VOTRE COACHING PERSONNALISÉ

Tle

Spécialité

MATHS

Contenus additionnels en ligne

BONNE NOTE ASSURÉE !

Tugdual Rannou

ellipses

VOTRE COACHING

PERSONNALISÉ

MATHS

Tle spé

Tugdual Rannou

Professeur particulier de mathématiques
(du collège aux classes préparatoires aux grandes écoles)
Auteur de la chaîne YouTube TugMaths

ellipses

Dans la collection

VOTRE COACHING PERSONNALISÉ

Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY
Conception graphique intérieur : Charline PINTO
Mise en pages : Nord Compo

ISBN : 9782340-103955
Dépôt légal : juin 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

D'expérience, je sais qu'il est très fréquent que les élèves ne sachent pas ce qu'on attend d'eux à la lecture d'un énoncé. Mon but est que le lecteur soit capable d'associer chaque énoncé qu'il est susceptible de rencontrer en terminale, à une résolution d'exercice type. La présentation en exercices types vise donc à structurer votre pensée. Ainsi, face à n'importe quel énoncé de niveau terminale spé maths, vous pourrez passer en revue les différentes méthodes à votre disposition (si bien sûr la résolution ne vous apparaît pas de manière évidente).

Voici les différentes rubriques et éléments de cet ouvrage pour vous aider à bien vous préparer :

TOPO MÉTHODO

Des points de méthodologie pour vous aider à mieux comprendre et appliquer les techniques nécessaires. De quoi devenir incollable sur la méthode !

CHRONO-TEST

Des exercices chronométrés pour vous tester sur des points spécifiques.

ENTRAÎNEZ-VOUS !

Des exercices non chronométrés donnés au bac en 2025 vous sont aussi proposés. Eh oui ! Il faut bien vous entraîner à affronter ce qui vous attend bientôt !

CORRIGÉS DES EXERCICES

Parce qu'il en faut !

LA MINUTE CULTURE

Un focus sur une notion incontournable, découverte par un mathématicien de génie. Tout pour enrichir votre culture générale !

TABLE DES MATIÈRES

Une table des matières indispensable, placée au début de l'ouvrage, pour vous repérer facilement. Un plan idéal pour naviguer sans se perdre !

Table des matières

Chapitre 1

RAISONNEMENTS PAR RÉCURRENCE

I. Les différents types de propriétés $P(n)$ à démontrer 12
II. Principe de récurrence 13
III. Exercices types – Raisonnement par récurrence 14

Chapitre 2

VARIATIONS, MAJORATION ET MINORATION DE SUITES

I. Déterminer les variations d'une suite 20
II. Exercices types – Variations de suite 22
III. Montrer qu'une suite est majorée ou/et minorée 24
IV. Exercices types – Majoration et minoration de suite 25

Chapitre 3

LIMITES DE SUITES

I. Suites convergentes & suites divergentes 30
II. Somme, produit et quotient de limites 32
III. Comparaison de limites 35
IV. Suites géométriques, suites monotones 37
V. Exercices types – Limites de suite 37

Chapitre 4

LIMITES DE FONCTIONS

I. Limites en l'infini 48
II. Limite en un réel a 49
III. Composition de limites 51
IV. Comparaison de limites 52
V. Exercices types – Recherche d'asymptote 53
VI. Exercices types – Calcul de limites 54

Chapitre 5

DÉRIVATION, TANGENTES ET CONVEXITÉ

I. Formules de dérivées 64
II. Tangentes et Variations (rappel de 1re) 65
III. Convexité 66
IV. Exercices types – Dérivation, tangentes et convexité 68

Chapitre 6

CONTINUITÉ ET THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

I. Continuité 72
II. Continuité et suites convergentes 74
III. Théorème des valeurs intermédiaires 74
IV. Exercices types – Continuité 75

Chapitre 7

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

I. Fonctions cosinus et sinus 80
II. Résolution d'équations avec cosinus et sinus 82
III. Résolution d'inéquations avec cosinus et sinus 84
IV. Exercices types – Fonctions trigonométriques 85

Chapitre 8

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

I. Définition et formules à connaître 90
II. Variations et limites 91
III. Exercices types – Fonction logarithme népérien 93

Chapitre 9

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Primitives 98
II. Équations différentielles 100
III. Exercices types – Primitives et équations différentielles 101

