 p. 51], [Q II.13 p. 51]

[Propriété II.27] Critère d'équivalence

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.

Si $f \sim_b g$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $[a, b[$.

♥ Les propriétés 26 et 27 sont à la base de la méthode la plus courante d'étude de l'intégrabilité d'une fonction f dont l'expression s'écrit à l'aide de fonctions usuelles : après avoir identifié le point b au voisinage duquel on étudie l'intégrabilité, on recherche un équivalent simple de f au voisinage de b , puis on compare f aux fonctions intégrables de référence.

[Q II.3 p. 49], [Q II.8 p. 50]

⚡ Si notre fonction f est de signe constant, étudier l'existence de l'intégrale ou son intégrabilité revient au même, on peut donc utiliser le théorème d'équivalence 27.

Attention, si les fonctions f et g continues sur $]a, b]$ ne sont pas de signe constant, il se peut que $f \underset{a}{\sim} g$ et que simultanément les intégrales

$\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ soient de natures différentes. [Q II.10 p. 51]

II.2 - Questions

[Question II.1] Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont continues par morceaux sur la partie de $\mathbb{R}$ considérée ?

$$\left. \begin{array}{l} f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor \quad \text{sur } I = \left[\frac{1}{15}, 1 \right]. \\ f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor \quad \text{sur } J =]0, 1]. \end{array} \right| \begin{array}{l} \tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases} \\ \text{sur } K = [0, 1]. \end{array}$$

(Éclairage page 52, Réponse page 55)

[Question II.2] Quelle est la valeur de chacune des intégrales suivantes ?

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{t+1}{t^3-1} dt, \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{2t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt, \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^t+1}} dt.$$

(Éclairage page 52, Réponse page 56)

[Question II.3] Établir la convergence puis déterminer la valeur de chacune des intégrales suivantes : $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$, $L = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

(Éclairage page 52, Réponse page 58)

[Question II.4] On considère l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} t \times \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$.

Justifier la convergence de I et calculer sa valeur. On donne : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(Éclairage page 53, Réponse page 59)

[Question II.5] Dans chacun des cas suivants, exhiber, s'il en existe, une fonction satisfaisant les conditions demandées.

(–) Fonction f continue sur $[1, +\infty[$, d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$ et n'admettant pas de limite en $+\infty$.

(–) Fonction g continue sur $[0, +\infty[$, d'intégrale divergente sur $[0, +\infty[$ et admettant une limite nulle en $+\infty$.

(–) Fonction h continue sur $]0, 1]$, d'intégrale convergente sur $]0, 1]$ et n'admettant pas de limite en 0.

(–) Fonction i continue sur $]0, 1]$, d'intégrale divergente sur $]0, 1]$ et admettant une limite nulle en 0.

(–) Fonction φ continue sur $\mathbb{R}_+$, non bornée et d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+$.

(Éclairage page 53, Réponse page 60)

[Question II.6] On définit la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + \frac{\text{Arc tan}(|t|)}{t^2 + 1}$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt$. Étudier la convergence de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

(Éclairage page 53, Réponse page 62)

[Question II.7] Soit α un réel strictement positif. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$?

(Éclairage page 53, Réponse page 63)

[Question II.8] Pour quelles valeurs du réel α la fonction

$$f_\alpha : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$?

(Éclairage page 53, Réponse page 64)

[Question II.9] Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur l'intervalle I considéré ?

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto \frac{\ln(1+x)}{(2+\cos(x))x\sqrt{x}} && \text{sur } I = \mathbb{R}_*^+. \\ g : x &\mapsto \frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x+x^3} && \text{sur } I = \mathbb{R}. \\ k : x &\mapsto \frac{x \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{x+1}\right)}{\sqrt{x}+x} && \text{sur } I = \mathbb{R}_*^+. \\ \ell : x &\mapsto \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) && \text{sur } I = \left]\sqrt{\frac{2}{\pi}}, +\infty\right[. \end{aligned}$$

(Éclairage page 54, Réponse page 65)

[Question II.10] La fonction $h : x \mapsto \exp\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) - 1$ est-elle intégrable sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_*^+$? L'intégrale de h sur $\mathbb{R}_*^+$ est-elle convergente ?

(Éclairage page 54, Réponse page 67)

[Question II.11] Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la valeur de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

(Éclairage page 54, Réponse page 68)

[Question II.12] Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et en donner un équivalent au voisinage de $+\infty$.

