Étudier une fonction trigonométrique

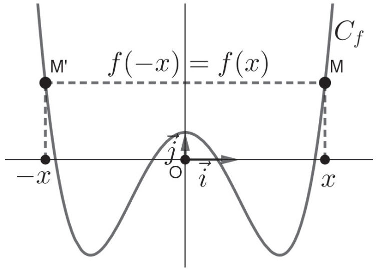
18

Quand on ne sait pas !

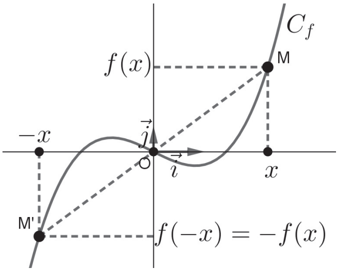
- Bien revoir les deux chapitres précédents sur les équations et inéquations trigonométriques ainsi que le chapitre sur le calcul des dérivées.
- Connaître les définitions d'une fonction paire, impaire et périodique ainsi que leurs interprétations graphiques :
  - f est paire si, et seulement si $f(-x) = f(x)$ pour tout x de D_f.

    C_f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  - f est impaire si, et seulement si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de D_f.

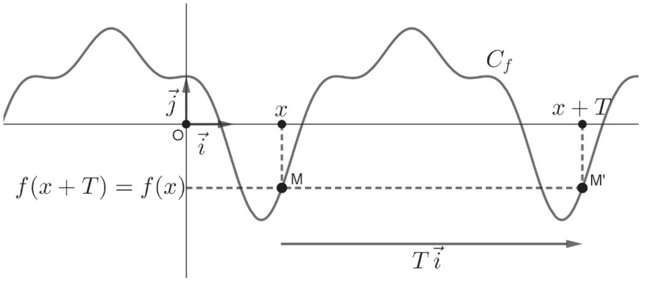
    C_f est alors symétrique par rapport à l'origine O du repère.
  - f est périodique de période T si et seulement si $f(x+T) = f(x)$ pour tout x de D_f. C_f est alors invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.



Fonction paire



Fonction impaire



Fonction T-périodique

Que faire ?

- Afin d'étudier la parité d'une fonction f, calculer $f(-x)$ et comparer l'expression obtenue à $f(x)$ ou $-f(x)$.

EXEMPLE 1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ est paire puisque pour tout réel x,

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = 3x^4 - 2x^2 + 5 = f(x).$$

EXEMPLE 2. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{3}{x} - 4x + x^3$ est impaire puisque pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \frac{3}{(-x)} - 4(-x) + (-x)^3 = -\frac{3}{x} + 4x - x^3 = -f(x).$$

- Afin d'étudier la périodicité d'une fonction f, se faire d'abord une idée de l'éventuelle période T à l'aide de la calculatrice graphique, puis calculer l'expression $f(x+T)$ et la comparer à $f(x)$.

EXEMPLE 3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x \sin x - 2\cos(2x)$ est π-périodique puisque pour tout réel x,

$$f(x+\pi) = \cos(x+\pi)\sin(x+\pi) - 2\cos(2(x+\pi))$$
$$f(x+\pi) = (-\cos x)(-\sin x) - 2\cos(2x+2\pi)$$
$$f(x+\pi) = \cos x \sin x - 2\cos(2x) = f(x).$$

- Il est possible de réduire l'intervalle d'étude d'une fonction :
  - si elle est paire (ou impaire), il suffit de l'étudier sur $[0\,;+\infty[$. Les variations sur $]-\infty\,;0]$ se retrouvent alors par symétrie.
  - si elle est périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T, par exemple $[0\,;T]$ ou $\left[-\dfrac{T}{2}\,;\dfrac{T}{2}\right]$.
  - si elle est à la fois périodique de période T et paire (ou impaire), il suffit de l'étudier sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{T}{2}\right]$. Les variations sur $\left[-\dfrac{T}{2}\,;0\right]$ se retrouvent par symétrie puis la périodicité fait le reste.

- Afin d'étudier les variations d'une fonction, procéder comme d'habitude :
  - Calculer la dérivée
  - Étudier le signe de cette dérivée, pour cela, après avoir éventuellement factorisé l'expression, étudier le signe de chaque facteur en résolvant une équation et une inéquation comme expliqué dans le chapitre précédent.

Conseils

- Utiliser sa calculatrice graphique afin de se faire une idée sur la parité, sur la périodicité ou sur les variations de la fonction, on pensera préalablement à régler la calculatrice en mode radian.
- Pour le calcul de $f(-x)$ ou de $f(x+T)$, attention à bien remplacer x par $(-x)$ ou par $(x+T)$ sans oublier les parenthèses qui peuvent être parfois nécessaires.