Chapitre 10

CALCUL INTÉGRAL

I. Intégrale d'une fonction continue et positive 106
II. Intégrale d'une fonction continue 108
III. Calcul d'aire 112
IV. Exercices types – Calcul intégral 114

Chapitre 11

VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

I. Vecteurs de l'espace 126
II. Positions relatives de droites et de plans 127
III. Exercices types – Droites et plans de l'espace 130

Chapitre 12

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES DE DROITES ET ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE PLAN

I. Représentation paramétrique d'une droite 140
II. Équation cartésienne d'un plan 141
III. Exercices types – Représentations paramétriques et équations cartésiennes 141

Chapitre 13

PRODUIT SCALAIRE ET DISTANCES DANS L'ESPACE

I. Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace 148
II. Calculs de distance 150
III. Exercices types – Produit scalaire et distances dans l'espace 151

Chapitre 14

DÉNOMBREMENT

I. Principe additif et principe multiplicatif 162
II. Les permutations et les arrangements 165
III. Les combinaisons 167
IV. Exercices types – Dénombrement 171

Chapitre 15

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET LOI BINOMIALE

I. Exercices types – Probabilités conditionnelles (rappel de 1re) 176
II. Loi binomiale 178
III. Exercices types – Loi Binomiale 179

Chapitre 16

INÉGALITÉS DE CONCENTRATION ET LOI DES GRANDS NOMBRES

I. Sommes de variables aléatoires 186
II. Inégalités de concentration 187
III. Loi des grands nombres 188
IV. Exercices types – Inégalité de concentration et loi des grands nombres 189

Corrigés 198

Rétroplanning

	Semaine	Thème
Septembre 09	Semaine 1	Démontrer par récurrence une propriété avec u_n
	Semaine 2	Démontrer par récurrence une formule avec une somme, ou qu'une expression en puissance de n est un multiple
	Semaine 3	Étudier le sens de variations d'une suite
	Semaine 4	Montrer qu'une suite est majorée ou minorée
Octobre 10	Semaine 5	Déterminer une limite de suite grâce aux opérations sur les limites
	Semaine 6	Déterminer une limite de suite en levant une indétermination
	Semaine 7	Déterminer une limite de suite grâce aux comparaisons et aux encadrements
	Semaine 8	Adapter aux limites de fonctions les notions vues en étudiant les limites de suite
Novembre 11	Semaine 9	Déterminer une limite de fonction quand x tend vers un réel
	Semaine 10	Utiliser la croissance comparée et les changements de variable
	Semaine 11	Chercher des asymptotes horizontales et verticales
	Semaine 12	Apprendre les formules de dérivées
Décembre 12	Semaine 13	Dériver des fonctions composées
	Semaine 14	Appliquer les dérivées pour déterminer des tangentes, des tableaux de variations et la convexité d'une fonction
	Semaine 15	Montrer qu'une fonction est continue
	Semaine 16	Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires
	Semaine 17	Résoudre des équations avec cosinus ou sinus

	Semaine	Thème
Janvier 01	Semaine 18	Résoudre des inéquations avec cosinus ou sinus
	Semaine 19	Étudier des fonctions trigonométriques
	Semaine 20	Maîtriser les propriétés de la fonction logarithme népérien
	Semaine 21	Résoudre des équations et des inéquations avec la fonction logarithme népérien
Février 02	Semaine 22	Résoudre des équations ou des inéquations avec une inconnue en exposant
	Semaine 23	Déterminer une primitive d'une fonction
	Semaine 24	Résoudre une équation différentielle
	Semaine 25	Calculer une intégrale
Mars 03	Semaine 26	Interpréter graphiquement une intégrale (calcul d'aires)
	Semaine 27	Maîtriser l'intégration par parties
	Semaine 28	Étudier la position relative de droites et de plans
	Semaine 29	Exploiter les représentations paramétriques de droite
	Semaine 30	Exploiter les équations cartésiennes de plan
Avril 04	Semaine 31	Utiliser le produit scalaire dans l'espace
	Semaine 32	Calculer des distances dans l'espace
	Semaine 33	Compter le nombre de manières d'effectuer un classement ou une sélection
	Semaine 34	Construire et exploiter un arbre pondéré
Mai 05	Semaine 35	Déterminer et utiliser des probabilités conditionnelles
	Semaine 36	Déterminer des probabilités à l'aide la loi binomiale
	Semaine 37	Exploiter les inégalités de concentration
	Semaine 38	Appliquer la loi des grands nombres

Chapitre 1

RAISONNEMENTS PAR RÉCURRENCE

Votre mission : Démontrer une propriété mathématique $P(n)$ qui dépend d'un entier naturel n.

