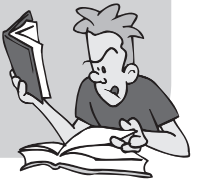
1 QU'EST-CE QU'UN NOMBRE COMPLEXE ?



- L'équation $x+2=0$ n'admet pas de solutions dans l'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$. Pourtant, elle admet une unique solution dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
- De même certaines équations n'ont pas de solution dans un ensemble mais en ont dans un ensemble plus grand. Par exemple, l'équation $x^2=3$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$ mais dans l'ensemble des réels elle en admet deux $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
- Considérons l'équation $x^2=-1$. Cette équation n'a pas de solution dans l'ensemble des réels car le carré d'un nombre réel est toujours positif. Nous allons construire un ensemble plus gros que $\mathbb{R}$ dans lequel cette équation admet des solutions.
- Appelons i l'une des solutions, ce sera notre premier nombre imaginaire ou nombre complexe. Autrement dit i vérifie la relation $i^2=-1$. L'autre solution s'obtient en remarquant que $(-i)\times(-i)=i\times i=-1$. Ainsi l'équation $x^2=-1$ admet deux solutions complexes i et $-i$.
- À partir de ce nombre imaginaire i , on peut construire l'ensemble des nombres complexes.

DÉFINITION

- On appelle ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres de la forme $z=x+iy$ avec x et y deux réels où i est un nombre vérifiant $i^2=-1$.
- Le réel x est appelé partie réelle de z , notée $\mathrm{Re}(z)$. Le réel y est appelé partie imaginaire de z , notée $\mathrm{Im}(z)$. Cette écriture est appelée forme algébrique de z.
- Ainsi $z=\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)$.
- Si $\mathrm{Im}(z)=0$ alors z est un réel.
- Si $\mathrm{Re}(z)=0$ alors z est un imaginaire pur.

TOP CHRONO

C'est l'interro !

Exercice 1.1 (4 pts) *10 min*

Dans chaque cas, préciser les parties réelles et imaginaires de chaque complexe.

1. $1-3i$
2. $2i+1$
3. $4i$
4. $1-\sqrt{2}$
5. $3-i$
6. $4i-1$
7. $\sqrt{3}+(1-\sqrt{2})i$
8. $\dfrac{1+2i}{3}$

Exercice 1.2 (4 pts) *15 min*

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

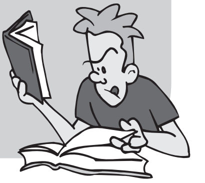
1. $z^2=-1$
2. $z^2=3$
3. $z^2=-4$
4. $1+4z^2=0$

SCORE

...... pts

2

COMMENT CALCULER AVEC DES COMPLEXES ?



On prolonge l'opération d'addition et de multiplication à $\mathbb{C}$ en n'oubliant pas que $i^2 = -1$.

PROPRIÉTÉ

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux complexes écrits sous forme algébrique.
Alors $z + z' = (x + x') + i(y + y')$ et $z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$.

Remarque : les formules ne sont pas à apprendre. Cette propriété n'est là que pour justifier que la somme et le produit de deux nombres complexes est bien un nombre complexe. En pratique, on développe et calcule comme avec des réels en utilisant la propriété $i^2 = -1$.

Exemple

Soit $a = 1 - 3i$ et $b = 2 + 2i$.
Alors $a + b = 1 - 3i + 2 + 2i = 1 + 2 - 3i + 2i = 3 - i$
et $a \times b = (1 - 3i) \times (2 + 2i) = 2 + 2i - 6i - 6i^2 = 2 - 4i + 6 = 8 - 4i$.

Remarque : Les formules des identités remarquables restent valables avec la forme algébrique.

TOP CHRONO

C'est l'interro !

Exercice 2.1 (10 pts) *20 min*

Dans chaque cas, écrire sous forme algébrique le résultat. On précisera la partie réelle et la partie imaginaire de chaque complexe.

1. $z_1 = 1 - 4i + 3(5 - 2i)$

2. $z_2 = i(i - 1) + 3i(1 + 2i)$

3. $z_3 = 2\left(1 - \sqrt{3}\right) + i(1 - i)$

4. $z_4 = (1 + 3i)^2 - 4i$

5. $z_5 = 6i - 3\left(\dfrac{1 + 4i}{2}\right)$

Exercice 2.2 (4 pts) *15 min*

On considère trois nombres complexes $a = 1 - 2i$, $b = 3i$ et $c = \dfrac{4i - 1}{3}$.
Dans chaque cas, on donnera le résultat sous forme algébrique.

1. a^2 **2.** $2a + 3b$ **3.** $a - 3c$ **4.** $ab - c$

Exercice 2.3 (6 pts) *20 min*

Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 = 8 - 6i$. On pose $Z = x + iy$.

1. Déterminer $\mathrm{Re}\left(Z^2\right)$ et $\mathrm{Im}\left(Z^2\right)$ en fonction de x et y.

2. a. Montrer que $Z^2 = 8 - 6i$ se ramène à $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ xy = -3 \end{cases}$.

b. En déduire que x est solution de $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

c. Déterminer les valeurs possibles de x.