  EXEMPLE 4. La fonction définie par $f(x) = \cos(3x)$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$ puisque pour tout réel x,
  $$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3x) = f(x).$$
- Plus l'intervalle d'étude est petit, plus il est aisé d'étudier le signe de la dérivée.
- L'étape la plus importante est l'étude du signe de la dérivée, justifier donc bien celle-ci en s'appuyant sur des cercles trigonométriques que l'on représentera.

Exemple traité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{2}\cos x$.

1 Justifier pourquoi il suffit d'étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

2 Étudier les variations de f sur $[0\,;\pi]$ puis dresser son tableau de variations.

3 Représenter graphiquement C_f dans un repère orthogonal sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

SOLUTION

1 Pour cela, étudions la parité et la périodicité de f.

La fonction f est paire car pour tout réel x,
$$f(-x) = (\sin(-x))^2 - \sqrt{2}\cos(-x) = (-\sin x)^2 - \sqrt{2}\cos x$$
$$f(-x) = (\sin x)^2 - \sqrt{2}\cos x = f(x).$$
Elle est également périodique de période 2π car pour tout réel x,
$$f(x + 2\pi) = (\sin(x + 2\pi))^2 - \sqrt{2}\cos(x + 2\pi)$$
$$f(x + 2\pi) = (\sin x)^2 - \sqrt{2}\cos x = f(x).$$

Étant 2π -périodique, on peut l'étudier sur un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi\,;\pi]$. Enfin, la parité de f permet donc de l'étudier sur $[0\,;\pi]$.

2 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables. De plus, $f = u^2 - \sqrt{2} \times v$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \cos x$. Enfin, puisque $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$ on a

$$f'(x) = 2(\cos x)(\sin x)^1 - \sqrt{2} \times (-\sin x)$$
$$f'(x) = 2\cos x \sin x + \sqrt{2}\sin x$$
$$f'(x) = (\sin x)\left(2\cos x + \sqrt{2}\right).$$

Étudions le signe de chaque facteur.

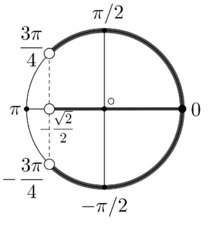
D'après le cercle trigonométrique, il est clair que dans l'intervalle $[0\,;\pi]$, $\sin x$ ne s'annule qu'en 0 et en π et $\sin x > 0$ sur $]0\,;\pi[$.

Pour étudier le signe de $2\cos x + \sqrt{2}$, il suffit de résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

$$2\cos x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k'\pi, \text{où } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dans l'intervalle $[0\,;\pi]$, il n'y a que la solution $\frac{3\pi}{4}$, obtenue par $k = 0$.

$$2\cos x + \sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \text{où } k \in \mathbb{Z}$$



Ainsi, dans l'intervalle $[0\,;\pi]$, on a $2\cos x + \sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow 0 \le x < \frac{3\pi}{4}$, obtenu par $k = 0$.

On peut alors dresser le tableau de signes suivant :

x	0		$3\pi/4$		π
$\sin x$	0	$+$		$+$	0
$2\cos x + \sqrt{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

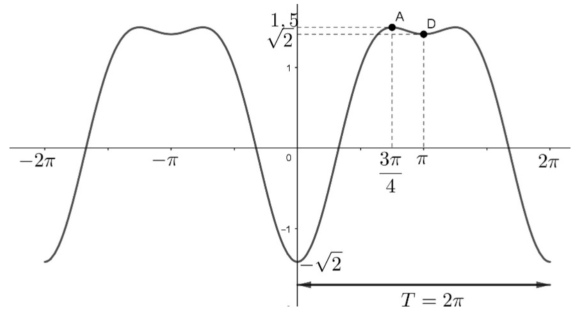
On en déduit alors le tableau de variations de :

x	0		$3\pi/4$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
f	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$1{,}5$	$\searrow$	$\sqrt{2}$

$$f(0) = (\sin 0)^2 - \sqrt{2}\cos 0 = 0 - \sqrt{2} \times 1 = -\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^2 - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{4} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(\pi) = (\sin \pi)^2 - \sqrt{2}\cos \pi = 0 - \sqrt{2} \times (-1) = \sqrt{2}.$$



Exercices

EXERCICE 18.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(4x)$.

1 Étudier la parité de f puis montrer que f est périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$.