(Éclairage page 54, Réponse page 69)

[Question II.13] Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. On suppose d'une part que g est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et d'autre part que $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$. Montrer que :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} g(t) dt \right).$$

(Éclairage page 55, Réponse page 70)

[Question II.14] Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On définit la fonction $I_\alpha : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(x+t)^{\alpha+1}} dt$. Montrer que la fonction I_α est définie sur $\mathbb{R}_+$ et positive. (Éclairage page 55, Réponse page 71)

[Question II.15] Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On définit la fonction $R_\alpha : x \mapsto \left| \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^\alpha} du \right|^2$. Montrer que la fonction R_α est définie sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante. (Éclairage page 55, Réponse page 71)

II.3 - Éclairages

[Éclairage II.1] Il suffit d'utiliser soigneusement les définitions [D II.1 p.39] et [D II.3 p.39] ainsi que la propriété [P II.2 p.39], en commençant par se poser les questions suivantes : la partie de $\mathbb{R}$ considérée est-elle un segment ?

La fonction admet-elle un nombre fini ou infini de points de discontinuité sur chaque segment inclus dans l'ensemble considéré ?

Un dessin du graphe peut être bienvenu. (Réponse page 55)

[Éclairage II.2] Le calcul de l'intégrale permet d'avoir à la fois l'existence et la valeur.

Conformément à la définition [D II.8 p.41], pour calculer une intégrale de type

$\int_a^b f(t) dt$ lorsque f est continue sur $[a, b]$, on commence par utiliser les méthodes usuelles de première année pour calculer $\int_a^x f(t) dt$ pour tout $x \in [a, b]$.

Ensuite, on détermine la limite lorsque x vers b de cette quantité.

Pour déterminer I , on pourra décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$.

Pour calculer l'intégrale J , on peut effectuer une intégration par parties.

En effectuant le changement de variable $x = \sqrt{e^t + 1}$ on pourra calculer une intégrale égale à K . (Réponse page 56)

[Éclairage II.3] Pour calculer l'intégrale K , on peut, au choix, effectuer une décomposition en éléments simples, ou bien utiliser le changement de variable $x = \text{Arc tan}(t)$.

On remarque que l'intégrale L est impropre en 0 et en $+\infty$. On peut effectuer le changement de variable $u = \frac{1}{t}$. *(Réponse page 58)*

[Éclairage II.4] On est naturellement enclin à se placer sur des intervalles sur lesquels la fonction $t \mapsto \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est constante. *(Réponse page 59)*

[Éclairage II.5] Pour la fonction f , on peut chercher une fonction qui n'a pas de limite en $+\infty$, par exemple, une fonction à base de sinus ou cosinus de type $t \mapsto \sin(t^\alpha)$.

La propriété de cours [P II.9 p.42] prouve que la fonction i n'existe pas.

Pour la dernière fonction φ , on peut commencer par déterminer pour chaque $k \in \mathbb{N}$, par simple calcul d'aire, la nature de l'intégrale sur $[1, +\infty[$ de la fonction φ_k définie sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[n, n + \frac{1}{n^3} \right], \quad \varphi_k(x) &= -n^{k+3} \left| x - n - \frac{1}{2n^3} \right| + \frac{n^k}{2} \\ \forall x \in \left] n + \frac{1}{n^3}, n + 1 \right], \quad \varphi_k(x) &= 0. \end{aligned}$$

(Réponse page 60)

[Éclairage II.6] On pourra remarquer que $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est impaire tandis que $t \mapsto \frac{\text{Arc tan}(|t|)}{t^2+1}$ est paire afin de faciliter le calcul de $\int_{-x}^x f(t) dt$. *(Réponse page 62)*

[Éclairage II.7] Il peut être utile de procéder à une intégration par parties pour augmenter la puissance du t présent au dénominateur, de façon à se retrouver avec une intégrande dominée par une fonction intégrable de la forme $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$. *(Réponse page 63)*

[Éclairage II.8] On ne va pas faire ici d'intégration par parties car la fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ n'est pas facile à intégrer.

Pour certaines valeurs de α , la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est immédiatement dominée par une fonction intégrable.

