Chapitre 1

Équations différentielles

L'essentiel du cours

Présentation

Équations différentielles

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction, que l'on notera généralement y, faisant intervenir cette fonction et ses dérivées successives.
On appellera solution de cette équation différentielle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction suffisamment dérivable sur I vérifiant cette équation.

On notera t (ou x) la variable dont dépend la fonction y.
La résolution d'une équation différentielle sur I revient à déterminer l'ensemble des fonctions solutions sur I.

Par exemple, une équation différentielle s'écrira $2y'' - y' + y = \ln t$, $t > 0$.
On constatera que les fonctions y et ses dérivées se placeront dans le membre de gauche de l'équation et que tout le reste se placera à droite (on appelle ce membre de droite : le second membre).

Condition initiale

Si l'on cherche les solutions d'une équation différentielle avec une (ou des) condition(s) particulière(s) comme $y(t_0) = 3$ ou $y'(t_0) = 1$, alors on appellera ces conditions des conditions initiales.

Équation différentielle homogène associée

On appellera équation différentielle homogène associée à une équation différentielle lorsque le second membre de cette dernière est égal à 0.

> *Si l'on a l'équation différentielle $y' + 3y = e^t$ alors son équation différentielle homogène associée est $y' + 3y = 0$.*

Équation différentielle du premier ordre

Définition

Une équation différentielle du premier ordre est une équation du type :

$$y' + ay = b(t) \quad (E)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue sur I (I intervalle de $\mathbb{R}$)
On appelle l'équation homogène associée à (E), l'équation suivante :

$$y' + ay = 0 \quad (E_0)$$

Solution de l'équation homogène associée

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont de la forme :

$$Y(t) = \alpha e^{-at} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

> *L'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaison linéaire ; cela signifie que cet ensemble a une structure d'espace vectoriel.*
> *Autrement dit, si l'on note Y_1 et Y_2 des solutions de (E_0) alors, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ est aussi solution de (E_0).*

Solution générale de l'équation différentielle

Les solutions y de l'équation (E) ont la forme :

$$y = Y + \widetilde{y}$$

où Y est la solution générale de l'équation homogène (E_0)
et $\widetilde{y}$ est une solution particulière de (E) (c'est-à-dire que $\widetilde{y}$ vérifie l'équation $\widetilde{y}\,' + a\widetilde{y} = c(t)$)

Le conseil du prof :
Pour la recherche d'une solution particulière on a plusieurs possibilités :
⋆ *si* $a \neq 0$ *et la fonction* b *est constante alors on peut choisir* $\widetilde{y} = \dfrac{b}{a}$ *comme solution particulière de* (E).
⋆ *si* $a = 0$ *et la fonction* b *est constante alors on peut choisir* $\widetilde{y} = bt$ *comme solution particulière de* (E).
⋆ *si la fonction* b *n'est pas constante alors l'énoncé nous guidera.*

Principe de superposition des solutions

Soit b_1 et b_2 deux fontions continues sur I.
Si :
- y_1 est une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1(t)$
- y_2 est une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_2(t)$

alors, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:
$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$y' + ay = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$$

En pratique, si notre second membre est compliqué, on pourra le « découper » en plusieurs seconds membres et résoudre les différentes équations différentielles associées. À la fin de ces résolutions, il nous restera à considérer une combinaison linéaire des différentes solutions trouvées.

Équation différentielle du second ordre

Définition

Une équation différentielle du second ordre est une équation du type :

$$y'' + ay' + by = c(t) \quad (E)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et c une fonction continue sur I (I intervalle de $\mathbb{R}$)
On appelle l'équation homogène associée à (E), l'équation suivante :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (E_0)$$

Solution de l'équation homogène associée

Pour résoudre l'équation homogène associée, on considère son équation caractéristique :

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (EC)$$

En notant Δ son discriminant, on a les cas suivants :

$\star$ Si $\Delta > 0$ alors on a deux solutions distinctes x_1 et x_2 et les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$Y(t) = \alpha e^{x_1 t} + \beta e^{x_2 t} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\star$ Si $\Delta = 0$ alors on a une unique solution x_0 et les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$Y(t) = (\alpha t + \beta) e^{x_0 t} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\star$ Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solution pour (E_0).

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaison linéaire ; cela signifie que cet ensemble a une structure d'espace vectoriel.
Autrement dit, si l'on note Y_1 et Y_2 des solutions de (E_0) alors, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ est aussi solution de (E_0).

Solution générale de l'équation différentielle

Les solutions y de l'équation (E) ont la forme :

$$y = Y + \widetilde{y}$$

où Y est la solution générale de l'équation homogène (E_0)
et $\widetilde{y}$ est une solution particulière de (E) (c'est-à-dire que $\widetilde{y}$ vérifie l'équation $\widetilde{y}\,'' + a\widetilde{y}' + b\widetilde{y} = c(t)$)

Le conseil du prof :
Pour la recherche d'une solution particulière, on a plusieurs possibilités :
$\star$ *si c est une fonction constante et si $b \neq 0$ alors on peut choisir* $\widetilde{y} = \dfrac{c}{b}$ *comme solution particulière de (E).*
$\star$ *si c est une fonction constante et si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors on peut choisir* $\widetilde{y} = \dfrac{c}{a}t$ *comme solution particulière de (E).*
$\star$ *si c est une fonction constante et si $a = b = 0$ alors on peut choisir* $\widetilde{y} = \dfrac{c}{2}t^2$ *comme solution particulière de (E).*
$\star$ *si c est une fonction non constante alors c'est l'énoncé qui nous guidera pour la recherche de cette solution particulière.*

Principe de superposition des solutions

Soit c_1 et c_2 deux fontions continues sur I.
Si :
- y_1 est une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_1(t)$
- y_2 est une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_2(t)$

alors, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:
$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = \lambda_1 c_1(t) + \lambda_2 c_2(t)$$

En pratique, si notre second membre est compliqué, on pourra le « découper » en plusieurs seconds membres et résoudre les différentes équations différentielles associées. À la fin de ces résolutions, il nous restera à considérer une combinaison linéaire des différentes solutions trouvées.

Trajectoire

Présentation

En notant y une solution sur I d'une équation différentielle (E), on appelle trajectoire de cetet équation différentielle tout ensemble $\{(t, y(t)),\ t \in I\}$.

Les couples $(t, y(t))$ (où $t \in I$) représentent les courbes représentatives des solutions de l'équation différentielle.

Unicité de la solution

$\star$ Si l'équation différentielle $y' + ay = b(t)$ a pour condition initiale $y(t_0) = y_0$ (où $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$) alors la solution à l'équation différentielle sera unique.

$\star$ Si l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c(t)$ a pour conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$ (où $t_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$) alors la solution à l'équation différentielle sera unique.

Cette propriété d'unicité de la solution d'une équation différentielle par condition(s) initiale(s) s'appelle le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le conseil du prof :
Ce problème d'unicité pour la solution d'une équation différentielle se traduit par le fait que les courbes représentatives de solutions d'une même équation différentielle, mais avec des conditions initiales différentes, ne se croisent pas.
Autrement dit, l'intersection des trajectoires associées à des conditions initiales différentes est vide.

Trajectoire d'équilibre

La trajectoire associée à une solution constante d'une équation différentielle est appelée trajectoire d'équilibre.

