TOUT-EN-UN

# TREMPLIN MATHS

pour la **PRÉPA SCIENTIFIQUE**

- Introduction au programme
- Méthodologie
- Entraînement progressif

Dr Jean Perisson

ellipses

# Chapitre 1

# Avant-propos

## 1.1 Objectifs de cet ouvrage

### 1.1.1 Le constat

Il existe un fossé considérable entre le niveau de la Terminale et celui de la MathSup, à plusieurs titres.

L'arrivée en MathSup est ainsi un choc que les futurs "taupins" ne sont pas tous en mesure de supporter intellectuellement (ou malheureusement trop tard). Il y a plusieurs causes à cela, ce dont les professeurs de MathSup se plaignent d'ailleurs abondamment.

Ces diverses raisons sont d'ailleurs intimement et très largement liées.

• La rigueur de raisonnement et la qualité de rédaction acquises en fin de secondaire restent très inférieures à ce que les professeurs attendent d'un candidat à MathSup.
• Les connaissances pré-requises nécessaires sont souvent mal maîtrisées car superficielles, voire très insuffisantes.
• Les élèves, n'ont pas toujours appris à "sécher" [1] de manière constructive sur un problème, par manque d'outils. Ils ont dès lors peu d'autonomie et restent souvent désemparés face à la

1. ll ne s'agit pas de rester inerte et de fixer sa feuille, le cerveau inactif, pendant des heures. Il faut au contraire procéder à des investigations méthodiques, toujours fructueuses, même quand elles n'aboutissent pas.

moindre difficulté.
• Le volume de cours est rapidement très supérieur à celui que l'on rencontre en Terminale, et il n'y a aucun répit !

### 1.1.2 Ce que ce livre peut pour vous :

Son apport consiste à pallier la plupart des inconvénients que nous venons d'évoquer.

Car tout s'apprend, et il n'y a pas de fatalité : MathSup ne doit pas être perçue comme une *terra incognita* inquiétante.

Le but poursuivi par cet ouvrage est donc triple :

1. combler les lacunes mentionnées ci-dessus,
2. donner de bonnes habitudes et méthodes, notamment celles d'un travail soutenu, précis et exigeant
3. anticiper le programme de MathSup et ses difficultés dans ce qu'il présente de "choquant" par sa rupture avec le niveau de la terminale. Ainsi :
   • les points délicats du cours sont abordés sans perdre de temps, sans détours : nous ne proposons donc pas de revoir le programme de terminale.
   • l'étudiant est confronté d'emblée aux méthodes de MathSup, mais toutefois de manière progressive, en s'appropriant peu à peu tous les outils qui lui permettront de se familiariser à son nouvel environnement.
   • très vite, l'étudiant acquiert les bonnes pratiques et possède ainsi rapidement les clés qui lui évitent de s'égarer, donc de se décourager.

### 1.1.3 Ce que ce livre ne vous apportera pas :

• cet ouvrage n'est pas un $n^{\text{ième}}$ livre de cours de math de niveau MathSup (il ne traite pas la totalité du programme, il s'en faut de beaucoup). Il n'a donc pas la prétention de "concurrencer" les ouvrages existants, au demeurant tous excellents et complets.
• ce n'est pas non plus une sorte de stage pré-rentrée où l'on révise et muscle l'essentiel des notions vues en terminale (en principe, vos professeurs s'en chargeront dans le mois qui suit la rentrée) et où l'on se contente d'effleurer les notions de MathSup.

**Insistons** : bien sûr, par obligation, nous reverrons certains points de terminale et aborderons ceux de MathSup. **Mais ce n'est pas le but essentiel**.

Nous prétendons en effet donner des méthodes efficaces autant que du contenu : l'étudiant doit se sentir rassuré et à l'aise dès le début des cours.

Notre seule ambition est donc de favoriser une délicate transition et de proposer aux professeurs de MathSup des élèves déjà "opérationnels" et à qui il n'est nul besoin de tout ré-expliquer.

## 1.2 Organisation

L'architecture de cet ouvrage se décompose en 3 parties.

### 1.2.1 Partie 1

**C'est la partie "généralités"**.

• Elle comporte tout d'abord une section méthodologie : c'est un tremplin indispensable qu'il faut travailler avec une grande rigueur. Souvent, les démonstrations sont simplement parachutées, sans que l'étudiant ne comprenne clairement d'où elles sortent et ne se sente capable de les initier lui-même. C'est pourquoi chaque point de ce chapitre sera illustré par un exemple issu de ses connaissances de terminale, en attendant (parties 2 et 3) que ne soit vu le programme de MathSup proprement dit.
• Elle comprend également l'introduction de vocabulaire, de définitions et de points généraux de cours qui serviront par la suite et ne sont pas rattachés **spécifiquement** à l'analyse ou à l'algèbre.

### 1.2.2 Parties 2 et 3

Elles anticipent certaines notions majeures **d'analyse et d'algèbre linéaire** abordées au cours de cette année cruciale. Ces deux parties sont indépendantes, mais il vaut mieux les traiter dans l'ordre proposé, car c'est probablement dans cet ordre que vous les découvrirez en MatSup.

Chapitre 2

# Logique et méthodologie

## 2.1 La rédaction

**" Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement et les mots pour le dire arrivent aisément "**

Il est d'usage, et donc peu original, de citer Boileau[1] pour illustrer la "problématique"[2] de la rédaction.

Car une rédaction soignée :

1. sera la preuve que les exercices posés sont maîtrisés
2. vous mettra à l'abri d'un jugement sévère de vos professeurs

### 2.1.1 Les bases

Ce paragraphe est essentiel : une présentation concise et complète de vos résultats sera particulièrement appréciée par vos professeurs. C'est pourquoi nous n'hésitons pas à vous sembler un peu "scolaires", pour vous donner de bonnes pratiques.[3] Ne sous-estimez donc pas les directives ci-dessous, même si elles peuvent parfois vous sembler naïves. Nous donnerons ensuite quelques exemples concrets pour illustrer notre propos.