Pour les autres valeurs de α , on peut découper l'intervalle d'intégration en intervalles de longueur π et ainsi prouver que la fonction $x \mapsto \int_0^x \left| \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \right| dt$ n'est pas minorée. (Réponse page 64)

[Éclairage II.9] On peut ici utiliser la procédure canonique de détermination de la nature d'une intégrale, lorsque l'on dispose d'une expression explicite de l'intégrande :

Étape 1 : identification des points de continuité de l'intégrande et détermination des problèmes d'intégrabilité.

Étape 2 : comparaison aux intégrales de référence pour conclure quant à l'intégrabilité de la fonction.

Étape 3 : si l'étape 2 n'a pas permis de conclure, on réfléchit à une solution plus rusée. (Réponse page 65)

[Éclairage II.10] On peut utiliser la même procédure canonique de détermination de la nature d'une intégrale qu'à l'exercice précédent.

Étape 1 : identification des points de continuité de l'intégrande et détermination des problèmes d'intégrabilité.

Étape 2 : comparaison aux intégrales de référence au voisinage des points a où l'intégrale est impropre, pour conclure quant à la nature de l'intégrale. Si la fonction n'est pas intégrable au voisinage de a et n'est pas de signe constant au voisinage de a , l'intégrale peut tout de même être convergente. Il est alors souvent utile d'écrire un développement généralisé plus précis que le simple équivalent.

Étape 3 : si l'étape 2 n'a pas permis de conclure, on réfléchit à une solution encore plus rusée. (Réponse page 67)

[Éclairage II.11] La méthode la plus naturelle est sans doute de procéder en deux temps. On commence par prouver l'existence de I_n pour tout entier naturel n puis on établit une relation de récurrence vérifiée par la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour cela, on procède traditionnellement par intégration par parties.

Reste ensuite à en déduire une formule explicite. (Réponse page 68)

[Éclairage II.12] L'existence de $f(x)$ se prouve en comparant $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^2 + 1}}$ à une fonction de référence d'intégrale convergente.

Pour le calcul d'un équivalent, on peut chercher à utiliser une intégration par parties pour faire apparaître une intégrale négligeable au voisinage de $+\infty$ devant $f(x)$. (Réponse page 69)

[Éclairage II.13] Puisque l'on ne dispose pas de théorème directement applicable, nous n'avons guère d'autre choix que de revenir à la définition de la négligeabilité avec les epsilon. *(Réponse page 70)*

[Éclairage II.14] Comme souvent, pour prouver la convergence des intégrales de fonctions "oscillantes", on utilisera une intégration par parties. *(Réponse page 71)*

[Éclairage II.15] Pour prouver que la fonction est définie sur $\mathbb{R}$, comme il est habituel pour les fonctions "oscillantes", on utilisera une intégration par parties. Ensuite, pour prouver la décroissance, on se rappellera que pour tout complexe z , $|z|^2 = z\bar{z}$. *(Réponse page 71)*

II.4 - Réponses

[Réponse II.1]

(Fonctions continues par morceaux)

(Relire la question : page 49, le cours : [D II.1 p.39], [P II.2 p.39]
[D II.3 p.39])

(-) Étudions la fonction $f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor$ sur l'intervalle $I = \left[\frac{1}{15}, 1 \right]$.

Pour tout $x \in \left] \frac{1}{4}, 1 \right]$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \in [1, 2[$, donc $f(x) = 1$.

Pour tout $x \in \left] \frac{1}{9}, \frac{1}{4} \right]$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \in [2, 3[$, donc $f(x) = 2$.

Pour tout $x \in \left] \frac{1}{16}, \frac{1}{9} \right]$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \in [3, 4[$, donc $f(x) = 3$.

La fonction f est donc continue sur les intervalles $\left[\frac{1}{15}, \frac{1}{9} \right]$, $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{4} \right]$, $\left[\frac{1}{4}, 1 \right]$.

Aux points $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{4}$, la fonction admet des limites à droite et à gauche finies.

Donc la fonction f est continue par morceaux sur I .

(-) Étudions la fonction $f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor$ sur $J =]0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est constante sur l'intervalle $\left] \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2} \right]$, égale à n .

Si l'on fixe deux réels $(a, b) \in J^2$ tels que $a < b$ alors la fonction f admet des discontinuités sur le segment $[a, b]$ en les points $\frac{1}{n^2}$ où $n \in \mathbb{N}^* \cap \left[\frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{a}} \right]$ mais elle est continue sur chacun des intervalles ouverts entre deux points consécutifs et elle possède des limites finies à gauche et à droite en ces points. Ainsi, elle est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$.

