Chapitre 1

Polynômes

Synthèse de cours

1. Généralité

Définition 1.1 – Monôme

Un **monôme à indéterminé** x est une expression de la forme ax^n avec a est un réel non nul et n un entier naturel, le **degré** du monôme.

Exemple 1. Comment savoir si une expression est un monôme ?
Laquelle des expressions suivantes définit-elle un monôme ?

$$\sqrt{2}x^5 \qquad 3\sqrt{x} \qquad x+2x^2 \qquad -2x^{-\frac{3}{2}} \qquad 4x^{-2} \qquad -2x^3$$

Solution de l'exemple 1.

Les expressions $\sqrt{2}x^5$ et $-2x^3$ sont des monômes de degré 5 et 3.
Les autres ne sont pas des monômes. En effet,

☞ La puissance de x dans $4x^{-2}$ est un entier négatif.

☞ Bien que les puissances de x soient des entiers naturels, $x+2x^2$ n'est pas un monôme. C'est un binôme.

☞ Dans l'expression $3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$ la puissance de x vaut $\frac{1}{2}$ qui n'est pas un entier. De même, la puissance de x dans $-2x^{-\frac{3}{2}}$ vaut $-\frac{3}{2}$.

Commentaire

Le mot *mono* signifie *seul*. On en déduit alors le sens de *binôme*, de *trinôme* etc. Pour dire qu'il y en a plusieurs (dont un seul ou aucun !), on parle de *polynôme*. Le terme « polynôme » a l'avantage d'inclure toutes les possibilités. Par exemple, le mot « trinôme du second degré » exclut l'expression $x^2 - 1$ qui est un binôme du second degré.

Dans la suite, on parlera seulement de polynôme. Par exemple, pour $P(x) = k, k \neq 0$, P est un polynôme constant de degré 0. Pour $P(x) = ax + b, a \neq 0$, P est un polynôme du premier degré et pour $P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, P est un polynôme du seconde degré.

Définition 1.2 – Polynôme

Un **polynôme de degré** n, $n \in \mathbb{N}$ est une expression de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Pour k allant de 0 à n, les réels a_k sont appelés **coefficients** de degré k du polynôme P.

⚠ Par convention, le degré du polynôme nul, $P(x) = 0$ est égal à $-\infty$.

Commentaire

Dans les polynômes, l'indéterminé x n'est pas spécifié par un quantificateur.

Si P est polynôme, $P(x)$ désigne la valeur de P en x et non l'image par P de x.

Exemple 2. Comment récupère-t-on les coefficients ?
Donner le degré et les coefficients du polynôme P pour :
$P(x) = -3x^2$ $\quad$ $P(x) = 2 - 3x^3$ $\quad$ $P(x) = 2x - 1$ $\quad$ $P(x) = -2x^2 + 3x + 1$

Méthode – Récupérer les coefficients d'un polynôme

- ☞ On commence par déterminer le degré du polynôme : la puissance la plus élevée des x. Si le degré vaut n, on doit avoir $(n+1)$ coefficients : tous les coefficients des expressions en x^k, k allant de 0 à n.
- ☞ Les coefficients des x^k qui ne figurent pas dans l'expression sont nuls.

Solution de l'exemple 2.

- ☞ Pour $P(x) = -3x^2$. C'est un polynôme du second degré. On doit avoir 3 coefficients : le coefficient du second degré noté a_2, celui du premier degré a_1 et le coefficient du degré 0, ce qui correspond à la constante noté a_0.

$$\boxed{\text{Les coefficients de } -3x^2 \text{ sont } a_2 = -3,\ a_1 = 0 \text{ et } a_0 = 0}$$

- ☞ Pour $P(x) = 2 - 3x^3$. Le degré de P vaut 3.

$$\boxed{\text{Les coefficients de } 2 - 3x^3 \text{ sont } a_3 = -3,\ a_2 = 0,\ a_1 = 0 \text{ et } a_0 = 2}$$

☞ Pour $P(x) = 2x - 1$. Le degré de P vaut 1.

$$\boxed{\text{Les coefficients de } 2x - 1 \text{ sont } a_1 = 2 \text{ et } a_0 = -1}$$

☞ Pour $P(x) = -2x^2 + 3x + 1$. Le degré de P vaut 2.

$$\boxed{\text{Les coefficients de } -2x^2 + 3x + 1 \text{ sont } a_2 = -2,\ a_1 = 3 \text{ et } a_0 = 1}$$

Propriété 1.1 – Égalité de deux polynômes (PROPRIÉTÉ D'IDENTIFICATION)

Deux polynômes sont identiques si et seulement si les coefficients de mêmes degrés sont égaux.