1. dont la paternité de cette phrase n'est d'ailleurs pas avérée.
2. comme l'on dit aujourd'hui !
3. Elles n'ont aucun caractère absolu. Chaque professeur a ses propres habitudes et le vôtre vous proposera les siennes, auxquelles il est conseillé de se conformer.

### 2.1.2 Rédaction de chaque question

1. **Énoncé de la question** (bien mise en évidence en la soulignant proprement) : l'étudiant prendra soin de respecter la numérotation du texte de façon que le correcteur s'y retrouve.
2. **Développement de la démonstration** : il doit être nettement détaché des points 1 et 3.
3. **Énoncé de la conclusion**, clairement mise en évidence (encadrée, soulignée, bien séparée du corps de la démonstration etc.).

**Important** : ne pas passer à la question suivante avant de s'assurer que la conclusion en 3 correspond bien à la question posée en 1 [4].

### 2.1.3 Les erreurs à éviter

Les éléments qui suivent concernent le corps de démonstration (paragraphe 2 ci-dessus) :

1. chaque ligne doit comporter une phrase (algébrique ou autre), et non une simple expression algébrique qui n'est pas une phrase. Ce sont deux notions à bien distinguer :
   - **une expression algébrique** est un "individu", un sujet : par exemple, $(x-4)$ est une expression algébrique
   - **une phrase** relie entre elles plusieurs expressions : par exemple, $x-4=2$ est une phrase (elle contient un sujet, un verbe et un complément) qui peut-être une équation, une identité etc.
2. deux lignes (phrases) consécutives doivent être séparées par des liens logiques de coordination (or, donc, d'où, soit, finalement etc.).

Traitons un exemple de rédaction

**Résoudre l'équation** $x^2-4=3x-6$ (exercice certes plutôt élémentaire, mais qui nous servira de modèle).

- **développement catastrophique**

$$x^2-4-3x+6=0$$

4. Vous vous dîtes peut-être : l'auteur exagère, cela va sans dire. Certes, mais comme j'ai eu quelques surprises au cours de ma carrière, il me semble que cela va encore mieux en le disant.

$$(x-2)(x+2)-3(x-2)$$

$$(x-2)(x-1) \implies x=2 \text{ ou } x=1$$

**Commentaire** : bon, nous exagérons un peu, mais à peine (si, si, on a réellement déjà vu ce genre de "présentation" !). On ne sait pas par quel bout le corriger : pas de lien logique d'une ligne à l'autre, confusion entre expression algébrique et phrase (lignes 2 et première partie de la ligne 3), ligne 3 particulièrement désinvolte (une implication doit séparer deux phrases, et non une expression algébrique et une phrase).

• **Développement maladroit**

$$x^2-4-3x+6=(x-2)(x+2)-3(x-2)$$

$$x^2-4-3x+6=(x-2)(x+2-3)$$

$$x^2-4-3x+6=(x-2)(x-1)$$

$$x=2 \text{ ou } x=1$$

Quelles sont les maladresses ?

1. le fait de ne pas renommer l'expression algébrique

   $$x^2-4-3x+6 \quad \text{par } A \quad \text{(par exemple)}$$

   nous oblige à répéter cette expression à chaque ligne de calcul : dans certains cas, cela peut être très long, et très énervant !
2. comme il s'agit de la transformation de la même expression algébrique, il est judicieux de prolonger le calcul sur la même ligne : une plus grande compacité de votre démonstration en facilite une appréhension rapide, et cette vue synthétique permet une lecture plus facile (beaucoup d'étudiants sont rapidement noyés dans des pages d'écriture, finissant par tout mélanger et ne plus savoir où ils en sont).
3. il manque des liaisons quand on passe d'une ligne à l'autre (certains correcteurs sanctionnent sévèrement cette absence).
4. l'équation (qui est tout de même le problème posé) a disparu du paysage : la solution, en dernière ligne, semble donc parachutée.
5. point positif : chaque ligne comporte une ou plusieurs phrases, et non plus de simples expressions algébriques comme dans la rédaction précédente.

• **Développement possiblement correct**

Posons $A = x^2 - 4 - 3x + 6$ (on donne un "nom" à l'expression algébrique pour ne pas être obligé de la répéter systématiquement.

L'équation proposée équivaut à :

$$A = (x-2)(x+2)-3(x-2) = (x-2)(x+2-3) = (x-2)(x-1) = 0$$

Donc

$$A = 0 \iff (x = 1 \text{ ou } x = 2)$$

Finalement :

$$\boxed{S = \{1, 2\}}$$

**Notez par ailleurs qu'on ne passe pas d'une ligne ou d'une phrase à une autre sans transition (donc, finalement, équivalence)**.

# 2.2 Éléments de logique

Dans la suite de ce cours ; l'expression "si, et seulement si" sera souvent notée "ssi".

## 2.2.1 Propositions

Une **proposition** est un énoncé dont on peut dire, sans ambiguïté, qu'il est soit vrai (V), soit faux (F).

Les propositions sont notées P,Q,R etc. (parfois en lettres minuscules).

**Exemples** :

1. P : $2 < 3$ est une proposition vraie
2. Q : $2 \leq 3$ est une proposition vraie (puisque l'un de ses termes, l'inégalité, est vrai)
3. R : $2 \geq 3$ est une proposition fausse
4. S : $1 + 1 = 3$ est une proposition fausse
5. T : $x$ est un entier naturel **n'est pas une proposition** (puisque, ne connaissant pas $x$, on ne peut assurer que cet énoncé est vrai ou faux)
6. S : [ $(1 + 1 = 3)$ ou $(2 < 3)$ ] est une proposition vraie (puisque l'un de ses termes, le deuxième, est vrai).

### 2.2.2 Connecteurs logiques

• **Négation d'une proposition** : notée (non$P$) ou $\neg p$. Par définition, $\neg p$ est vraie si $p$ est fausse et fausse si $p$ est vraie.