D'après la définition [D II.3], la fonction f est continue par morceaux sur J .

(-) Étudions la fonction $\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$ sur $K = [0, 1]$.

La fonction $\tilde{f}$ est définie sur le segment $[0, 1]$. Si elle était continue par morceaux sur $[0, 1]$, alors, d'après [P II.2], elle serait bornée. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}(x) = +\infty$.

Donc la fonction $\tilde{f}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.

On peut aussi justifier cette réponse par le fait que la fonction $\tilde{f}$ admet un nombre infini de points de discontinuité sur le segment $[0, 1]$ [D II.3].

[Réponse II.2]

(Décomposition en éléments simples)

(Relire la question : page 49, le cours : [D II.8 p.41], [P II.16 p.45])

(-) Calculons $I = \int_2^{+\infty} \frac{t+1}{t^3-1} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{t+1}{t^3-1}$ est continue sur $[2, +\infty[$ et l'intégrale I est impropre en $+\infty$. Par ailleurs, $\frac{t+1}{t^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ donc l'intégrale I converge.

Utilisons la décomposition en éléments simple dans $\mathbb{R}$ de $\frac{x+1}{x^3-1}$. On sait qu'elle

est de la forme : $\frac{x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{R(x)}{x^2+x+1}$ pour $x \neq 1$. En multipliant cette égalité par $x-1$ et en faisant tendre x vers 1 on a : $a = \frac{2}{3}$.

Donc $\forall x \geq 2 : \frac{R(x)}{x^2+x+1} = \frac{x+1}{x^3-1} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Ainsi $\forall x \geq 2 : \frac{x+1}{x^3-1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Pour tout $A \in]2, +\infty[: \int_2^A \frac{t+1}{t^3-1} dt = \frac{2}{3} \int_2^A \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{3} \int_2^A \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt$.

D'où $\int_2^A \frac{t+1}{t^3-1} dt = \frac{2}{3} \left[\ln(t-1) \right]_2^A - \frac{1}{3} \left[\ln(t^2+t+1) \right]_2^A$.

Donc $\int_2^A \frac{t+1}{t^3-1} dt = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{(A-1)^2}{A^2+A+1} \right) + \frac{\ln(7)}{3}.$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient une limite finie qui assure la convergence de I et l'on peut conclure :

$$I = \frac{\ln(7)}{3}$$

(-) Calculons $J = \int_1^{+\infty} \frac{2t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt.$

La fonction $t \mapsto \frac{2t \ln(t)}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est uniquement impropre en $+\infty$.

Les fonctions $u : t \mapsto \frac{-1}{1+t^2}$ et $\ln$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.

Par intégration par parties, on a pour tout $A \geq 1$:

$$\int_1^A \frac{2t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt = \left[-\frac{\ln(t)}{1+t^2} \right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{t(1+t^2)} dt.$$

Par décomposition en éléments simples, pour $t \geq 1$, $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$ donc, pour tout $A \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{2t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt &= \left[-\frac{\ln(t)}{1+t^2} + \ln(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_1^A \\ &= -\frac{\ln(A)}{1+A^2} + \ln \left(\frac{A}{\sqrt{1+A^2}} \right) + \frac{1}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient la convergence de l'intégrale J et :

$$J = \frac{1}{2} \ln(2).$$

(-) Calculons $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^t+1}} dt.$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^t+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc l'intégrale K est uniquement impropre en $+\infty$.

Effectuons le changement de variable $x = \sqrt{e^t+1}$.

La fonction $t \mapsto \sqrt{e^t+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ car pour tout $t \geq 0$, $e^t+1 > 0$.

Les fonctions $t \mapsto e^t+1$ et $u \mapsto \sqrt{u}$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto \sqrt{e^t+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[\sqrt{2}, +\infty[$. Le changement de variable est donc licite d'après [P II.16].