Ma vidéo sur le raisonnement par récurrence :

I. LES DIFFÉRENTS TYPES DE PROPRIÉTÉS P(N) À DÉMONTRER

La propriété $P(n)$ à démontrer peut se présenter sous 2 formes :

Cas 1 : $P(n)$ a directement la forme d'une égalité ou d'une inégalité

Exemples d'égalités :

- $P(n) : u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$ pour $n \in \mathbb{N}$
- $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- $P(n) : 10^n - 1 = 9k$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemples d'inégalités :

- $P(n) : u_n \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$
- $P(n) : \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
- $P(n) : (1+a)^n > 1 + na$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$

Cas 2 : $P(n)$ est une phrase sans symboles mathématiques

Lorsque $P(n)$ est une phrase sans symboles mathématiques, vous devrez systématiquement la traduire en une inégalité ou une égalité mathématique avant même de commencer votre raisonnement par récurrence.

Par exemple, si on vous demande de démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante, vous devrez comprendre que l'inégalité qu'il vous faut démontrer pour tout entier naturel n est $P(n) : u_n \leq u_{n+1}$.

De même, si on vous demande de démontrer que l'expression $10^n - 1$ est divisible par 9 quel que soit l'entier naturel n, vous devrez en fait démontrer la propriété $P(n) : 10^n - 1 = 9k$ avec k un entier relatif.

II. PRINCIPE DE RÉCURRENCE

On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$

Vous devez montrer, pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: $0 \leq u_n \leq 1$.

Nous savons que $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$, **P(0) est vraie**.

Calculons les premiers termes à la calculatrice :

$u_1 \approx 0{,}667$ donc $0 \leq u_1 \leq 1$, **P(1) est vraie**.

$u_2 = 0{,}75$ donc $0 \leq u_2 \leq 1$, **P(2) est vraie**.

$u_3 = 0{,}8$ donc $0 \leq u_3 \leq 1$, **P(3) est vraie**.

$\vdots$

$u_{10} \approx 0{,}917$ donc $0 \leq u_{10} \leq 1$, **P(10) est vraie**.

Les termes de cette suite semblent tous compris entre 0 et 1. Toutefois, même si nous savons que les 11[1] premiers termes sont compris entre 0 et 1, rien ne nous garantit que le douzième le soit également… Et même si nous poussions le zèle jusqu'à vérifier que les 1 000 premiers termes de la suite sont compris entre 0 et 1, rien ne nous permettrait d'affirmer que **tous** les termes de la suite le sont à coup sûr.

Pour démontrer la propriété $P(n)$: $0 \leq u_n \leq 1$ **pour tout entier naturel *n***, nous allons devoir utiliser un raisonnement par récurrence.

Nous avons vu que **P(0) est vraie**.

Nous allons montrer que si $P(k)$ est vraie pour un certain entier naturel k, alors $P(k+1)$ est nécessairement vraie.

De cette manière, le fait que P(0) soit vraie impliquera que P(1) est vraie, puis le fait que P(1) soit vraie impliquera que P(2) est vraie, puis le fait que P(2) soit vraie impliquera que P(3) est vraie, etc.

La première étape, consistant à montrer que **P(0) est vraie**, s'appelle l'**initialisation**.

La deuxième étape, qui nous amène à montrer que **si P(*k*) est vraie** pour un certain entier naturel k (hypothèse de récurrence), **alors P(*k*+1) est nécessairement vraie**, s'appelle l'**hérédité**.

1. Attention, de u_0 à u_{10}, il y a 11 termes ! (car de u_1 à u_{10}, il y a 10 termes, auxquels on ajoute u_0).

On peut comparer un raisonnement par récurrence à un parcours de dominos. Pour que tous les dominos tombent, il faut que deux conditions soient réunies :

1. un premier domino doit tomber (initialisation).
2. les dominos doivent être suffisamment proches les uns des autres pour que, dès qu'un domino tombe, le suivant tombe aussi (hérédité).

TOPO MÉTHODO 1

INITIALISATION

★ Lors de l'initialisation, le premier entier n_0 pour lequel $P(n_0)$ doit être vérifié n'est pas nécessairement 0.