**Remarque** : non(non P)=P (ou $\neg\neg p = p$)

• **Conjonction et disjonction d'une proposition** :

1. **Conjonction de** $p$ **et** $q$ : c'est la proposition notée $p \wedge q$ $((p\, et\, q))$, vraie si et seulement si $p$ **et** $q$ sont vraies
2. **Disjonction de** $p$ **et** $q$ : c'est la proposition notée $p \vee q$, $((p\, ou\, q))$, vraie si et seulement si $p$ **ou** $q$ est vraie[5].

• **Implication et équivalence** :

1. **Implication** : c'est la proposition notée $p \Longrightarrow q$, vraie si et seulement si $(\neg p \vee q)$ est vraie.
2. **Équivalence** c'est la proposition notée $p \Longleftrightarrow q$, vraie si et seulement si $p \Longrightarrow q$ **et** $q \Longrightarrow p$ le sont également.

• **Implication et "donc".**

Beaucoup d'étudiants confondent $\Longrightarrow$ et la conjonction de coordination "donc". La distinction est pourtant à bien connaître :

1. l'écriture $P \Longrightarrow Q$ a un sens : ou bien P est fausse (et on ne sait alors rien de Q), ou bien P est vraie et alors Q est nécessairement vraie (mais on peut ignorer *a priori* si P est vraie ou fausse, ainsi que Q).
2. (P est vraie), donc (Q est vraie) a un sens. Si P est vraie et si P $\Longrightarrow$ Q, alors Q est vraie. Mais P donc Q ne veut rien dire !
3. Enfin, "donc" a un caractère éventuellement récapitulatif : ainsi, cette conjonction peut séparer un développement (de plusieurs lignes) d'une conclusion, ce qui n'est pas le cas de l'implication. Prenons pour exemple le syllogisme bien connu :

   Tous les hommes sont mortels.

   Socrate est un homme

   donc, Socrate est mortel

   La conjonction "donc" s'appuie sur les deux prémisses précédentes, et présente de ce fait un caractère récapitulatif.

5. éventuellement les deux.

En revanche, l'écriture

Tous les hommes sont mortels.

Socrate est un homme

$\Longrightarrow$ Socrate est mortel

est incorrecte car l'implication relie la conclusion à la proposition *précédente* (Socrate est un homme) qui ne permet pas à elle seule de conclure (dans un syllogisme, tout doit être explicite, et on n'est pas supposé sous-entendre que tous les hommes sont mortels !).

### 2.2.3 Quantificateurs

• **Quantificateur existentiel** : on le note $\exists$ et il signifie "il existe" (au moins).

Deux exemples : $\exists x \in \mathbb{R}, x+1=0$ et $\exists x \in \mathbb{R}, x-2<0$.

Dans le premier cas, $x$ est unique [6], alors que dans le deuxième, il existe une infinité de valeurs de $x$ solutions de l'inéquation : donc, **le symbole $\exists$ ne suppose pas l'unicité de** $x$.

Remarque : on trouve parfois les symboles $\exists x!$ (il existe x **unique**) et $\exists x?$ (existe-t-il $x$ ?), pratiques, mais non universellement reconnus [7].

• **Quantificateur universel** : on le note $\forall$ et il signifie "quel que soit" ou "pour tout".

Exemple : $(\forall x \in \mathbb{R}),\left[(x+1)^2 = x^2+2x+1\right]$

### 2.2.4 Négations

Nous donnons ci-dessus quelques exemples classiques (et donc utiles) de négations de propositions : ces équivalences vous seront démontrées aisément par des tables de vérité que nous ne traitons pas ici.

1.
$$[\,\mathrm{non}(P \Longrightarrow Q)\,] \Longleftrightarrow \Big[\mathrm{non}[\,(\mathrm{non}P)\,\mathrm{ou}\,Q]\Big] \Longleftrightarrow [\,P \ \text{ et } \ (\mathrm{non}Q)\,]$$

2.
$$\mathrm{non}[\,(\exists x),(P \Longrightarrow Q)\,] \Longleftrightarrow [\forall x),[\,P \text{ et } (\mathrm{non}Q)\,]$$

**Remarque** : OU et ET sont interchangeables par négation.

6. nous laissons au lecteur la tâche ardue de résoudre cette difficile équation
7. en ce qui nous concerne, nous n'hésiterons pas à les utiliser.

# 2.3 Ensembles

## 2.3.1 Définition

Nous en donnons une définition classique, simple (voire naïve), mais très pratique et largement suffisante pour le contenu de ce cours.

Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**[8]. Les ensembles sont notés par des lettres majuscules et leurs éléments par des lettres minuscules.

L'écriture $x \in E$ signifie que $x$ est élément de $E$. À l'inverse, $x \notin E$ signifie que $x$ n'est pas élément de E.

**Remarque**

On peut définir un ensemble :

1. en listant ses éléments (si c'est possible) : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $F = \{\text{pile, face}\}$
2. en les définissant par une propriété : $E = \{\text{entiers naturels pairs}\}$, $F = \{(x \in \mathbb{Q}), (x^2 < 2)\}$
3. en les désignant par leur nom (quand ils sont "célèbres") : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$,

## 2.3.2 Ensemble vide

C'est l'ensemble ne contenant aucun élément : il est noté $\emptyset$.

## 2.3.3 Sous-ensemble

On dit que A est un sous-ensemble (ou une partie) de l'ensemble E si tout élément de A est élément de E. On écrira[9] :

$$A \subset E \quad \Longleftrightarrow (\forall x \in A), (x \in E)$$

**Attention** : ne pas confondre les écritures $x \in E$ ($x$ est **élément** de E) et $A \subset E$ ($A$ est un sous-ensemble de E).

L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

8. nous n'entrerons pas dans les contradictions subtiles que cette définition implique.

9. on peut définir aussi l'inclusion large $A \subseteq E$ qui signifie que A est inclus ou égal à E. Dans la suite de ce cours, et par souci de simplification, le symbole "$\subset$" signifiera que A est inclus dans E, mais peut lui être égal.

### 2.3.4 Réunion

C'est l'ensemble noté $A \cup B$ des éléments qui appartiennent à A **ou** à B.