Si l'on considère l'équation différentielle $y' - 2y = 0$, alors les solutions sont de la forme :

$$Y(t) = \alpha e^{2t} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si l'on veut une solution constante, il faut que sa dérivée soit nulle.
Or, la dérivée de cette fonction vaut $2\alpha e^{2t}$.
On a alors $2\alpha e^{2t} = 0 \iff \alpha = 0$; ainsi la fonction solution est la fonction nulle.
Ainsi, cette équation différentielle n'a qu'une seule trajectoire d'équilibre (la fonction nulle).

Convergence de trajectoire

On dira qu'une trajectoire $\{(t, y(t)),\ t \in I\}$ d'une équation différentielle est convergente si $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$ existe et est finie.

Le conseil du prof :
Si une trajectoire est convergente alors on remarquera que la convergence se fait vers une trajectoire d'équilibre.

Systèmes différentiels linéaires

Présentation

Un système différentiel linéaire à coefficients constants est une équation de la forme :

$$X' = AX + B \quad (E)$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec x_i des fonctions dérivables sur un intervalle I.
Résoudre ce système c'est trouver tous les vecteurs X qui le vérifient.
Ce système différentiel peut également s'écrire pour tout $t \in I$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1 \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n \end{array} \right.$$

Dans le cas où $n = 1$, ces systèmes différentiels linéaires reviennent à des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

On parle de système dfférentiel à coefficients constants car les matrices A et B contiennent des constantes ; on peut ainsi imaginer des systèmes différentiels à coefficients variables de la forme $X' = A(t)X + B(t)$ où les matrices A et B contiennent des fonctions.

Système différentiel linéaire homogène

Le système différentiel linéaire homogène associé à (E) est :

$$X' = AX \quad (E_0)$$

L'ensemble des solutions du système différentiel homogène est stable par combinaison linéaire ; cela signifie que cet ensemble a une structure d'espace vectoriel.
Autrement dit, si l'on note X_1 et X_2 des solutions de (E_0) alors, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est aussi solution de (E_0)

Problème de Cauchy

Soit $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Solution générale du système différentiel homogène

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable ; notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et $(V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres (associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$).
Alors les solutions du système différentiel linéaire homogène $X' = AX$ sont de la forme :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} V_i \quad \text{où} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Solution générale du système différentiel

Les solutions X de l'équation (E) ont la forme :

$$X = X_0 + \widetilde{X}$$

où X_0 est la solution générale du système différentiel homogène (E_0) et $\widetilde{X}$ est une solution particulière de (E) (c'est-à-dire que $\widetilde{X}$ vérifie l'équation $\widetilde{X}' = A\widetilde{X} + B$)

Le conseil du prof :
Pour la recherche d'une solution particulière, on a deux possibilités :

⋆ *Si A est inversible alors on peut choisir $\widetilde{X} = -A^{-1}B$*
⋆ *Si A n'est pas inversible alors l'énoncé nous guidera.*

Stabilité des solutions, état d'équilibre

⋆ On dira que $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un point d'équilibre du système différentiel linéaire $X' = AX + B$ si $AX_0 = 0$.
On dira alors que l'on a un état d'équilibre.

⋆ On dira que l'on a un état stable si, pour des conditions initiales proches du point d'équilibre, les solutions restent indéfiniment proches de l'état d'équilibre.
Si, de plus, elles retournent quand $t \to +\infty$ à l'état d'équilibre alors on parlera de stabilité asymptotique.
On dira qu'un état est instable s'il n'est pas stable.

Le conseil du prof :
- Pour la recherche du point d'équilibre, il y a 2 cas :
$\star$ *Si A est inversible alors $AX_0 \Longrightarrow X_0 = 0$; donc $X_0 = 0$ est le seul point d'équilibre.*
$\star$ *Si A n'est pas inversible, il faut résoudre le système $AX = 0$.*

- En pratique, pour la recherche de la stabilité des solutions, on étudiera le signe des valeurs propres de A.
$\star$ *Si toutes les valeurs propres sont < 0 alors on a une stabilité asymptotique des solutions.*
$\star$ *Si l'une des valeurs propres est > 0 alors on a un état instable des solutions.*
$\star$ *Si l'un des valeurs propres est nulle et les autres sont > 0 alors l'état des solutions est instable.*
$\star$ *Si l'une des valeurs propres est nulle et les autres sont < 0 alors on a un état stable des solutions.*

Comportement asymptotique des trajectoires

Soit le système différentiel linéaire homogène $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.
Notons λ_1 et λ_2 ses valeurs propres.

$\star$ Cas 1 : Si λ_1 et λ_2 sont de signes opposés alors les trajectoires présenteront l'origine comme point d'équilibre de type point selle.
L'origine est instable.

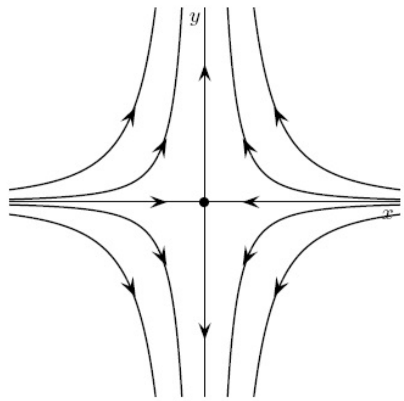
$\star$ Cas 2 : Si λ_1 et λ_2 sont < 0 et distinctes alors les trajectoires présenteront l'origine comme point d'équilibre de type puits (nœud attractif).
L'origine est asymptotiquement stable.

$\star$ Cas 3 : Si λ_1 et λ_2 sont > 0 et distinctes alors les trajectoires présenteront l'origine comme point d'équilibre de type source (nœud répulsif).
L'origine est instable.

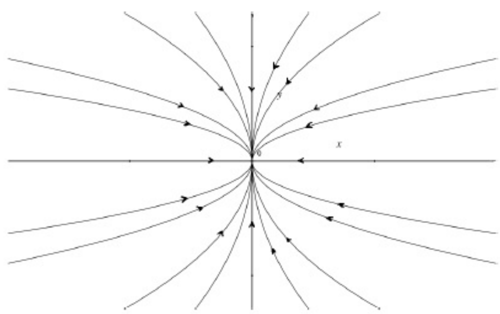
$\star$ Cas 4 : Si λ_1 ou λ_2 est nulle (pas les deux) alors tous les points de l'axe des ordonnées sont des points d'équilibre et les autres trajectoires sont les demi-droites horizontales issues des points d'équilibre.
Les points d'équilibre sont instables si l'autre valeur propre est > 0 et ils sont stables si l'autre valeur propre est < 0.

$\star$ Cas 5 : Si $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ alors toutes les trajectoires sont les demi-droites issues du seul point d'équilibre qui est l'origine (on parlera de soleil).
L'origine est asymptotiquement stable si les valeurs propres sont < 0 (soleil attractif) et l'origine est instable si les valeurs propres sont > 0 (soleil répulsif).