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[: x = \sqrt{e^t + 1} \iff e^t = x^2 - 1 \iff t = \ln(x^2 - 1).$

On a donc $dt = \frac{2xdx}{x^2 - 1}$ et on conclut que les intégrales K et $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{x^2 - 1} dx$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Pour $A \geq \sqrt{2} : \int_{\sqrt{2}}^A \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int_{\sqrt{2}}^A \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) dx.$

D'où $\int_{\sqrt{2}}^A \frac{2}{x^2 - 1} dx = \left[\ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^A = \ln \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right).$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{x^2 - 1} dx = \ln \left(\frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \right) = 2 \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Donc l'intégrale K converge et

$$K = 2 \ln(1 + \sqrt{2}).$$

[Réponse II.3]

(Changement de variables)

(Relire la question : page 49, le cours : [P II.16 p.45], [P II.26 p.48]
[P II.27 p.48])

(-) Calculons $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt.$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1 + t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc l'intégrale K est uniquement impropre en $+\infty$.

Par ailleurs, $\frac{1}{(1 + t^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale K converge d'après [P II.27].

La fonction $t \mapsto \text{Arc tan}(t)$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. D'après la propriété [P II.16], on peut donc poser pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: x = \text{Arc tan}(t) \iff t = \tan(x).$

L'intégrale K convergeant, par changement de variable [P II.16] on a :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^2(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx.$$

Finalement

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

(-) Calculons $L = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

Au voisinage de 0 : $\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{0}{\sim} \ln(t)$. La fonction $\ln$ étant intégrable sur $]0, 1]$, la fonction f est intégrable sur $]0, 1]$ et d'après la propriété [P II.27] l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ converge.

Au voisinage de $+\infty$: $\frac{\ln(t)}{1+t^2} = \underset{+\infty}{o} \left(\frac{1}{t\sqrt{t}} \right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ converge d'après [P II.26].

Donc l'intégrale L est convergente.

Effectuons le changement de variable $u = \frac{1}{t}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, strictement décroissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}_*^+$ vers $\mathbb{R}_*^+$.

D'après la propriété [P II.16], ce changement de variable est autorisé et :

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln(u)}{1+\frac{1}{u^2}} \times \frac{-1}{u^2} du = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = -L.$$

Donc $L = 0$.

[Réponse II.4]

(Calcul d'intégrale à l'aide d'une série)

(Relire la question : page 50, le cours : [D II.8 p.41])

(-) Montrons l'existence de I .

La fonction $f : t \mapsto t \times \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Pour $t > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = 0$ donc $f(t) = 0$. La fonction f est intégrable sur $]1, +\infty[$.

Pour $t \in]0, 1]$, on a : $\frac{1}{t} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq \frac{1}{t}$ donc $1-t \leq f(t) \leq 1$. Par encadrements, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$ donc f est aussi intégrable sur $]0, 1]$.

(-) Calculons I .

On a, d'après [P II.8] : $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$.

La relation de Chasles donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(t) dt$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right], t \times \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = kt$. Donc $\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(t) dt = \frac{1}{2} \left[kt^2 \right]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}$.

$$\boxed{\text{D'où } \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(t) dt = \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}.$$

On cherche à sommer cette quantité. On va donc la décomposer en éléments simples. On sait que l'on peut trouver des réels a, b et c tels que :

$$\forall x > 0, \frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \quad (E).$$

En multipliant (E) par x puis en faisant tendre x vers 0 on obtient $a = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{2x+1}{x(x+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{2x+1-(x+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} = \frac{-x-1+1}{(x+1)^2}.$$

On a ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{2k+1}{k(k+1)^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$. D'où pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

$$\text{Ainsi : } \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} - \frac{1}{2n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant l'indication de l'énoncé :

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{12}.$$

[Réponse II.5]

(Convergence d'intégrale et limites)

(Relire la question : page 50, le cours : [D II.8 p.41], [P II.9 p.42], [P II.10 p.42] [P II.13 p.44], [P II.16 p.45], [P II.23 p.47], [P II.25 p.48], [P II.26 p.48])

(-) Exhibons une fonction f continue sur $[1, +\infty[$, d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$ et n'admettant pas de limite en $+\infty$.

L'intégrale convergeant, si f avait une limite en $+\infty$, on aurait, d'après la propriété [P II.10], $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On cherche donc une fonction qui n'a pas de limite en $+\infty$, par exemple, une fonction à base de sinus ou cosinus.

On peut donc chercher une fonction de type $t \mapsto \sin(t^\alpha)$, avec α choisi tel que, par changement de variable, on se retrouve avec une fonction intégrable de type $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u^\beta}$ avec $\beta > 1$.