Donc :

$$(x \in A \cup B) \iff (x \in A) \text{ ou } (x \in B)$$

Exemple : $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

### 2.3.5 Intersection

C'est l'ensemble noté $A \cap B$ des éléments qui appartiennent à la fois à A **et** à B.

Donc :

$$(x \in A \cap B) \iff (x \in A) \text{ et } (x \in B)$$

Exemple : $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\} = \{2\}$.

### 2.3.6 Complémentaire

Soit E un ensemble et A un de ses sous-ensembles. Le complémentaire de A dans E, noté $C_E(A)$ (que l'on notera C(A) ou $\bar{A}$ pour alléger l'écriture) est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Donc :

$$C_E(A) = \{(x \in E), (x \notin A)$$

### 2.3.7 Propriétés

Soit A,B,C,... des parties d'un ensemble E. Nous admettrons les résultats suivants, dont la démonstration est longue mais ne présente pas de difficulté.

1. $A \cap C(A) = \emptyset$ et $A \cup C(A) = E$
2. $A \cup A = A \cap A =$ A $\quad A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
3. **Commutativité de** $\cup$ : $A \cup B = B \cup A$
4. **Commutativité de** $\cap$ : $A \cap B = B \cap A$
5. **Associativité de** $\cup$ : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
6. **Associativité de** $\cap$ : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
7. **Distributivité de** $\cup$ **pour** $\cap$ : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. **Distributivité de** $\cap$ **pour** $\cup$ : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

### 2.3.8 Produit cartésien

Soit E et F deux ensembles. Le produit cartésien de ces deux ensembles est l'ensemble :

$$E \times F = \{(x, y), \quad x \in E \quad \text{et} \quad y \in F\}$$

C'est donc un ensemble de couples.

Remarques :

1. le produit cartésien n'est pas commutatif : E $\times$ F$\neq$ F $\times$ E
2. E et F ne sont pas, *a priori*, des parties d'un plus grand ensemble : ils peuvent même être de natures très différentes.

## 2.4 Alors, ces démonstrations !

### 2.4.1 Le désarroi de l'étudiant

Les étudiants restent parfois paralysés par certaines questions : “je ne sais pas par où commencer”, et il se découragent, partant du principe qu'il n'auront jamais l'idée “géniale” leur permettant de débloquer la situation.

On va donc essayer de démythifier tout cela. En réalité, il faut savoir que :

1. il s'agit presque toujours d'un manque de méthode. L'éventail des démarrages étant très large, nous nous efforcerons de débroussailler la situation.
2. s'il est parfois nécessaire de savoir “naviguer” dans des calculs savants qui vous effraient et vous semblent hors de votre portée intellectuelle, sachez que même vos professeurs ont dû, eux aussi, “en baver” un peu et s'entraîner longuement avant d'acquérir cette aisance que vous leur enviez tant.

   **Comprendre, c'est aussi et d'abord s'habituer** : il faut donc pratiquer et encore pratiquer avant que ce qui vous semblait compliqué ne vous devienne familier (et cela demande du temps et donc de la patience).

### 2.4.2 Les grandes méthodes

Plusieurs types de problèmes :

1. **Analyse et synthèse : problèmes d'existence**.

   Il s'agit de rechercher des inconnues satisfaisant une propriété : c'est le cas notamment des équations [10].

   La méthode est la suivante.

   **Si** vous êtes confrontés à un problème du type :

   1) existe-t-il $x$ tel que....(une propriété soit vérifiée) ?

   2) résoudre une (in)équation, ce qu'il faut lire : trouver $x$ (s'il existe) tel que...(suit une égalité ou une inégalité algébrique)

   **Alors** vous avez choisi la bonne méthode. La résolution se fait en deux temps :

   • **Analyse** : on impose la propriété requise, c'est-à-dire que l'on part de "tel que" et on procède par **implications**, sans se préoccuper des hypothèses ni d'éventuelles contraintes. Cette méthode permet de n'oublier aucune solution candidate ("unicité"), mais risque d'introduire des solutions étrangères.

   • **Synthèse** : on teste chaque solution trouvée pour s'assurer qu'elle satisfait aux différentes hypothèses. Lorsque ce n'est pas le cas, elle est exclue de la liste trouvée dans l'analyse (existence)

   Illustrons cette méthode par deux exemples très simples

   (a) *résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $n^2 - 1 = 0$*

   • **Analyse**. *Il faut lire l'équation de la façon suivante : existe-t-il un entier naturel $n$ tel que $n^2 - 1 = 0$. On part de "tel que", c'est-à-dire qu'on "part de la fin". La résolution est élémentaire :*

   $$n^2-1 = 0 \implies (n-1)(n+1) = 0 \implies n = 1 \text{ ou } n = -1$$

   • **Synthèse** *: on teste chaque solution trouvée qui doit donc satisfaire les différentes hypothèses. Seule la solution $n = 1$ est un entier naturel. On élimine donc la "solution étrangère" $n = -1$. Donc, $S = \{1\}$.*

10. mais pas que !

(b) *Exemple plus élaboré, mais classique : démontrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est somme d'une application paire et d'une application impaire.*

*Il s'agit d'un problème de recherche d'inconnues (une fonction paire $p$ et une fonction impaire $i$). On part donc de la propriété recherchée* **que l'on impose**.

- **Analyse**. *Si $p$ et $i$ existent, alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = p(x) + i(x)$$

*On en déduit, par parité*

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$

*On en tire*

$$f(x) + f(-x) = 2p(x) \quad \textit{et} \quad f(x) - f(-x) = 2i(x)$$

*d'où : $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$p(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \textit{et} \quad i(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

*L'analyse assure donc* **l'unicité**. *Il reste à vérifier que la solution trouvée ($p$ et $i$) convient.*

- **Synthèse**. *Elle est immédiate*

$$p(x)+i(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] = f(x)$$

*La synthèse assure donc* **l'existence**.

2. **Raisonnement par récurrence** : adapté à la démonstration de propriétés $P(n)$ dépendant d'un entier $n$. Nous en verrons de nombreux exemples dans la suite de ce cours.