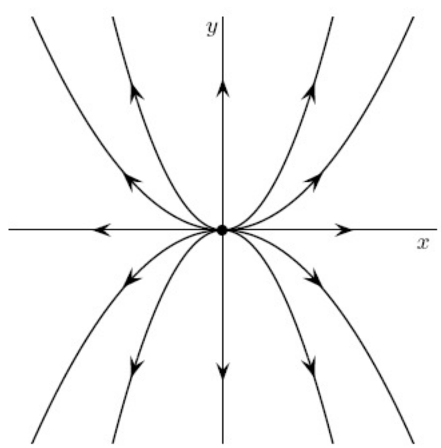
Voici les représentations graphiques des différents cas de trajectoires :



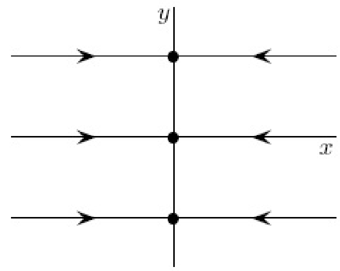
Cas 1 : $\lambda_1\lambda_2 < 0$



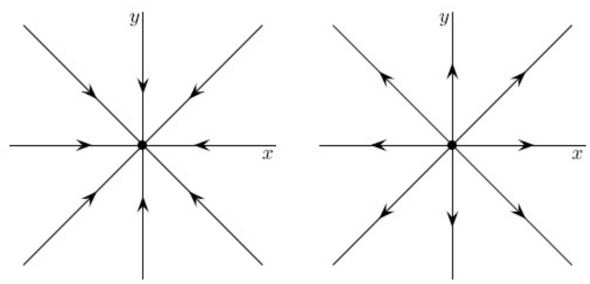
Cas 2 : $\lambda_1, \lambda_2 < 0$



Cas 3 : $\lambda_1, \lambda_2 > 0$



Cas 4 : $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$ (pas les deux)



Cas 5 : $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ (< 0 à gauche et > 0 à droite)

Système différentiel et équation scalaire

Une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2 est une équation de la forme :

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où a_1, a_2, b sont des constantes réelles.
En notant $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, cette équation différentielle sécrit :

$$X' = AX + B$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour les solutions de ce système différentiel (avec cette matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$*) on pourra se reporter aux solutions trouvées pour une équation différentielle scalaire d'ordre 2.*

Une question ? des réponses !

Comment résoudre $y' + ay = b(t)$?

Si $b(t) = 0$

C'est en fait l'équation différentielle homogène associée ! On sait alors que les solutions s'écrivent sous la forme :

$$Y(t) = \alpha e^{-at} \quad \textit{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si $b(t) = b$ **(constante)**

Les solutions générales pour cette équation sont de la forme :

$$y = Y + \frac{b}{a}$$

où Y est solution de l'équation homogène associée (donc $Y(t) = \alpha e^{-at}$).

Si $a = 0$

L'équation s'écrit alors :

$$y' = b(t)$$

Il nous faut donc trouver les primitives de b (par primitive usuelle, intégration par parties par exemple).

Si b **est multiforme**

Si la fonction b présente plusieurs composantes (par exemple avec l'équation différentielle : $y' + ay = 2 + e^t$), on pourra considérer le principe de superposition des solutions en considérant plusieurs équations différentielles (dans cet exemple : $y' + ay = 2$ et $y' + ay = e^t$).
On considérera alors une combinaison linéaire d'une solution de chaque équation différentielle.

Sinon...

Les solutions générales de cette équation sont de la forme :

$$y = Y + \widetilde{y}$$

où Y est solution de l'équation homogène associée (donc $Y(t) = \alpha e^{-at}$) et $\widetilde{y}$ est une solution particulière de l'équation différentielle de départ.

Pour cette dernière l'énoncé nous guidera en nous donnant la forme d'écriture de cette solution (par exemple : « trouver une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré ») ou en nous proposant une méthode hors-programme (voir exercice).

Comment résoudre $y'' + ay' + by = c(t)$?

Si $c(t) = 0$

C'est en fait l'équation différentielle homogène associée ! On sait alors qu'il nous faut considérer l'équation caractéristique :

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (EC)$$

Suivant le signe de son discriminant Δ, on a différentes formes de solutions.

⋆ *Si $\Delta > 0$ alors, en notant x_1 et x_2 les deux solutions distinctes, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :*

$$Y(t) = \alpha e^{x_1 t} + \beta e^{x_2 t} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

⋆ *Si $\Delta = 0$ alors, en notant x_0 l'unique solution, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :*

$$Y(t) = (\alpha t + \beta) e^{x_0 t} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Si $c(t) = c$ (constante)

Les solutions générales pour cette équation sont de la forme :

$$y = Y + \widetilde{y}$$

où Y est solution de l'équation homogène associée

$$\text{et } \widetilde{y} = \begin{cases} \dfrac{c}{b} & \text{si } \ b \neq 0 \\[2ex] \dfrac{c}{a}t & \text{si } \ b = 0, \ a \neq 0 \\[2ex] \dfrac{t^2}{2} & \text{si } \ a = b = c0 \end{cases}$$

Si $a = b = 0$

L'équation s'écrit alors :

$$y'' = c(t)$$

Il nous faut donc primitiver doublement la fonction c (en deux temps). Par exemple, si $c(t) = e^t$, on trouvera $y'(t) = e^t + \alpha$ et donc $y(t) = e^t + \alpha t + \beta, \ \alpha, \beta \in I\!R$.

Si c est multiforme

Si la fonction b présente plusieurs composantes (par exemple avec l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = t^2 + 2e^t$), on pourra considérer le principe de superposition des solutions en considérant plusieurs équations différentielles (dans cet exemple : $y''+ay'+by = t^2$ et $y''+ay'+by = 2e^t$). On considérera alors une combinaison linéaire d'une solution de chaque équation différentielle.

Sinon...

Les solutions générales de cette équation sont de la forme :

$$y = Y + \widetilde{y}$$

où Y est solution de l'équation homogène associée
et $\widetilde{y}$ est une solution particulière de l'équation différentielle de départ.
Pour cette dernière, l'énoncé nous guidera en nous donnant la forme d'écriture de cette solution (par exemple : « trouver une solution particulière sous la forme e^{At} ») ou en nous proposant une méthode hors-programme (voir exercice).

Comment résoudre $X' = AX + B$?

Si A est diagonalisable et $B = 0$

En considérant A diagonalisable et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (avec $V_1, \ldots, V_n$ les vecteurs propres associés), les solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ sont :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} V_i \quad \text{où} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Si A est inversible

Les solutions du système différentiel linéaire $X' = AX + B$ sont de la forme :

$$X = X_0 - A^{-1}B$$

où X_0 est la solution générale du système différentiel linéaire homogène $X' = AX$.

Sinon...

Les solutions du système différentiel linéaire $X' = AX + B$ sont de la forme :

$$X = X_0 + \widetilde{X}$$

où X_0 est la solution générale du système différentiel linéaire homogène $X' = AX$
et $\widetilde{X}$ est une solution particulière du système différentiel inital.
Pour cette denrière, l'énoncé nous guidera en nous donnant la forme d'écriture.

Les basiques

★☆☆ Exercice 1 : résolution d'une EDL d'ordre 1 avec second membre constant

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$2y' - 3y = 9 \quad (E)$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
2. Chercher une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer les trajectoires d'équilibre de cette équation différentielle.
5. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) qui vérifient $y(-1) = 1$. La trajectoire est-elle convergente ?