Si la propriété à démontrer est vraie...	Initialisation
... pour tout entier naturel	P(0)
... pour tout entier naturel non nul	P(1)
... pour tout entier naturel $n \geq 2$	P(2)
... pour tout entier naturel $n \geq 5$	P(5)

III. EXERCICES TYPES – RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Exercice type 1

Reprenons notre exemple précédent.

On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$

★ **Montrer, pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: $0 \leq u_n \leq 1$**

Initialisation

Nous avons vu que P(0) est vraie (l'initialisation est donc déjà effectuée !)

Hérédité

Supposons que pour un certain entier naturel k, $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire que $0 \leq u_k \leq 1$ (hypothèse de récurrence). Montrons qu'alors, $P(k+1)$ est vraie.

Nous devons donc partir de l'hypothèse $0 \leq u_k \leq 1$ et montrer que $0 \leq u_{k+1} \leq 1$.

Nous allons passer de u_k à u_{k+1} par opérations successives.

$0 \leq u_k \leq 1$ on commence par écrire l'hypothèse de récurrence.

$0 \geq -u_k \geq -1$ on multiplie par -1 donc on change le sens des inégalités.

$2 \geq 2 - u_k \geq 1$ ajouter 2 à chacun des termes ne modifie pas l'inégalité.

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2 - u_k} \leq 1$ la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

donc on change le sens des inégalités.

$0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq 1$ puisque $u_{k+1} = \frac{1}{2 - u_k}$ par définition de la suite (u_n).

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion

La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n.

Exercice type 2

On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) = 2u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases}$

★ **Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geq 0$**

Indication

On admet que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

On note $P(n)$ la propriété $u_n \geq 0$

Initialisation

$u_0 = 5 \geq 0$

$P(0)$ est vraie.

Hérédité

Supposons que pour un certain entier naturel k, $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire que $u_k \geq 0$ (hypothèse de récurrence). Montrons qu'alors, $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geq 0$.

Nous allons passer de u_k à u_{k+1} par composition par la fonction croissante f.

$u_k \geq 0$

$f(u_k) \geq f(0)$ car la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

$f(u_k) \geq 0$ car $f(0) = 2 \times 0 - \ln(0^2 + 1) = 0$

$u_{k+1} \geq 0$ car $f(u_k) = u_{k+1}$ par définition de la suite (u_n)

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion

La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.

Exercice type 3

★ **Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$**

On note P(n) la propriété $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Initialisation

Pour $n=1$, $1+2+3+\ldots+n=1$ et $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{1\times 2}{2}=1$

donc **P(1) est vraie.**

Hérédité

Supposons que pour un certain entier naturel k, P(k) soit vraie, c'est-à-dire que

$1+2+3+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ (hypothèse de récurrence).

Montrons qu'alors, P(k+1) est vraie, c'est-à-dire que

$1+2+3+\ldots+k+k+1=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

Nous allons commencer par noter l'hypothèse de récurrence. À l'étape suivante, nous ajouterons le terme de la somme en $k+1$ des deux côtés de l'égalité.

$1+2+3+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

$1+2+3+\ldots+k+k+1=\dfrac{k(k+1)}{2}+k+1$

on ajoute $k+1$ des deux côtés de l'égalité.

À ce stade, nous n'avons plus rien à faire du côté gauche de l'égalité, il s'agit déjà de ce qu'on doit obtenir dans P(k+1). Nous devons maintenant retravailler la partie droite pour obtenir au final $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Nous allons commencer par former une seule et même fraction à l'aide d'une mise au même dénominateur.

$1+2+3+\ldots+k+k+1=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{2(k+1)}{2}$

$1+2+3+\ldots+k+k+1=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$1+2+3+\ldots+k+k+1=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ après factorisation du numérateur par $k+1$

P(k+1) est vraie.

Conclusion

La propriété P(n) est vraie au rang 1 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier naturel n non nul.

Exercice type 4

★ **Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $7^n + 2$ est un multiple de 3.**

On note P(n) la propriété $7^n + 2 = 3k$ avec k un entier relatif.

Initialisation

Pour $n = 1$, $7^n + 2 = 7 + 2 = 9$ et 9 est bien un multiple de 3, donc **P(1) est vraie**

Hérédité

Supposons que pour un certain entier naturel n, P(n) soit vraie, c'est-à-dire que $7^n + 2 = 3k$ avec k entier relatif (hypothèse de récurrence).