3. **Raisonnement par l'absurde**. Soit à démontrer une propriété $P$ : on suppose le contraire, c'est-à-dire (*non* $P$), et l'on aboutit à une contradiction interne, c'est-à-dire à un résultat absurde. (*non* $P$) est donc fausse, ce qui valide $P$ *a posteriori* (car $P$ ou (*non* $P$) est vraie !). Deux exemples classiques :

   - *Démontrer la propriété suivante $P$ : $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Cette démonstration constitue l'exercice 4 du chapitre 3.*

- *Soit $x$ un nombre réel. Alors :*

$$[\forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon] \implies x = 0$$

*Supposons donc le contraire, c'est-à-dire $x \neq 0$ tout en admettant l'hypothèse entre crochets. Comme $\epsilon$ peut être choisi quelconque, prenons $\epsilon = \frac{|x|}{2}$. On aboutit à :*

$$|x| \leq \frac{|x|}{2} \quad \textit{soit} \quad \frac{|x|}{2} \leq 0$$

*Si $x \neq 0$, on obtient $\frac{|x|}{2} < 0$ ce qui est absurde (contradiction avec la théorie car une valeur absolue est toujours positive ou nulle) : donc $x = 0$. CQFD.*

- ce deuxième exemple que nous venons de traiter s'inscrit dans le schéma général suivant :

  Soit à démontrer $P \implies Q$ par l'absurde : on démontre que la proposition ($P$ et ($non\, Q$)) aboutit à un résultat absurde (ici, $P$ était la proposition $[\forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon]$ et $Q$ la proposition $x = 0$).

  On peut être choqué par l'intervention d'une proposition $Q$ qui n'apparaît pas dans la définition du raisonnement par l'absurde qui ne fait intervenir qu'une proposition $P$. En fait, la proposition ($P \implies Q$) est équivalente à ( non $P$ ou $Q$) qu'on peut renommer $P'$ : de ce fait, (non $P'$) équivaut à ($P$ et non $Q$) et on retrouve le point de vue du paragraphe précédent.

4. **Raisonnement par contraposition**. Cette méthode est souvent confondue avec le raisonnement par l'absurde (mais contrairement au raisonnement par l'absurde, elle **doit** faire intervenir une implication).

   Lorsque l'on veut démontrer $P \implies Q$, on peut le faire directement (c'est le raisonnement direct, qui peut être employé lorsque ce raisonnement est plutôt immédiat, notamment lorsque la proposition $P$ permet "d'avancer"). Mais dans certains cas, le fait d'exprimer $P$ est peu productif et l'on remplace alors la démonstration

   $P \implies Q$ par l'implication équivalente $(non\, Q) \implies (non\, P)$

   Cette méthode est illustrée, par exemple, par l'exercice 1 du chapitre 3.

5. **Démonstration par disjonction des cas**. Cette situation se présente dans le cas d'une propriété dépendant d'un paramètre ($x$, $n$ etc.) variant dans un certain ensemble A. Si l'on peut écrire
$$A = A_1 \cup A_2 ... \cup A_n$$
où les parties $A_i$ sont 2 à 2 disjointes, on pourra démontrer la propriété en étudiant séparément les cas où le paramètre est dans $A_i$.

• équations ou inéquations faisant intervenir des valeurs absolues. Exemple :
$$|x-4| = 2x+1$$
Comme l'expression de la valeur absolue dépend du signe de $(x-4)$, on envisage naturellement deux cas

(a) $x \geq 4$ : **analyse** : l'équation devient $x-4 = 2x+1$ ce qui donne $x=-5$. **synthèse** : cette solution est rejetée car inférieure à 4 (solution étrangère)

(b) $x < 4$ : **analyse** : l'équation devient $4-x = 2x+1$ ce qui donne $x=1$. **synthèse** : cette solution est acceptée car inférieure à 4

Finalement :
$$\boxed{S = \{1\}}$$

• propriétés arithmétiques. Montrer que A=n(n+5)(n-5) est divisible par 3

Comme on s'intéresse à la division par 3, on va envisager tous les cas de figure de la division d'un entier par 3 (congruences). On a donc 3 cas :

(a) $n = 3k$ : alors $A = 3k(3k+5)(3k-5)$

(b) $n = 3k+1$ : alors $A = (3k+1)(3k+6)(3k-4) = 3(3k+1)(k+2)(3k-4)$

(c) $n = 3k+2$ : alors $A = (3k+2)(3k+7)(3k-3) = 3(3k+2)(3k+7)(k-1)$

Dans tous les cas, on voit que A est un multiple de 3, d'où le résultat.

**Remarques**

(a) pour la divisibilité par 2, on aurait envisagé $n = 2k$ et $n = 2k+1$

(b) pour la divisibilité par 5, on aurait envisagé $n = 5k$, $n = 5k + 1$, $n = 5k + 2$, $n = 5k + 3$, $n = 5k + 4$

(c) etc.

(d) cet exercice aurait pu être traité par récurrence (propriété dépendant de $n$).

### 2.4.3 Choisir la bonne méthode

Venons-en au fait !

**Fondamentalement, la démonstration d'un résultat (théorème, par exemple) présente la forme générale**

$$(H) \quad \Longrightarrow \quad (C)$$

**où (H) représente une (ou plusieurs) hypothèse(s), et (C) la conclusion supposée en découler.**

La belle affaire ! Cela, vous le saviez depuis longtemps, et vous n'avez pas attendu cet ouvrage pour le découvrir.

Et c'est à ce stade que les ennuis commencent !

La plupart des étudiants s'appuient sur l'hypothèse pour effectuer des calculs ou des raisonnements et espèrent arriver à (C), ce qui, soyons tout de même honnêtes, semble être la méthode la plus naturelle.

Cela marche parfois et la technique n'est donc pas à rejeter *a priori* (mais il faut dans ce cas que l'hypothèse soit assez riche pour pouvoir orienter la démonstration et nous en verrons des exemples illustratifs).