1. L'équation homogène associée est :

$$2y' - 3y = 0$$

que l'on peut écrire :

$$y' - \frac{3}{2}y = 0$$

Ainsi, les solutions de cette équation sont :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \alpha e^{3t/2} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. Une solution particulière de (E) est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = -3$$

3. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) a pour forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = Y(t) + \widetilde{y}(t) = \alpha e^{3t/2} - 3 \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

4. Les trajectoires d'équilibre d'une équation différentielle sont les solutions constantes de cette dernière. En notant a une telle solution, on a alors :
$$-3a = 9$$
ce qui nous donne la seule possibilité $a = -3$.
5. On veut que nos solutions de (E) vérifient $y(-1) = 1$, cela nous donne :
$$\alpha e^{-3/2} - 3 = 1$$
Ainsi, il vient :
$$\alpha = 4e^{3/2}$$
On a donc une unique solution de (E) vérifiant $y(-1) = 1$ qui est :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = 4e^{3/2}e^{3t/2} - 3 = 4e^{3(t+1)/2} - 3$$

★☆☆ Exercice 2 : résolution d'une EDL d'ordre 1 avec second membre polynomiale

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y' + 2y = t^2 \quad (E)$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $\widetilde{y}(t) = at^2 + bt + c$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) vérifiant $y(0) = 1$. La trajectoire est-elle convergente ?

1. L'équation homogène associée à (E) est :

$$y' + 2y = 0 \quad (E_0)$$

Les solutions de (E_0) sont :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \alpha e^{-2t} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = at^2 + bt + c$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}\,'(t) + 2\widetilde{y}(t) = t^2$$

ce qui donne :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 2at + b + 2(at^2 + bt + c) = t^2$$

Par identification, il vient :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on a : $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{1}{4}$.
Dès lors, une solution particulière de (E) est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

3. Les solutions générales de (E) sont alors de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = Y(t) + \widetilde{y}(t) = \alpha e^{-2t} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

4. On veut que la solution y vérifie $y(0) = 1$, cela nous donne :

$$\alpha + \frac{1}{4} = 1$$

d'où :

$$\alpha = \frac{3}{4}$$

Ainsi, l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

Comme $e^{2t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (terme de plus haut degré), on en déduit que :

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$$

Ainsi, la trajectoire de y n'est pas convergente.

★☆☆ Exercice 3 : résolution d'une EDL d'ordre 1 par superposition de solutions

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y' - y = (t+1)e^{2t} + 3 \quad (E)$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
2. Chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y' - y = 3 \quad (E_1)$$

3. Chercher une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y' - y = (t+1)e^{2t} \quad (E_2)$$

   On la cherchera sous la forme $P(t)e^{2t}$ où P est un polynôme.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

1. L'équation homogène associée à (E) est :

$$y' - y = 0 \quad (E_0)$$

   Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \alpha e^t \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. Une solution particulière de (E_1) est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}_1(t) = -3$$

3. Considérons une solution particulière de (E_2) sous la forme : $\widetilde{y}_2(t) = P(t)e^{2t}$; en la remplaçant dans (E_2), on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P'(t)e^{2t} + 2P(t)e^{2t} = (t+1)e^{2t}$$

   ce qui nous donne :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P'(t) + 2P(t) = t+1$$

On en déduit dans un premier temps que P est de degré 1 et donc on a la forme $P(t) = at + b$.
En remplaçant cette forme, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a + 2(at + b) = t + 1$$

et par identification, il vient :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ a + 2b = 1 \end{cases}$$

On trouve : $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{1}{4}$.
Ainsi, une solution particulière de (E_2) est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y_2}(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2t}$$

4. Par le principe de superposition des solutions, on a la forme des solutions de (E) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = Y(t) + \widetilde{y_1}(t) + \widetilde{y_2}(t) = \alpha e^t - 3 + \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2t} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

5. On veut trouver les solutions y de (E) vérifiant $y(0) = 0$; cela nous donne :

$$\alpha - 3 + \frac{1}{4} = 0$$

et donc :

$$\alpha = \frac{11}{4}$$

Ainsi, l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{11}{4}e^t - 3 + \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2t}$$

★☆☆ Exercice 4 : résolution d'une EDL d'ordre 2 avec second membre polynomiale

On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = t^2 \quad (E)$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme de $\mathbb{R}_2[t]$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) vérifiant les conditions $y(0) = y'(0) = 0$.

1. L'équation homogène associée à (E) est :

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (E_0)$$

On considère l'équation caractéristique :

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Elle a pour unique solution $x_0 = 1$; ainsi, les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = (\alpha t + \beta)e^t \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2. On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = at^2 + bt + c$$

Comme $\widetilde{y}$ est solution de (E), on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 2a - 2(2at + b) + at^2 + bt + c = t^2$$

Par identification, on arrive à :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -4a + b = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on trouve : $a = 1$, $b = 4$ et $c = 6$.
Une solution particulière est donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = t^2 + 4t + 6$$

3. Les solutions générales de (E) sont donc de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = Y(t) + \widetilde{y}(t) = (\alpha t + \beta)e^t + t^2 + 4t + 6 \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

4. On veut que la solution y vérifie $y(0) = y'(0) = 0$, ce qui nous donne $(y'(t) = \alpha e^t + (\alpha t + \beta)e^t + 2t + 4)$:

$$\begin{cases} \beta + 6 = 0 \\ \alpha + \beta + 4 = 0 \end{cases}$$

On trouve : $\beta = -6$ et $\alpha = 2$.
L'unique solution vérifiant ces conditions est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = (2t - 6)e^t + t^2 + 4t + 6$$

★☆☆ Exercice 5 : résolution d'une EDL d'ordre 1 avec second membre polynomiale

On considère l'équation différentielle :

$$y' + 2y = t^2 \quad (E)$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
2. Chercher une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $\widetilde{y}(t) = at^2 + bt + c$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) vérifiant $y(0) = 1$.
   La trajectoire est-elle convergente ?

1. L'équation homogène associée est :

   $$y' + 2y = 0 \quad (E_0)$$

   Les solutions de (E_0) sont de la forme :

   $$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \alpha e^{-2t} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = at^2 + b + c$$

   Comme $\widetilde{y}$ vérifie l'équation (E), on a :

   $$\forall t \in \mathbb{R},\ 2at + b + 2(at^2 + bt + c) = t^2$$

   Par identification, on a :

   $$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$$

   On trouve que : $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = \dfrac{1}{4}$.
   Ainsi, une solution particulière de (E) est :

   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

3. Les solutions générales de (E) sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = Y(t) + \widetilde{y}(t) = \alpha e^{-2t} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

4. On veut qu'une solution y de (E) vérifie $y(0) = 1$; cela nous donne :

$$\alpha + \frac{1}{4} = 1$$

On trouve que $\alpha = \dfrac{3}{4}$ et ainsi la solution est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

Comme on a :

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{2} = +\infty$$

la trajectoire de y ne converge pas.