DÉMONSTRATION

On admet cette propriété.

Exemple 3. Calculer les coefficients d'un polynôme « par identification ».
Soit $P(x) = 6x^2 - 5x - 6$. Calculer les réels a et b pour que $P(x) = (3x + 2)(ax + b)$.

Solution de l'exemple 3.

Par une double distribution :

$$(3x + 2)(ax + b) = 3ax^2 + 3bx + 2ax + 2b$$
$$(3x + 2)(ax + b) = 3ax^2 + (2a + 3b)x + 2b$$

Par identification, l'égalité $6x^2 - 5x - 6 = 3ax^2 + (2a + 3b)x + 2b$ donne :

$$\begin{cases} 6 & = 3a \\ -5 & = 2a + 3b \\ -6 & = 2b \end{cases}$$

Ce qui donne $a = 2$ et $b = -3$. Par conséquent :

$$\boxed{P(x) = (3x + 2)(2x - 3)}$$

Définition 1.3 – Racine d'un polynôme

Un réel α est une **racine** d'un polynôme P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

Exemple 4. Calculer les racines ou vérifier qu'un réel est une racine.

1. Soit P le polynôme défini par $P(x) = \frac{3}{4}x - \frac{5}{3}$.
   Calculer la racine de P.
2. Soit P le polynôme défini par $P(X) = 25 - x^2$.
   Calculer les racines de P.
3. Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35$.
   Vérifier que 7 est une racine de P. A-t-on une autre racine de P ?

Méthode – Chercher une ou les racines d'un polynôme

Chercher une racine ou les racines d'un polynôme P revient à résoudre l'équation $P(x) = 0$.

☞ Si P est un polynôme du premier degré, de la forme $ax+b, a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, alors P admet une seule racine : $\alpha = -\dfrac{b}{a}$;

☞ Si P est un polynôme de degré supérieur ou égal à 2, il faut suivre d'autres méthodes que l'on verra dans la suite. Mais, dans le cas où $P(x) = x^2 - a$:

- Si $a < 0$, P n'a aucune racine car $x^2 - a = 0$ n'a aucune solution ;
- Si $a = 0$, P admet une seule racine, $x = 0$;
- Si $a > 0$, P a deux racines : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

⚠ Le nombre de racines est inférieur ou égal au degré.

Solution de l'exemple 4.

1. Si $P(x) = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{3}$, alors la racine de P est la solution de l'équation $\dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{3} = 0$; si cette solution existe.

   On a $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}}$. Ce qui donne $x = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{20}{9}$.

$$\boxed{\text{Le réel } \alpha = \frac{20}{9} \text{ est la seule racine de } P}$$

2. Si $P(x) = 25 - x^2$, alors les racines de P sont les solutions de l'équation du second degré $25 - x^2 = 0$. Ce qui donne $x = \pm 5$.

$$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } -5 \text{ et } 5}$$

3. Si $P(x) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35$, on a $P(7) = 7^3 - 3 \times 7^2 - 33 \times 7 + 35 = 0$.

   Donc, 7 est une racine de P.

   On peut conjecturer que 1 est une racine de P. En effet, la somme des coefficients est nulle. Or $P(1)$ vaut la somme des coefficients, soit $P(1) = 1 - 3 - 33 + 35$.

$$\boxed{\text{Les réels 7 et 1 sont des racines de } P}$$

L'étude de polynôme s'intéresse plus particulièrement à la factorisation. La proposition suivante donne une équivalence entre la racine et la factorisation.

Propriété 1.2 – PROPRIÉTÉ DE FACTORISATION

Un réel α est une racine d'un polynôme P de degré n si et seulement si il existe un polynôme Q de degré $(n-1)$ tel que : $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

Commentaire

On proposera une démonstration dans le cas où $n = 2$.

En effet, la factorisation d'une expression de la forme $x^n - a^n, n \geq 3$ n'est pas au programme. En outre, la procédure de la démonstration pour le cas général est la même que celle du cas où $n = 2$.