Seulement voilà, le seul fait d'écrire (ou de traduire) l'hypothèse est souvent insuffisant pour progresser, et on risque fort de stationner...à l'hypothèse.

Donnons quelques exemples :

1. soit à démontrer que, si $x > 0$ (H), alors une certaine conclusion (C) est vérifiée : eh bien il est à craindre que le seul fait de *démarrer* avec l'hypothèse $x > 0$ ne fasse guère avancer les choses (hypothèse trop pauvre, ou trop ouverte, bien que l'on puisse soupçonner que cela interviendra dans $\sqrt{x}$). Nous verrons ci-dessous comment modifier notre approche.
2. si l'hypothèse est $x \neq 1$, on peut se sentir tout aussi bloqué. Mais cette fois-ci, on a un indice qui servira plus loin dans la démonstration : en reformulant l'hypothèse en $x - 1 \neq 0$,

on voit qu'il est prévisible que l'on sera amenés à diviser par $x-1$, (possible puisque ce facteur n'est pas nul). Le brouillard se dissipe !

C'est mieux, mais ce n'est pas encore décisif.

Comment procéder alors pour ne pas stagner dans un "blabla" de généralités inexploitables. Nous allons procéder en deux temps

1. Donner les principaux trucs et astuces pour construire un **plan** de démonstration.
2. Pour chacun de ces plans, donner les principales **méthodes** de démonstration.

Bien entendu, nous illustrerons chacun de ces points par des exemples concrets afin de ne pas nous en tenir à des considérations théoriques.

Un des principes fondamentaux est le suivant :

### 2.4.4 Partir de la conclusion (le plus souvent)

Avouez que c'est bizarre : *le point de départ serait la conclusion à laquelle on veut arriver.* Pas très rigoureux ! Cela mérite une explication, et à cet effet, nous prendrons quelques exemples fréquents :

1. **la conclusion est en forme d'égalité (ou d'inégalité) algébrique ou arithmétique** : $A = B$ (ou $A \leq B$). Quand $A$ et $B$ ne sont pas trop longs,[11] il est bon de transformer cette conclusion en $A - B = 0$, ou $A - B \leq 0$ (ce que nous appellerons la "**méthode de la différence**" : c'est pompeux, mais pratique pour s'y référer).
   - Partir de la conclusion ne consiste pas à démarrer, par exemple, de $A-B=0$ et à transformer cette égalité jusqu'à aboutir à ...0=0, ce qui est un peu lourdaud, et surtout ce qui contraint l'étudiant à procéder par équivalences.[12]
   - On démarre en fait de l'expression $A - B$ (insistons : on n'affirme pas la véracité de la conclusion, c'est-à-dire $A - B = 0$, ce qui serait ridicule), et l'on s'efforce d'aboutir à 0 (**c'est cela, la conclusion** !). Très vite, on risque d'être bloqués en cours de calcul : *l'hypothèse interviendra* **à cet endroit, et non pas au début**, *pour débloquer la situation.*

11. nous verrons les variantes, surtout dans les démonstrations par récurrence.
12. c'est compliqué et en général mal respecté.

## Exemple

**Soit à démontrer**

$$\forall x \geq 0, \qquad \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} \qquad (A \leq B)$$

*Partir de l'hypothèse $x \geq 0$ ne fait guère avancer les choses ! Nous allons donc "partir de la conclusion" en la transformant préalablement par la "méthode de la différence". L'inégalité proposée (conclusion) équivaut à :*

$$\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2}) \leq 0 \qquad A - B \leq 0$$

*et on va tâcher de montrer que le premier membre de cette inégalité est effectivement négatif ou nul (sous réserve de l'hypothèse qui s'imposera tôt ou tard*[13] *: elle assure déjà que $\sqrt{1+x}$ existe). Classiquement (quantité conjuguée) :*

$$A - B = \sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2}) = \frac{(1+x) - (1 + \frac{x}{2})^2}{\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})}$$

*(Insistons, nous n'affirmons pas la conclusion, mais nous allons démontrer que $A - B \leq 0$* **ce qui sera la conclusion***)*
*D'où il vient :*

$$A - B = \frac{(1+x) - (1 + x + \frac{x^2}{4})}{\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})} = \frac{-\frac{x^2}{4}}{\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})}$$

*Le numérateur est évidemment négatif ou nul. Quant au dénominateur, il est clairement strictement positif puisque*

$$x \geq 0 \implies 1 + \frac{x}{2} \geq 1$$

*(et bien sûr, la racine carrée est positive ou nulle, comme toute racine carrée qui se respecte).*

**Remarque** *On voit que l'hypothèse finit toujours par s'imposer et qu'il n' y a vraiment pas lieu de vouloir l'introduire coûte que coûte avant son heure.*

13. quand on sera bloqué

2. **la conclusion est en forme d'implication** $P \implies Q$ (éventuellement après transformation)
Démontrer l'implication $P \implies Q$ sous réserve de l'hypothèse (H) qui, comme nous l'avons signalé, ne permet pas toujours d'avancer lorsque l'on s'obstine à vouloir la faire intervenir dès le début.
   - nous verrons au chapitre 4 de cet ouvrage (exercice 2) le problème suivant : démontrez

$$[\,(H)\ :\quad g_o f \text{ injective}\,] \implies [\,(C)\ :\quad f \text{ injective}\,]$$

   Nous n'allons pas démontrer cette implication (puisque c'est fait en exercice !), mais montrer comment cette démonstration s'inscrit dans notre modèle.
   (a) signalons tout de suite que vouloir à tout prix démarrer de l'hypothèse (H) ne permet pas d'avancer. Nous la laissons donc de côté jusqu'à ce que son intervention s'impose d'elle-même en cours de démonstration.
   (b) regardons la conclusion : elle peut s'exprimer de la façon suivante (définition de l'injectivité, voir dernier chapitre)

$$(\forall x, x' \in E_f)\,[14], (x \neq x') \implies [f(x) \neq f(x')]$$

   et donc présente elle-même l'aspect $(H') \implies (C')$ (où (H') s'écrit $x \neq x'$)
   En fait, il est plus performant de remplacer l'implication précédente par l'implication équivalente (**démonstration par contraposition**) :

$$[\,(non\, C')\ :\quad f(x) = f(x')\,] \implies [\,(non\, H')\ :\quad x = x'\,]$$