★☆☆ Exercice 6 : résolution d'une EDL d'ordre 2 avec second membre exponentielle-polynôme

On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^t \quad (E)$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
2. Chercher une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $\widetilde{y}(t) = (at^2 + bt + c)e^t$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

1. L'équation homogène associée est :

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad (E_0)$$

Son équation caractéristique est :

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Son unique solution est $x_0 = 2$; ainsi, la forme générale des solutions de (E_0) est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = (\alpha t + \beta)e^{2t} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = (at^2 + bt + c)e^t$$

Comme $\widetilde{y}$ est solution de (E), on a ($\widetilde{y}\,'(t) = (at^2+(2a+b)t+b+c)e^t$ et $\widetilde{y}\,''(t) = (at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c)e^t$) :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \qquad & (at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c)e^t - 4(at^2 + (2a + b)t + b + c)e^t \\ + \quad & (at^2 + bt + c)e^t \\ = \quad & (t^2 + 1)e^t\end{aligned}$$

Après simplifications, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ -2at^2 - (4a + 2b)t + 2a - 2b - 2c = t^2 + 1$$

Par identification, il vient :

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 4a + 2b = 0 \\ 2a - 2b - 2c = 1 \end{cases}$$

On trouve que : $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = -2$. Ainsi, une solution particulière de (E) est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = \Big(-\frac{t^2}{2} + t - 2\Big)e^t$$

3. Les solutions générales de (E) sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = Y(t)+\widetilde{y}(t) = (\alpha t+\beta)e^{2t}+\Big(-\frac{t^2}{2}+t-2\Big)e^t \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

★★☆ Exercice 7 : résolution d'une équation de Riccati

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y' + 3y + y^2 + 2 = 0 \quad (E)$$

1. Déterminer les trajectoires d'équilibre de cette équation différentielle (on les notera y_1 et y_2 avec $y_1 < y_2$).
2. En notant $Y = y - y_2$, vérifier que la nouvelle équation différentielle satisfaite par Y est :

$$Y' + Y + Y^2 = 0 \quad (E')$$

3. On admet que les solutions de (E') ne s'annulent jamais.
   (a) On note z la fonction définie par $z = \dfrac{1}{Y}$. Montrer que z vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$z' - z = 1 \quad (E'')$$

   (b) Déterminer les solutions générales de (E'').
   (c) En déduire les solutions générales de (E).
   (d) Vers quel équilibre les trajectoires convergent-elles ?

1. Déterminer les trajectoires d'équilibre d'une équation différentielle c'est déterminer les solutions constantes de celle-ci.
   Notons a une solution constante de (E), on a alors :

$$3a + a^2 + 2 = 0$$

   On trouve alors que a peut être égal à $y_1 = -2$ ou $y_2 = -1$.
2. On pose $Y = y + 1$ (soit $y = Y - 1$) ; l'équation (E) se ramène alors à :

$$(Y-1)' + 3(Y-1) + (Y-1)^2 + 2 = 0$$

   ce qui donne l'équation (E') :

$$Y' + Y + Y^2 = 0$$

3. (a) Comme on a admis que les solutions Y étaient non nulles, alors la fonction z est dérivable par quotient ($Y \neq 0$).

On a alors :

$$z' = -\frac{Y'}{Y^2}$$

Comme $Y' = -Y - Y^2$, on a en remplaçant dans z' :

$$z' = \frac{Y + Y^2}{Y^2} = \frac{1}{Y} + 1 = z + 1$$

Ainsi, on obtient bien l'équation (E'') :

$$z' - z = 1$$

(b) On considère l'équation différentielle homogène associée :

$$z' - z = 0 \quad (E''_0)$$

Les solutions générales sont de la forme :

$$Z(t) = \alpha e^t \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Une solution particulière de (E'') est :

$$\widetilde{z}(t) = -1$$

Ainsi, les solutions générales de (E'') sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = Z(t) + \widetilde{z}(t) = \alpha e^t - 1 \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(c) On en déduit alors les solutions générales de (E') ($Y = \frac{1}{z}$, on a $z \neq 0$ car $z = \frac{1}{Y}$) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \frac{1}{\alpha e^t - 1}$$

et on en déduit ainsi les solutions générales de (E)
(on a $y = Y - 1$) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{1}{\alpha e^t - 1} - 1$$

★☆☆ Exercice 8 : résolution d'une EDL d'ordre 1 avec second membre exponentiel

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y' + y = 2e^{-t} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
2. On cherche une solution particulière $\widetilde{y}$ sous la forme $\widetilde{y}(t) = P(t)e^{-t}$ où P est un polynôme.
   (a) Déterminer le degré du polynôme P.
   (b) Déterminer ce polynôme P puis une solution particulière de (E).
3. En déduire les solutions générales de (E).
4. Donner la solution de (E) vérifiant $y(0) = -1$.

1. L'équation différentielle homogène associée est :

$$y' + y = 0 \quad (E_0)$$

Les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \alpha e^{-t} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (a) On cherche une solution particulière sous la forme :
$\widetilde{y}(t) = P(t)e^{-t}$ où P est un polynôme.
Comme $\widetilde{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et comme $\widetilde{y}$ est solution de (E), on peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}\,'(t) + \widetilde{y}(t) = 2e^{-t}$$

ce qui donne :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P'(t)e^{-t} - P(t)e^{-t} + P(t)e^{-t} = 2e^{-t}$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P'(t) = 2$$

Ainsi, on en déduit que le degré de P est 1 (vu que le degré de P' est 0).

(b) Avec la relation trouvée : $P'(t) = 2$, on en déduit (on ne veut qu'une solution particulière) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = 2t$$

(on aurait pu prendre $P(t) = 2t + 1$, $P(t) = 2t - 4$, etc.)
Dès lors, on a une solution particulière de (E) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = 2te^{-t}$$

3. Les solutions générales de (E) sont alors de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = Y(t) + \widetilde{y}(t) = \alpha e^{-t} + 2te^{-t} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

4. On veut que $y(0) = -1$ ce qui nous donne :

$$\alpha = -1$$

Ainsi, la solution de (E) vérifiant cette condition est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = -e^{-t} + 2te^{-t} = (2t - 1)e^{-t}$$

★☆☆ Exercice 9 : résolution d'EDL d'ordre 2 sans second membre

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 5y' + 4y = 0$ avec $y(0) = 5$ et $y'(0) = 8$
2. $y'' - 4y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$
3. $y'' + 2y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
4. $y'' + 3y' = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$

1. L'équation caractéristique de cette équation différentielle est :
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
Ses racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$.
Ainsi, les solutions sont de la forme :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \alpha e^t + \beta e^{4t} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
Avec les conditions initiales données, on trouve :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha + 4\beta = 8 \end{cases}$$
ce qui implique : $\alpha = 4$ et $\beta = 1$.
Ainsi, la solution unique est :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = 4e^t + e^{4t}$$
2. De la même manière, on trouve -2 et 2 comme racines de l'équation caractéristique et avec les conditions initiales, on a :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$
3. On trouve -1 comme seule racine de l'équation caractéristique et avec les conditions initiales, on a :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = (t + 1)e^{-t}$$
4. On trouve -3 et 0 comme racines de l'équation caractéristique et avec les conditions initiales, on a :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{e^3}{e^3 - 1}(1 - e^{-3t})$$

★☆☆ Exercice 10 : résolution d'un système différentiel

Résoudre le système différentiel sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) - 2x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