On va étudier le cas $\alpha = 2$. Considérons donc la fonction $f : t \mapsto \sin(t^2)$.

Montrons que $J = \int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$ et $I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt$ convergent.

Soit $K = I + iJ = \int_1^{+\infty} e^{it^2} dt$.

Par le changement de variable $t = \sqrt{u}$ (possible car $u \mapsto \sqrt{u}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$), les intégrales K et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}} du$ sont de même nature d'après la propriété [P II.16].

Soit $z : u \mapsto -ie^{iu}$ et $r : u \mapsto u^{-\frac{1}{2}}$. Les fonctions z et r sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ donc pour tout $x > 1$, par intégration par parties, on a :

$$\int_1^x \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}} du = \left[\frac{-ie^{iu}}{2\sqrt{u}} \right]_1^x - \frac{1}{4} \int_1^x \frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}} du. \quad (\star)$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ie^{ix}}{2\sqrt{x}} = 0$ car $|-ie^{ix}| = 1$.

D'autre part, $\frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}} = O\left(\frac{1}{u\sqrt{u}}\right)$ et la fonction $u \mapsto \frac{1}{u\sqrt{u}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc la fonction $u \mapsto \frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après les

propriétés [P II.23] et [P II.26]. Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}} du$ converge.

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité $(\star)$, on en déduit l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}} du$. Donc l'intégrale K converge. D'après la propriété [P II.13]

$$\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

Cependant la fonction $f : t \mapsto \sin(t^2)$ n'a pas de limite quand t tend vers $+\infty$, puisque la suite $(f(\sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}))_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'en a pas alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = +\infty$.

(-) La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$, admet une limite nulle en $+\infty$ et pourtant l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1} dt$ est divergente.

La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t+1}$ vérifie les hypothèses.

(-) La fonction $h : t \mapsto \ln(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0, 1]$.

Or $\forall t \in]0, 1]$, $\left| \ln(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq -\ln(t)$ et la fonction $t \mapsto -\ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ donc h est intégrable sur $]0, 1]$ d'après la propriété [P II.25].

Par contre, h n'admet ni limite finie ni limite infinie en 0, puisque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h\left(\frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}\right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 0.$$

(-) Soit i continue sur $]0, 1]$ de limite nulle en 0. Alors i est prolongeable par continuité en 0 donc $\int_0^1 i(t) dt$ converge d'après la propriété [P II.9].

Il ne peut exister de fonction continue sur $]0, 1]$, d'intégrale divergente sur $]0, 1]$ et admettant une limite nulle en 0.

(-) Cherchons une fonction φ continue sur $\mathbb{R}_+$, non bornée et d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, considérons la fonction φ_k définie sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\forall x \in \left[n, n + \frac{1}{n^3}\right]$, $\varphi_k(x) = -n^{k+3} \left|x - n - \frac{1}{2n^3}\right| + \frac{n^k}{2}$ et $\forall x \in \left]n + \frac{1}{n^3}, n+1\right[$, $\varphi_k(x) = 0$.

La fonction φ_k est croissante sur l'intervalle $\left[n, n + \frac{1}{2n^3}\right]$ et décroissante sur $\left[n + \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$. Son graphe est un triangle de base $\frac{1}{n^3}$ de hauteur $\frac{n^k}{2}$ donc on a : $\int_n^{n+1} \varphi_k(t) dt = \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} \varphi_k(t) dt = \frac{n^{k-3}}{4}$.

Pour $k = 1$, la série $\sum \frac{n^{k-3}}{4}$ converge donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi_k(t) dt$ converge et pourtant φ_k n'est pas bornée.

☞ Cette fonction fournit aussi un contre-exemple pour le premier item.

[Réponse II.6]

(Fonction non intégrable sur $\mathbb{R}$)

(Relire la question : page 50, le cours : [P II.10 p.42], [P II.11 p.42])

La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

on a : $\int_{-x}^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = 0$.

La fonction $t \mapsto \frac{\text{Arc tan}(|t|)}{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{-x}^x \frac{\text{Arc tan}(|t|)}{t^2+1} dt = 2 \int_0^x \frac{\text{Arc tan}(t)}{t^2+1} dt = \left[(\text{Arc tan}(t))^2 \right]_0^x = (\text{Arc tan}(x))^2.$$