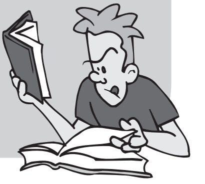
d. En déduire le nombre de solutions de $Z^2 = 8 - 6i$ et donner leurs formes algébriques.

SCORE

...... *pts*

3

COMMENT CALCULER L'INVERSE D'UN COMPLEXE ?



Définition

Soit $z = x + iy$ un complexe non nul. On appelle inverse de z le complexe défini par $z' = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}$.

Exemple

L'inverse de $1+3i$ est $\frac{1}{1+3i}$.

Cependant, ceci n'est pas la forme algébrique du complexe du fait de la présence du nombre imaginaire i au dénominateur.

Calculons $(1+3i)(1-3i)$:

$$\left(1+3i\right)\left(1-3i\right) = 1 - 3i + 3i - 3i \times 3i = 1 - 9i^2 = 1 + 9 = 10.$$

On remarque que le produit est alors un réel.

Ainsi pour écrire l'inverse d'un nombre complexe $z = x + iy$, on multiplie le numérateur et le dénominateur de $\frac{1}{z}$ par $x - iy$.

$$z' = \frac{1}{1+3i} = \frac{1 \times \left(1-3i\right)}{\left(1+3i\right)\left(1-3i\right)} = \frac{1-3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$$

d'après notre calcul précédent.

Ainsi $\mathrm{Re}(z') = \frac{1}{10}$ et $\mathrm{Im}(z') = -\frac{3}{10}$.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 3.1 (4 pts) *15 min*

Dans chaque cas, écrire l'inverse du nombre complexe sous forme algébrique.

1. $z_1 = 4 + \mathrm{i}$

2. $z_2 = 2 - 3\mathrm{i}$

3. $z_3 = 4\mathrm{i}$

4. $z_4 = 2\mathrm{i} - 2$

Exercice 3.2 (8 pts) *25 min*

Dans chaque cas, écrire le complexe sous forme algébrique.

1. $\dfrac{1+i}{3-2i}$

2. $\dfrac{4i}{2-i}$

3. $\dfrac{2i-3}{i}$

4. $\dfrac{2i(1+i)}{1-3i}$

Exercice 3.3 (6 pts) *15 min*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ et donner les solutions sous forme algébrique.

1. $z^2 = -3$

2. $3z + 5 - i = 5 + 3i$

3. $7z + 2i = iz - 1$

4. $\dfrac{2z+1}{3z-i} = 0$

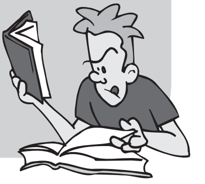
5. $\dfrac{z-1}{2z+i} = 2 + 2i$

6. $\dfrac{iz}{1-iz} = 2$

SCORE

...... *pts*

4 QU'EST-CE QUE LE CONJUGUÉ D'UN COMPLEXE ?



Définition

Soit $z = x + iy$ un complexe écrit sous forme algébrique. On appelle conjugué de z le complexe $\overline{z}$ définie par $\overline{z} = x - iy$.

Exemple

$\overline{1+3i} = 1 - 3i$ et $\overline{i} = -i$.

Propriété

Soit z et z' deux complexes.

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Ces propriétés permettent de calculer plus rapidement le conjugué dans le cas où le complexe n'est pas sous forme algébrique.

Exemple

$\overline{(1+3i)(-2i)} = \overline{(1+3i)}\,\overline{(-2i)} = (1-3i)(2i)$

$\overline{\left(\dfrac{i}{1+i}\right)} = \dfrac{\overline{i}}{\overline{1+i}} = \dfrac{-i}{1-i}$

Soit z un complexe on calcule $z' = 2z - i\overline{z}$. On peut alors déterminer la forme algébrique de z' en remplacer z par $x + iy$. On a alors $\overline{z} = x - iy$. On obtient $z' = 2(x+iy) - i(x - iy) = 2x + 2iy - ix + i^2 y = 2x + 2iy - ix - y = 2x - y + i(2y - x)$.

En particulier, $\text{Re}(z') = 2x - y$ et $\text{Im}(z) = 2y - x$.

TOP CHRONO

C'est l'interro !

Exercice 4.1 (4 pts) *10 min*

Dans chaque cas, calculer le conjugué sans modifier l'écriture donnée.

1. $3i-\sqrt{2}$

2. $1-\sqrt{3}+4i$

3. $5i(1-i)$

4. $\dfrac{1+3i}{1-2i}$

Exercice 4.2 (6 pts) *20 min*

Soit z un complexe et $\bar{z}$ son conjugué. Dans chaque cas, exprimer le conjugué du complexe en fonction de z et $\bar{z}$.

1. $z_1=2z+(1-3i)\bar{z}$

2. $z_2=\bar{z}+z$

3. $z_3=\dfrac{1-iz}{3\bar{z}}$

4. $z_4=4iz-3\bar{z}$

Exercice 4.3 (6 pts) *20 min*

Soit $z=x+iy$ un complexe sous forme algébrique. Dans chaque cas, écrire le complexe donné sous forme algébrique en fonction de x et y :

1. $z_1=(1-i)z+2\bar{z}$

2. $z_2=z\bar{z}$

3. $z_3=\dfrac{1-z}{1+\bar{z}}$

4. $z_4=3iz+(1-4i)\bar{z}$

SCORE

...... pts