Pour cela, on cherchera d'abord les éléments propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la recherche des valeurs propres de A, on passe par les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
\lambda \text{ valeur propre de A} & \Longleftrightarrow & A - \lambda I \text{ non inversible} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \text{ non inv.} \\
& \underset{L_2 \longleftrightarrow L_1}{\Longleftrightarrow} & \begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \text{ non inv.} \\
& \underset{\substack{L_2 \longleftarrow 2L_2-(1-\lambda)L_1 \\ L_3 \longleftarrow 2L_3+L_1}}{\Longleftrightarrow} & \begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & \lambda(5-\lambda) & -2\lambda \\ 0 & -\lambda & -2\lambda \end{pmatrix} \text{ non inv.} \\
& \underset{L_3 \longleftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} & \begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -\lambda & -2\lambda \\ 0 & \lambda(5-\lambda) & -2\lambda \end{pmatrix} \text{ non inv.} \\
& \underset{L_3 \longleftarrow L_3+(5-\lambda)L_2}{\Longleftrightarrow} & \begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -\lambda & -2\lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda(6-\lambda) \end{pmatrix} \text{ non inv.}
\end{array}$$

Ainsi, on a :

$$Sp(A) = \{0, 6\}$$

La recherche des sous-espaces propres par résolutions successives de $AY = 0$ et $(A - 6I)Y = 0$ (en prenant la dernière matrice triangulaire de la recherche des valeurs propres), on trouve :

$$E_0 = Vect\left(V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),\ E_6 = Vect\left(V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

On a bien une base de chacun de ces espaces (famille libre et génératrice).
Comme $dim\ E_0 + dim\ E_6 = 3 =$ taille de A alors A est diagonalisable.

Ainsi, les solutions du système différentiel sont de la forme :

$$X = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 e^{6t} V_3 \quad \text{où} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.
Ainsi, on trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x_1(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 e^{6t}$$

$$x_2(t) = -\alpha_2 + 2\alpha_3 e^{6t}$$

$$x_3(t) = \alpha_1 - \alpha_3 e^{6t}$$

★☆☆ Exercice 11 : résolution d'un système différentiel

Résoudre le système différentiel sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_3(t) \end{cases}$$

Pour cela, on cherchera d'abord les éléments propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme dans l'exercice précédent, on trouve que :

$$Sp(A) = \{0, 1, 2\}$$

Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a 3 valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.
La recherche des sous-espaces propres nous donne :

$$E_0 = Vect\left(V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right),\ E_1 = Vect\left(V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$E_2 = Vect\left(V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, les solutions du système différentiel sont de la forme :

$$X = \alpha V_1 + \alpha_2 e^t V_2 + \alpha_3 e^{2t} V_3 \quad \text{où} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.
Ainsi, on trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x_1(t) = \alpha_1 + \alpha_3 e^{2t}$$

$$x_2(t) = \alpha_1 - \alpha_2 e^t + 2\alpha_3 e^{2t}$$

$$x_3(t) = -\alpha_1 + \alpha_2 e^t + \alpha_3 e^{2t}$$

★☆☆ Exercice 12 : résolution d'un système différentiel avec second membre

Résoudre le système différentiel sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3 \\ x_2'(t) = -4x_1(t) - x_2(t) + 4 \end{cases}$$

Pour cela, on cherchera d'abord les éléments propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce système différentiel s'écrit :

$$X' = AX + B$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Pour la recherche des valeurs propres de A, on passe par les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de A} &\iff A - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} 6-\lambda & 3 \\ -4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \text{ non inv.} \\ &\iff (6-\lambda)(-1-\lambda) + 12 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \end{aligned}$$

On trouve alors que :

$$Sp(A) = \{2, 3\}$$

La recherche des sous-espaces propres nous donne :

$$E_2 = Vect\left(V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_3 = Vect\left(V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, les solutions du système différentiel homogène $X' = AX$ sont de la forme :

$$X_0 = \alpha_1 e^{2t} V_1 + \alpha_2 e^{3t} V_2 \quad \text{où} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

et $X_0 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.
Une solution particulière du système différentiel $X' = AX + B$ est

$\widetilde{X} = -A^{-1}B$.
On trouve que A est inversible $(6 \times (-1) - 3 \times (-4) \neq 0)$ et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/2 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Il vient donc :

$$\widetilde{X} = -A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dès lors, les solutions générales du système différentiel $X' = AX + B$ sont :

$$X = X_0 + \widetilde{X} = \alpha_1 e^{2t} V_1 + \alpha_2 e^{3t} V_2 + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Comme $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x_1(t) = -3\alpha_1 e^{2t} + 4\alpha_2 e^{3t} + \frac{3}{2}$$

$$x_2(t) = 4\alpha_1 e^{2t} - 4\alpha_2 e^{3t} - 2$$

★★☆ Exercice 13 : recherche d'une équation différentielle en ayant les solutions

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \frac{\alpha}{t^2+1}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.
Donner une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont φ est solution.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient ($t^2 + 1 \neq 0$) et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = -\frac{2\alpha t}{(t^2+1)^2}$$

On peut remarquer que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = -\frac{2t}{t^2+1}\varphi(t)$$

Ainsi, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (t^2+1)\varphi'(t) = -2t\varphi(t)$$

Dès lors, φ est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$(t^2+1)y' + 2ty = 0$$

Les problèmes d'entraînement

★★☆ **Problème 1 : méthode de la variation de la constante**
Soit l'équation différentielle $y' + ay = b(t)$ (E)
La méthode de la variation de la constante consiste à :
- trouver les solutions de l'équation homogène : $Y(t) = \alpha e^{-at}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
- chercher une solution particulière $\widetilde{y}$ sous la forme $\widetilde{y}(t) = \alpha(t)e^{-at}$ où la fonction α (ce n'est plus une constante) sera déterminée en écrivant que $\widetilde{y}$ est solution de (E)
- conclure quant aux solutions générales de (E)

Appliquer cette méthode à l'équation suivante :

$$y' + y = \frac{1}{1+e^t} \quad (E) \quad t \in \mathbb{R}$$

On a l'équation différentielle homogène associée :

$$y' + y = 0 \quad (E_0)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \alpha e^{-t}$$

Pour trouver une solution particulière à l'équation différentielle (E), on considère la forme :

$$\widetilde{y}(t) = \alpha(t)e^{-t}$$

Comme c'est une solution de (E), on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}\,'(t) + \widetilde{y}(t) = \frac{1}{1+e^t}$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha'(t)e^{-t} - \alpha(t)e^{-t} + \alpha(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}$$

Il nous reste donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}$$

qui se simplifie en :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$$

Comme on ne cherche qu'une solution particulière, il nous suffit de trouver une primitive de $\dfrac{e^t}{1+e^t}$.
En reconnaissant la forme $\dfrac{u'}{u}$, il vient comme choix :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(t) = \ln(1+e^t)$$

Ainsi, une solution particulière est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{y}(t) = e^{-t}\ln(1+e^t)$$

Et pour finir, les solutions générales de (E) sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = Y(t) + \widetilde{y}(t) = \alpha e^{-t} + e^{-t}\ln(1+e^t) \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

★★☆ **Problème 2 : équation différentielle logistique**
Soit $C, r \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons l'équation différentielle de Verhulst (dit aussi équation logistique) sur $\mathbb{R}_+$:

$$y'(t) = r\Big(1 - \frac{y(t)}{C}\Big)y(t) \quad (E)$$

Ce modèle permet de décrire l'évolution d'une population (animale ou humaine) où t représente le temps.