   On part donc de (non C') (que l'on peut renommer (H")) ce qui permet de démarrer des calculs : l'hypothèse (H) interviendra quand ces mêmes calculs seront bloqués, ce qui permettra d'aboutir à (non H') que l'on peut renommer (C"). Nous arrêtons là la démonstration, mais rassurez-vous, le suspense sera levé dans l'exercice auquel nous avons fait allusion.[15]
   - Les implications du type

$$[\,(H)\ :\quad P(n) \text{ vraie}\,] \implies [\,(C)\ :\quad P(n+1) \text{ vraie}\,]$$

   que l'on rencontre en **récurrence** pour établir **l'hérédité**.[16]

14. $E_f$ est l'ensemble de définition de $f$.
15. et que rien, d'ailleurs, ne vous empêche d'aller traiter tout de suite.
16. vu en terminale, mais nous y reviendrons plus loin au chapitre 3.

**Exemple 1**

**Démontrer l'inégalité** :

$$\forall x \geq -1, \quad (1+x)^n \geq 1+nx \qquad\qquad P(n)$$

*Démontrons cette inégalité, due à Bernoulli,*[17] *par récurrence simple*[18].

**Initialisation** *:*

*l'inégalité est trivialement vraie pour n=0. En effet :*

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x = 1$$

*Donc* $P(0)$ *est vraie.*

**Hérédité** *:*

*démontrons* $(\forall x \geq -1), \quad (\forall n \geq 0),$

$$\Big[(1+x)^n \geq 1+nx\Big] \Longrightarrow \Big[(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x\Big]$$

*qui se présente sous la forme* $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$
*(comprendre* $P(n)$ *vraie* $\Longrightarrow$ $P(n+1)$ *vraie)*[19]
$P(n+1)$ *s'écrit sous forme d'inégalité. Conformément à la méthode générale de démonstration ci-dessus exposée, on va donc partir de la différence* $D$ *(des termes de* $P(n+1)$*) et démontrer que* $D \geq 0$, **la proposition** $P(n)$ **servant d'hypothèse, dite de récurrence**.

$$D = \Big[(1+x)^{n+1}\Big] - \Big[1+(n+1)x\Big]$$

*soit*

$$D = \Big[(1+x)^n(1+x)\Big] - \Big[1+(n+1)x\Big]$$

*En exploitant la véracité de* $P(n)$ *dans l'avant-dernier "crochet", on a :*

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

17. qui est Suisse et non Italien, comme son nom ne l'indique pas. On trouve d'ailleurs plusieurs Bernoulli dans divers domaines des mathématiques et de la physique : quelle famille !
18. vue en terminale.
19. abus d'écriture.

*puisque $x + 1 \geq 0$ par hypothèse. On obtient donc :*

$$D \geq \Big[(1+nx)(1+x)\Big] - \Big[1+(n+1)x\Big] = nx^2 \geq 0. \quad CQFD$$

**Exemple 2**

Démontrer le résultat suivant :

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

**Solution** :
*Démonstration par récurrence Notons P(n) la propriété à démontrer.*
**Initialisation** *: pour $n = 1$, on a $2n - 1 = 1$ et $n^2 = 1^2 = 1$ et comme...$1 = 1$, P(1) est vraie.*
**Hérédité** *: il s'agit de démontrer que*

$$\forall n \geq 1, (HR) \qquad P(n)\, vraie \implies (C) \qquad P(n+1)\, vraie$$

*c'est-à-dire, $\forall n \geq 1$,*

$$1{+}3{+}5{+}...{+}(2n{-}1) = n^2 \implies 1{+}3{+}5{+}...{+}(2n{+}1) = (n{+}1)^2$$

*Nous procédons comme indiqué dans la méthodologie (bien que l'on puisse faire autrement !). La conclusion (C) se présente comme une égalité : on part donc* **du premier terme de cette égalité** *dans lequel on injectera, au moment opportun, l'hypothèse de récurrence (HR).*

$$[1+3+5+...+(2n-1)]+(2n+1) = n^2+(2n+1) = (n+1)^2$$

*où l'exploitation de (HR) a consisté à remplacer $[1+3+5+ ... + (2n-1)]$ par $n^2$. On a donc abouti au deuxième terme de la conclusion : CQFD.*

**L'étudiant qui lit ces lignes ne doit pas s'imaginer qu'il s'agit de baguettes magiques permettant de résoudre *tous* les problèmes : ce serait trop beau (mais aussi très ennuyeux !). Mais ces "petits trucs" constituent quelques outils bien utiles comme chacun pourra s'en rendre compte.**

## 2.5 Exercices corrigés

### Exercice 1

Soit a et b deux entiers relatifs (éléments de $\mathbb{Z}$). Démontrer l'implication suivante

$$a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0$$

**Preuve par l'absurde :**

*Supposons (H) et (nonC) : l'objectif est d'aboutir à un résultat contradictoire (absurde). On suppose donc :*

$$a + b\sqrt{2} = 0 \quad et \quad a \ ou \ b \neq 0$$

*Comme :*

$$b\sqrt{2} = -a$$

*Si* $b = 0$*, alors a=0 ce qui est contraire à (non C). Donc* $b \neq 0$ *et donc :*

$$\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

*en contradiction avec le fait que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

CQFD.

### Exercice 2

Soit $G = \{g = a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\ \}$. Démontrer que pour un réel $g$ de $G$, le couple $(a, b)$ est unique.