2 Étudier les variations de f sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ puis dresser son tableau de variations.

3 Représenter graphiquement C_f dans un repère orthogonal sur $[-\pi ; \pi]$.

EXERCICE 18.2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\sin x)(\cos x)$.

1 Justifier pourquoi il suffit d'étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

2 Étudier les variations de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ puis dresser son tableau de variations.

3 Représenter graphiquement C_f dans un repère orthogonal sur $[-\pi\,;\pi]$.

EXERCICE 18.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$.

1 Justifier que f n'est ni paire ni impaire.

2 Justifier que f est 2π -périodique.

3 En admettant que pour tous réels a et b,

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 3\sin x(2\sin(2x) - 1)$.

4 Étudier les variations de f sur $[-\pi\,;\pi]$ puis dresser son tableau de variations.

5 Représenter graphiquement C_f dans un repère orthogonal sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 18.1

1 Pour tout réel X, $\sin(-X) = -\sin X$ et $\sin(X + 2\pi) = \sin X$.

2 $(\sin u)' = u'\cos u$.

EXERCICE 18.2

1 Pour tout réel x, $\sin(x + \pi) = -\sin x$ et $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

2 $(uv)' = u'v + uv'$ puis utiliser l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ afin de faire apparaître, par exemple, uniquement du $\cos^2 x$.

EXERCICE 18.3

1 Un contre-exemple suffit : choisir un réel x pour lequel $f(-x) \neq f(x)$ et un réel x pour lequel $f(-x) \neq -f(x)$.

3 $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $u(x) = \sin x$.
Enfin, on pourra factoriser $f'(x)$ puis poser $a = b = x$.

4 Étudier le signe de chaque facteur de $f'(x)$.

Exercice 18.1

1 La fonction f est impaire car pour tout réel x,

$$f(-x) = \sin(4(-x)) = \sin(-4x) = -\sin(4x) = -f(x).$$

Elle est également périodique de période $\frac{\pi}{2}$ car pour tout réel x,

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(4x + 2\pi) = \sin(4x) = f(x).$$

2 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. Comme $f = \sin u$ avec $u(x) = 4x$, $f'(x) = u'(x)\cos(u(x)) = 4\cos(4x)$. Pour étudier le signe de $\cos(4x)$, il suffit de résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

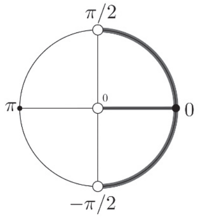
$$\cos(4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 4x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi, \text{où } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k'\pi}{2}, \text{où } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, il n'y a que la solution $\frac{\pi}{8}$, obtenue par $k = 0$.

$$\cos(4x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 4x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

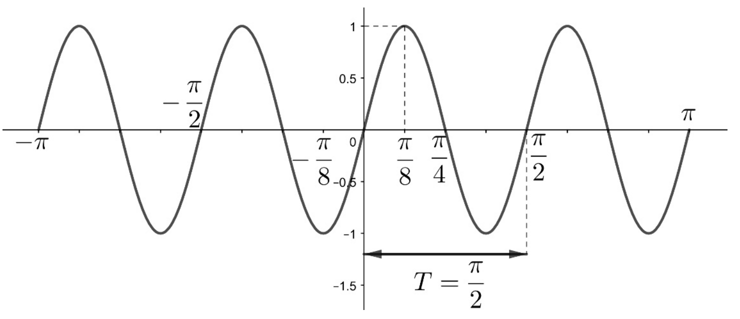


Ainsi, dans $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ on a $\cos(4x) > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{8}$, obtenu par $k = 0$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\pi/8$		$\pi/4$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3



Exercice 18.2

1 Pour cela, étudions la parité et la périodicité de f.

Cette fonction est impaire car pour tout réel x,

$$f(-x) = (\sin(-x))(\cos(-x)) = (-\sin x)(\cos x) = -f(x).$$

Elle est également périodique de période π car pour tout réel x,

$$f(x+\pi) = (\sin(x+\pi))(\cos(x+\pi)) = (-\sin x)(-\cos x)$$

$$f(x+\pi) = (\sin x)(\cos x) = f(x).$$

Étant π-périodique, on peut l'étudier sur un intervalle de longueur π comme $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. L'imparité de f permet donc de l'étudier sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

2 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

De plus, $f = uv$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \cos x$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$ d'où $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Pour étudier le signe de $f'(x)$, il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = 0$ (cette question a été traitée dans l'exercice **16.2b** de la fiche **16**) et l'inéquation