1. Quelles sont les trajectoires d'équilibre de (E) ?
2. On suppose que les solutions de (E) ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}_+$ (exceptée la solution nulle).
   On considère la fonction z définie par : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.
   Montrer que la fonction z satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. Donner les solutions de cette équation différentielle puis en déduire celles de (E).
4. Que peut-on dire quant à la convergence des trajectoires ?

1. Les trajectoires d'équilibre de (E) sont les solutions constantes de (E). Notons a une telle solution.
   On a alors :
   $$0 = r\Big(1 - \frac{a}{C}\Big)a$$
   ce qui nous donne $a = 0$ ou $a = C$.
   On a donc deux trajectoires d'équilibre $y = 0$ et $y = C$.
2. Tout d'abord, z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par quotient $(y \neq 0)$ et :
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z'(t) = -\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$$
   En remplaçant y' par $r\Big(1 - \dfrac{y}{C}\Big)y$, on a :
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z'(t) = -\frac{r\Big(1 - \frac{y(t)}{C}\Big)y(t)}{(y(t))^2} = -\frac{r}{y(t)} + \frac{r}{C}$$
   Ainsi, on trouve que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z'(t) = -rz(t) + \frac{r}{C}$$

Ainsi, z satisfait bien une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

3. L'équation homogène associée à cette équation différentielle est :

$$z' + rz = 0$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ Z(t) = \alpha e^{-rt} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Une solution particulière à cette équation est :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{z}(t) = \frac{1}{C}$$

Ainsi, les solutions générales de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z(t) = Z(t) + \widetilde{z}(t) = \alpha e^{-rt} + \frac{1}{C} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Dès lors, les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{\alpha e^{-rt} + \frac{1}{C}} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

4. Pour déterminer la convergence des trajectoires des solutions, on calcule :

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\alpha e^{-rt} + \frac{1}{C}} = C$$

car $r > 0$.
On constate donc que les trajectoires convergent vers la trajectoire d'équilibre égale à C.
En cas de convergence, les trajectoires convergeront toujours vers l'une des trajectoires d'équilibre.

★★☆ Problème 3 : modèle de Gompertz

Soit $C, r \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$:

$$y'(t) = ry(t)\ln\left(\frac{C}{y(t)}\right) \quad (E)$$

Ce modèle suggère la diminution exponentielle du nombre d'organismes vivants proportionnellement à l'augmentation linéaire de l'âge.

1. Quelles sont les trajectoires d'équilibre de (E) ?
2. On suppose que les solutions de (E) sont strictement positives sur $\mathbb{R}_+$.
   On considère la fonction z définie par : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z(t) = \ln\left(\dfrac{C}{y(t)}\right)$.
   Montrer que la fonction z satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. Donner les solutions de cette équation différentielle puis en déduire celles de (E).
4. Que peut-on dire quant à la convergence des trajectoires ?

1. De même que dans le problème précédent, en notant a une solution constante, on a :
$$0 = ra\ln\left(\frac{C}{a}\right)$$
   ce qui nous donne $a = 0$ ou $a = C$.
   Comme les solutions y ne peuvent être nulles (avec la présence du dénominateur), on ne garde que la solution $y = C$.
2. z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par composée ($C/y > 0$) et on a :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z'(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)}$$
   (pour la dérivée on a écrit $z = \ln C - \ln y$)
   En remplaçant y' par $ry\ln\left(\dfrac{C}{y}\right)$, on a :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z'(t) = -\frac{ry(t)\ln\left(\frac{C}{y(t)}\right)}{y(t)} = -r\ln\left(\frac{C}{y(t)}\right)$$
   Ainsi, on trouve :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ z'(t) = -rz(t)$$

Dès lors, z satisfait bien une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (homogène).

3. Les solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ z(t) = \alpha e^{-rt} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On a la relation $y(t) = Ce^{-z(t)}$, d'où les solutions de (E) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ y(t) = Ce^{-\alpha t e^{-rt}} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

4. Pour la convergence des trajectoires, on calcule :

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} Ce^{-\alpha t e^{-rt}} = C$$

car $te^{-rt} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées (et car $r > 0$).
On constate donc que les trajectoires convergent vers la trajectoire d'équilibre égale à C.

★★☆ Problème 4 : système différentiel et courbes

Partie I

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A.

1. Déterminer le rang de $A - 6I$.
   En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.
2. Soit $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = AV - 2V$.
   Montrer que U est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.
3. Posons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Donner la matrice B de f dans cette base.
   (c) Montrer alors qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et expliciter la matrice P. On ne cherchera pas à calculer P^{-1}.
4. La matrice A est-elle inversible ? La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie II

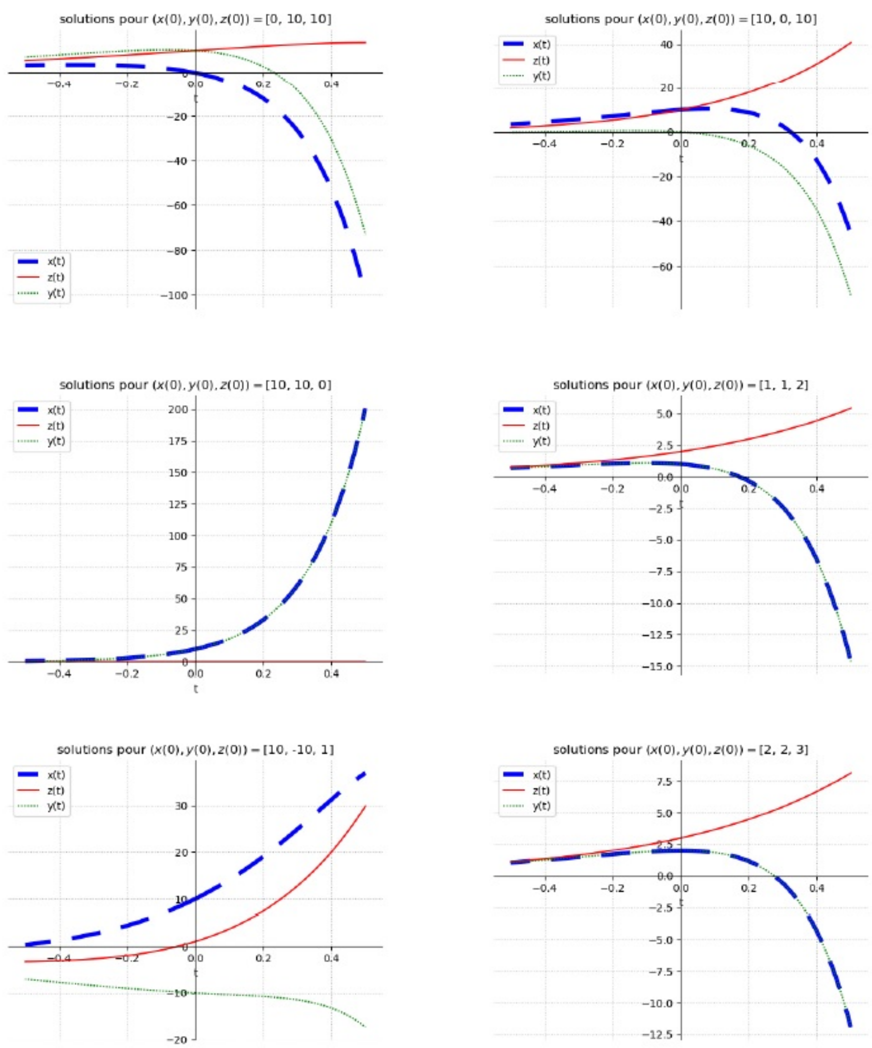
On considère le système différentiel suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On note pour tout réel t : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

1. En utilisant le module `spicy.integrate` de Python, on obtient le tracé suivant des solutions du système, en faisant varier les valeurs de $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.