Montrons qu'alors, P(n+1) est vraie, c'est-à-dire que $7^{n+1} + 2 = 3k'$ avec k' entier relatif.

$$\begin{aligned} 7^{n+1} + 2 &= 7 \times 7^n + 2 \\ &= 7 \times (3k - 2) + 2 \\ &= 3 \times 7k - 14 + 2 \\ &= 3 \times 7k - 12 \\ &= 3(7k - 4) \end{aligned}$$

Or k est un entier relatif, donc $7k - 4$ est également un entier relatif. $7^{n+1} + 2$ est donc bien un multiple de 3.

P(n+1) est vraie.

Conclusion

La propriété P(n) est vraie au rang 1 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $7^n + 2$ est bien un multiple de 3 pour tout entier naturel n non nul.

TOPO MÉTHODO 2

SAVOIR REPÉRER LE TYPE DE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

★ À chaque fois que vous devez effectuer un raisonnement par récurrence, demandez-vous auquel des 4 types d'exercice il correspond !

	Énoncé	Méthode
1	Proposition avec u_n	Passage de u_n à u_{n+1} par opérations successives
2	Proposition avec u_n et $u_{n+1} = f(u_n)$	Passage de u_n à u_{n+1} en utilisant la croissance de f
3	Formule avec somme	Ajout du terme en $k + 1$ des deux côtés de l'égalité
4	Expression en puissance de n, multiple d'un entier	Si l'hypothèse de récurrence est $7^n + 2 = 3k$, remplacer 7^n par $3k - 2$ pour obtenir $7^{n+1} + 2 = 3k'$

CHRONO-TEST 1

Corrigé p. 198

★ Pour chacun des énoncés suivants, déterminez en moins d'une minute auquel des 4 types il appartient.

		Type d'énoncé			
		1	2	3	4
Énoncé 1	Démontrer que pour n entier naturel non nul, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7				
Énoncé 2	On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 8} \end{cases}$ Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$				
Énoncé 3	Démontrer que pour n entier naturel non nul, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$				
Énoncé 4	On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0,4 \\ u_{n+1} = f(u_n) = 2u_n e^{-u_n} \end{cases}$ Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ <u>Indication :</u> on admet que la fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$				

Chapitre 2

VARIATIONS, MAJORATION ET MINORATION DE SUITES

Vos missions : Déterminer le sens de variation d'une suite
Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée.

Ma vidéo sur les variations de suite :

Ma vidéo sur la majoration et la minoration de suite :

I. DÉTERMINER LES VARIATIONS D'UNE SUITE

Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

- **croissante** si, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$;
- **décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Quatre méthodes permettent de montrer qu'une suite est croissante ou décroissante :

Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Si pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ donc la suite est **croissante** ;

$u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite est **décroissante** ;

$u_{n+1} - u_n$ n'est pas de signe constant, la suite n'est pas monotone.

Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Cette méthode n'est possible que si $u_n > 0$ (pour tout n entier naturel).

Si pour tout entier naturel n :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ donc la suite est croissante ;

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite est décroissante ;

$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ n'est pas de signe constant, la suite n'est pas monotone.

Lorsque $u_n = f(n)$: Étudier les variations de f

Si $u_n = f(n)$ et que f est croissante, alors la suite (u_n) est croissante.

Si $u_n = f(n)$ et que f est décroissante, alors la suite (u_n) est décroissante.

Attention, cette méthode ne s'applique pas si la suite est définie par récurrence : il ne faut pas confondre $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n = f(n)$!

Raisonner par récurrence[1]

La propriété P_n à démontrer sera $u_n \leq u_{n+1}$ (la suite est croissante) ou $u_n \geq u_{n+1}$ (la suite est décroissante).

À QUOI SERVENT LES SUITES ?

Une suite permet de modéliser des phénomènes « discrets », comme par exemple une variable économique, ou une donnée physique, mesurée à intervalles de temps réguliers. Une suite peut également nous aider à obtenir une approximation d'une certaine valeur. Ainsi, dès le IIIe siècle av. J.-C., Archimède parvint à déterminer un encadrement de π de l'ordre du millième en utilisant des suites de périmètres de polygones ! Au Ier siècle apr. J.-C., Héron Alexandrie était capable de donner une valeur approchée de n'importe quelle racine carrée au moyen d'une suite définie par récurrence !