**Preuve**

*Supposons en effet :*

$$g = a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$$

*Alors :*

$$(a - a') + (b - b')\sqrt{2} = 0$$

*soit* $(a - a') = 0$ *et* $(b - b') = 0$ *d'après l'exercice 1 : d'où* $a = a'$ *et* $b = b'$*, ce qui prouve l'unicité du couple* $(a, b)$*.*

### Exercice 3

Soit

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Démontrer que C n'est pas le produit cartésien de deux sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}$

**Preuve par l'absurde**

*Supposons que $C = E \times F$ :*

1. *le couple (1,0) appartient à C (puisque $1^2 + 0^2 = 1$). Donc, 1 appartient à E*
2. *le couple (0,1) appartient à C (puisque $0^2 + 1^2 = 1$). Donc, 1 appartient à F*

*Par conséquent, le couple (1,1) est élément de $E \times F$, mais pas de C puisque $1^2 + 1^2 = 2 \neq 1$. D'où la contradiction.*

### Exercice 4

Donner la négation des assertions suivantes

1. tous les étudiants de cet amphithéatre parlent le serbo-croate
2. Il existe des Suédoises qui ne sont pas blondes
3. $$(\forall \epsilon > 0), (\exists \eta > 0), \quad [|x - a| \leq 0 \implies |f(x) - l| \leq 0]$$

**Solution**

1. *Il existe un étudiant de cet amphithéatre ne parlant pas le serbo-croate.*
2. *Toutes les Suédoises sont blondes*
3. (a) *remplacer $\forall$ par $\exists$*
   (b) *remplacer $\exists$ par $\forall$*
   (c) *remplacer $P \implies Q$ (équivalent à (nonP ou Q)) par (P et nonQ)*

   *On obtient ainsi la négation de l'assertion :*

   $$(\exists \epsilon > 0), (\forall \eta > 0), \quad [|x - a| \leq 0 \text{ et } |f(x) - l| > 0]$$

# Chapitre 3

# Ensembles de nombres

## 3.1 Ensembles de nombres

La construction des nombres n'est pas au programme de PCSI ni de MPSI : nous n'allons donc pas faire de zèle. Il n'en reste pas moins qu'il est bon que les étudiants en connaissent certains éléments de base afin se se sentir sûrs d'eux dans les problèmes qui leur seront posés. Nous survolons donc ces constructions (comme cela l'a peut être été en terminale).

### 3.1.1 Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

Nous supposerons acquises les règles de calcul arithmétique concernant les entiers (et plus loin, les nombres réels en général).

L'axiomatique de $\mathbb{N}$ n'est pas au programme, et c'est bien dommage !

Nous allons toutefois passer outre et évoquer (sans les décrire) deux systèmes d'axiomes équivalents (conduisant au même ensemble noté $\mathbb{N}$) : il s'agit

1. l'axiomatique de Péano
2. l'axiomatique ordinale

Il ne s'agit pas là d'obstination déraisonnable (c'est pourquoi nous ne listerons pas les axiomes). Mais ces deux systèmes d'axiomes font intervenir deux propriétés largement utilisées en MathSup :

1. la "propriété" de récurrence (I)
2. la propriété suivante (II) : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Selon l'axiomatique qui a été choisie, une des deux propriétés est érigée en axiome et l'autre se démontre (c'est donc un théorème) : c'est la démonstration de ces théorèmes qui nous semble instructive pour le futur étudiant et justifie que nous en parlions.

- La propriété de récurrence (propriété I) est un des axiomes de Péano (on parlera alors d'axiome ou de principe de récurrence puisque cette propriété n'est pas démontrée mais admise) : dans ce "système", la propriété II est un théorème que nous allons démontrer.
- La propriété II est un axiome de l'axiomatique ordinale : dans ce système, la propriété de récurrence est un théorème que nous démontrerons.

Dans les deux cas, nous demandons au lecteur de bien comprendre chaque démonstration.

### Propriété I $\implies$ Propriété II

Il s'agit de démontrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, en s'appuyant sur l'axiome de récurrence.

Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

**Proposition**

Toute partie A non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

**Preuve**

*La démonstration se fait par récurrence (puisque la propriété de récurrence est admise axiomatiquement) sur $n$, un majorant présumé de l'ensemble A.*

*P(n) s'écrit donc : A majoré par $n$ admet un plus grand élément.*

- *P(0) est vraie : en effet, si A est majorée par 0, et non vide, alors $A = \{0\}$ admet 0 pour plus grand élément.*
- *Supposons que P(n) soit vraie et supposons que A soit une partie de $\mathbb{N}$ majorée par $(n+1)$.*

  *2 cas se présentent :*

  1. $n+1 \in A$ *: alors, n+1 est le plus grand élément de A*
  2. $n+1 \notin A$ *: alors A est majorée par $n$. D'après l'hypothèse de récurrence, A admet un plus grand élément.*

*La propriété $P(n)$ est ainsi démontrée.*

*Démontrons alors le*

**Théorème**

*Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*

**Preuve**

*Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $Mi$ l'ensemble des minorants de $A$ : $Mi$ n'est pas vide car il contient 0 (que 0 soit dans $A$ ou non). De plus, $A$ étant non vide contient un élément $a$ qui est un majorant de $Mi$ (par définition de $Mi$). Donc, $Mi$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée. D'après le lemme, $Mi$ admet un plus grand élément $m$ qui est de plus un minorant de $A$ : démontrons alors qu'il est dans $A$, et donc qu'il s'agit du plus petit élément de $A$.*

*Par l'absurde : supposons $m \notin A$. Alors,*

$$\forall n \in A, n > m \quad \textit{donc} \quad n \geq m+1$$

*$m+1$ est donc un minorant de $A$, ce qui contredit la maximalité de $m$ ($m$ est le plus grand des minorant de $A$) : d'où la contradiction.*

*Finalement, $m \in A$ et en constitue par conséquent le plus petit élément.*

*CQFD.*

### Propriété II $\Longrightarrow$ Propriété I

Il s'agit de démontrer le théorème de récurrence sachant (axiome) que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Nous n'envisageons que la récurrence simple, et commençant à l'indice 0 : il est facile de l'élargir à une récurrence commençant à un indice $n_0$. Par ailleurs, on peut démontrer qu'il y a équivalence entre récurrence simple, récurrence double et récurrence forte (nous ne détaillons pas ces notions qui seront vues en cours d'année).