   Que peut-on conjecturer quand $x(0) = y(0)$?

2. Montrer que pour tout réel t : $X'(t) = AX(t)$.
3. On note pour tout réel t : $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On admet que pour tout réel t, $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
   Montrer que pour tout réel t : $Y'(t) = BY(t)$.

4. (a) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle (E_1) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 6\varphi(t) \quad (E_1)$$

   (b) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle (E_2) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 2\varphi(t) \quad (E_2)$$

   (c) Soit c un réel.
   Montrer que la fonction $t \longmapsto cte^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle (E_3) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t} \quad (E_3)$$

   Déterminer toutes les solutions de (E_3).

5. En notant, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, montrer que γ est solution de (E_1), β est solution de (E_2) et α est solution de (E_3) pour un réel c bien choisi.

6. Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) = 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{cases}$$

7. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$ que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = \big((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)\big)e^{2t} + \big(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\big)e^{6t} \\ y(t) = \big((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(y_0 - x_0)\big)e^{2t} + \big(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\big)e^{6t} \\ z(t) = \big((x_0 - y_0)t + z_0\big)e^{2t} \end{cases}$$

8. Justifier la conjecture faite à la question II.1).

Partie I

1. On a les égalités :

$$\begin{aligned} rg(A-6I) &= rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \\ &= rg\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car $C_2 = -C_1$.
Comme les deux colonnes restantes ne sont pas colinéaires alors :

$$rg(A-6I) = 2$$

Par le théorème du rang, on a :

$$dim\ Ker(A-6I) + rg(A-6I) = 3$$

Ainsi, on a : $dim\ Ker(A-6I) = 1 \neq 0$ et donc 6 est une valeur propre de A et $dim\ E_6 = 1$.

2. Le calcul de U nous donne :

$$U = AV - 2V = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a ensuite :

$$AU = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2U$$

Comme $U \neq 0$, on peut en déduire que U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

3. (a) On part de la relation :

$$\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3 W = 0$$

où les $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
On a alors :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Par substitution dans L_1, on a : $2\lambda_1 - 4\lambda_1 - 2\lambda_1 = 0$ soit $\lambda_1 = 0$.
Ainsi, on a $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
On en déduit que (U, V, W) est libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; de plus, la famille a 3 éléments et $dim\ \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) Comme $AU = 2U$, $AV = U + 2V$ (par définition) et $AW = 6W$ (après calculs), on en déduit que :

$$B = mat_{(U,V,W)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(c) A et B représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes donc ces matrices sont semblables.
Ainsi, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base (U, V, W) (donc P est inversible), on a :

$$A = PBP^{-1}$$

où $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\star$ Comme B est triangulaire, on lit ses valeurs propres sur la diagonale et donc :

$$Sp(B) = Sp(f) = Sp(A) = \{2, 6\}$$

Comme $0 \notin Sp(A)$ alors A n'est pas inversible.

$\star$ On a déjà $dim\ E_6 = 1$; il nous faut trouver $dim\ E_2$. Pour cela, on peut utiliser la matrice B (car A et B sont semblables).
On a :

$$B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On a donc $rg(B - 2I) = rg(A - 2I) = 2$ (une colonne nulle et 2 colonnes non colinéaires) ; par le théorème du rang, on en déduit que $dim\ Ker(A - 2I) = 1 = dim\ E_2$.
Comme $dim\ E_2 + dim\ E_6 = 2 <$ taille de A alors A n'est pas diagonalisable.

Partie II

1. À travers les schémas proposés dans les cas où $x(0) = y(0)$, on peut conjecturer que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = y(t)$$

2. Il nous suffit de faire le produit matriciel $AX(t)$ pour le constater.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t)$$

Or, on sait que $P^{-1}AP = B$ et donc $P^{-1}A = BP^{-1}$.
Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = BP^{-1}X(t) = BY(t)$$

4. (a) On a l'équation différentielle linéaire homogène :

$$y' - 6y = 0 \quad (E_1)$$

Les solutions de (E_1) sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = Ce^{6t} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

(b) De même les solutions de (E_2) sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = De^{2t} \quad \text{où} \quad D \in \mathbb{R}$$

(c) Notons g cette fonction ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t} = ce^{2t} + 2g(t)$$

Ainsi, g est bien une solution de (E_3).
La résolution de l'équation homogène associée à (E_3) a été faite à la question II.4.b).
Ainsi, les solutions générales de (E_3) sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = De^{2t} + cte^{2t} \quad \text{où} \quad D \in \mathbb{R}$$

(somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée)

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $Y'(t) = BY(t)$ ce qui nous donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha'(t) = 2\alpha(t) + \beta(t) \\ \beta'(t) = 2\beta(t) \\ \gamma'(t) = 6\gamma(t) \end{cases}$$

Dès lors, α est bien solution de (E_3) (où $c = D$), β est solution de (E_2) et γ est solution de (E_1).

6. Avec la question précédente, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(t) = Ee^{2t} + Dte^{2t}$$

$$\beta(t) = De^{2t}$$

$$\gamma(t) = Ce^{6t}$$

On a ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} (E + Dt)e^{2t} \\ De^{2t} \\ Ce^{6t} \end{pmatrix}$$

On veut trouver les fonctions x, y, z et pour cela, on utilise la relation : $X(t) = PY(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
On trouve pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (E + Dt)e^{2t} \\ De^{2t} \\ Ce^{6t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(E + D + Dt)e^{2t} + Ce^{6t} \\ 2(E + Dt)e^{2t} + Ce^{6t} \\ (2(E + Dt) + D)e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a bien la réponse proposée :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = 2(E + D + Dt)e^{2t} + Ce^{6t} \\ y(t) = 2(E + Dt)e^{2t} + Ce^{6t} \\ z(t) = (2(E + Dt) + D)e^{2t} \end{cases}$$

où $C, D, E \in \mathbb{R}$.

7. On a ainsi :
$$\begin{cases} x_0 = x(0) = 2(E+D)+C \\ y_0 = y(0) = 2E+C \\ z_0 = z(0) = 2E+D \end{cases}$$
La résolution de ce système nous donne :
$$\begin{cases} C = \dfrac{x_0}{2} + \dfrac{y_0}{2} - z_0 \\[2ex] D = \dfrac{x_0}{2} - \dfrac{y_0}{2} \\[2ex] E = -\dfrac{x_0}{4} + \dfrac{y_0}{4} + \dfrac{z_0}{2} \end{cases}$$
En remplaçant les valeurs de C, D, E on trouve la solution donnée.

8. Lorsque $x_0 = y_0$, on trouve bien :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = y(t) = z_0 e^{2t} + (x_0 - z_0)e^{6t}$$