LA MINUTE CULTURE

1

1. Voir chapitre 1

II. EXERCICES TYPES – VARIATIONS DE SUITE

Exercice type 1 Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 2n - 5 \end{cases}$

★ **Étudier les variations de la suite (u_n)**

$u_{n+1} - u_n = -2n - 5 < 0$ car $n \in \mathbb{N}$ donc **la suite (u_n) est décroissante**.

Exercice type 2 Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

On note (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = ne^n$

★ **Étudier les variations de la suite (v_n)**

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)e^{n+1}}{ne^n} = \frac{n+1}{n}e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)e = e + \frac{e}{n} > 1 \text{ car } e \approx 2{,}72$$

donc **la suite (v_n) est croissante**.

Exercice type 3 Étudier les variations de f

On note (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = -n^2 - 4n - 3$.

★ **Étudier les variations de la suite (u_n)**

Soit f la fonction définie de $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = -x^2 - 4x - 3$.
f est une fonction polynomiale du second degré, elle est donc représentée graphiquement par une parabole. $a = -1 < 0$ donc cette parabole est orientée vers le bas (U inversé), avec un maximum atteint en $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-2} = -2$ donc f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et puisque $w_n = f(n)$, **la suite (w_n) est décroissante**.

Exercice type 4 Raisonner par récurrence

On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{-2}{u_n + 5} \end{cases}$

★ **Étudier les variations de la suite (u_n)**

En calculant les premiers termes à la calculatrice, on constate que la suite (u_n) semble décroissante.

Montrons par récurrence la propriété $P(n)$: $u_n \geq u_{n+1}$

Initialisation

$u_1 = \dfrac{-2}{u_0 + 5} = \dfrac{-2}{7+5} = -\dfrac{1}{6}$ et $u_0 = 7$ donc $u_0 \geq u_1$ **P(0) est vraie.**

Hérédité

Supposons que pour un certain entier naturel k, P(k) soit vraie, c'est-à-dire que $u_k \geq u_{k+1}$ (hypothèse de récurrence). Montrons qu'alors, P(k+1) est vraie.

$u_k \geq u_{k+1}$

$u_k + 5 \geq u_{k+1} + 5$

$\dfrac{1}{u_k + 5} \leq \dfrac{1}{u_{k+1} + 5}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

$\dfrac{-2}{u_k + 5} \geq \dfrac{-2}{u_{k+1} + 5}$

bien penser à changer le sens de l'inégalité quand on multiplie par un nombre négatif.

$u_{k+1} \geq u_{k+2}$ **P(k+1) est vraie.**

Conclusion

La propriété P(n) est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, **la suite (u_n) est décroissante**.

TOPO MÉTHODO 3

SAVOIR CHOISIR LA MEILLEURE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES VARIATIONS D'UNE SUITE

★ À chaque fois que vous devez déterminer les variations d'une suite, demandez-vous quelle est la méthode la plus adaptée !

	Énoncé	Méthode
1	Classique	Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
2	$u_n > 0$ et présence de n en exposant dans l'expression de u_n	Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
3	Lorsque $u_n = f(n)$	Étudier les variations de f
4	Si les 3 méthodes précédentes ne sont pas adaptées	Démontrer par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$ ou $u_n \geq u_{n+1}$

CHRONO-TEST 2

Corrigé p. 198

★ Pour chacun des énoncés suivants, déterminez en moins d'une minute laquelle des 4 méthodes est la plus efficace !

		Type d'énoncé			
		1	2	3	4
Énoncé 1	On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^3 + 2n^2 - n + 5$ Déterminer le sens de variation de (u_n)				
Énoncé 2	On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{n}{n+1} \end{cases}$ Déterminer le sens de variation de (u_n)				
Énoncé 3	On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{5^n}$ Déterminer le sens de variation de (u_n)				
Énoncé 4	On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ Déterminer le sens de variation de (u_n)				

III. MONTRER QU'UNE SUITE EST MAJORÉE OU/ET MINORÉE

Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

- **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$;
- **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.

Une suite à la fois minorée et majorée est dite **bornée**.

Lorsqu'une suite est minorée par m, elle est aussi minorée par tous les nombres plus petits que m. Ainsi, une suite minorée par 4 le sera aussi par 3 ou 0 par exemple.

De même, une suite majorée par M le sera par tous les nombres supérieurs à M.

Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.