Pour ceux qui souhaitent approfondir, voici des factorisations de $x^n - a^n, n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
n = 1 &: \quad x - a &&= (x-a)\\
n = 2 &: \quad x^2 - a^2 &&= (x-a)(x+a)\\
n = 3 &: \quad x^3 - a^3 &&= (x-a)\left(x^2 + ax + a^2\right)\\
n = 4 &: \quad x^4 - a^4 &&= (x-a)\left(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3\right)\\
&\quad\vdots && \vdots\\
n = n &: \quad x^n - a^n &&= (x-a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + x^{n-k}a^{k-1} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Remarquer que la somme de la puissance de x et celle de a dans le deuxième facteur vaut toujours $n-1$: $(n-1)+0$, puis $(n-2)+1$ puis ... $(n-k)+(k-1)$.....$1+(n-2)$ et enfin $0+(n-1)$.

Démonstration

Soit P un polynôme du second degré.

Alors, il existe trois réels a, b c avec $a \neq 0$ tels que : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

$\Rightarrow$) : **suffisance**. Soit α une racine de P.
Par définition, $P(\alpha) = 0$. Donc, $P(x) - P(\alpha) = P(x)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
P(x) &= ax^2 + bx + c - \left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right)\\
P(x) &= a(x^2 - \alpha^2) + b(x-\alpha) + (c-c)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule d'identité remarquable $\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, on a :

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\underline{(x-\alpha)}(x+\alpha) + b\underline{(x-\alpha)}\\
P(x) &= \underline{(x-\alpha)}[a(x+\alpha) + b]
\end{aligned}$$

En posant $Q(x) = ax + a\alpha + b$, on obtient un polynôme Q de degré 1 tel que :

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

$\Leftarrow$) : **nécessité.** Si $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$, alors $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0 \times Q(\alpha) = 0$. Ce qui montre que $P(\alpha) = 0$. Donc, α est une racine de P.

Exemple 5. Factoriser un polynôme à partir des informations sur les racines.
Soit $P(x) = -3x^2 + 5x + 12$. Vérifier que 3 est une racine de P puis factoriser $P(x)$.

Solution de l'exemple 5.

La valeur de P en 3 vaut $P(3) = -3 \times (3)^2 + 5 \times 3 + 12 = 0$.
Donc, 3 est une racine de P. Comme le polynôme P est du second degré, alors par la propriété de factorisation, il existe un polynôme Q de degré 1 tel que :

$$P(x) = (x-3) \times Q(x)$$

Or, un polynôme de degré 1 peut s'écrire sous la forme $ax + b$ avec a un réel non nul et b un réel quelconque. Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)(ax+b) \\ P(x) &= ax^2 + (b-3a)x - 3b \end{aligned}$$

Par identification, les réels a et b sont les solutions du système d'équations linéaires $\begin{cases} -3 & = a \\ 5 & = b - 3a \\ 12 & = -3b \end{cases}$. Ce qui donne $a = -3$ et $b = -4$. Par conséquent :

$$\boxed{P(x) = -(x-3)(3x+4)}$$

2. Polynôme du second degré

Définition 1.4 – Polynôme du second degré

Un **polynôme du second degré** P peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c, a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$$

Commentaire

On a vu en classe de seconde qu'une expression du second degré peut s'écrire :
- *forme développée* : de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$;
- *forme canonique* : de la forme $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$;
- *forme factorisée* : de la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$ (éventuellement).

Propriété 1.3 – Forme canonique d'un polynôme du second degré

Soit P un polynôme du second degré. Alors,

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Démonstration

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. Comme $a \neq 0$, alors on peut écrire :

$$P(x) = \underline{\mathbf{a}}x^2 + \underline{\mathbf{a}}\frac{b}{a}x + \underline{\mathbf{a}}\frac{c}{a}.$$

En factorisant par a, on obtient

$$P(x) = \underline{\mathbf{a}}\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \qquad \text{(P)}$$

Comme $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ alors :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$

Par la formule d'identité remarquable :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

L'égalité (P) permet d'obtenir :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c \times 4a}{a \times 4a}\right]$$

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Ce qui montre que que $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.

Définition 1.5 – Discriminant

Soit P un polynôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c, a \in \mathbb{R}^*, b, c \in R$. Le **discriminant** de P est défini par le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Exemple 6. Récupérer les coefficients avant de calculer Δ.
Calculer le discriminant Δ de chacun des polynômes suivants :
$P(x) = x^2 - x + 1$ $\quad$ $P(x) = 40 - 21x + 2x^2$ $\quad$ $P(x) = 16x + 8x^2 + 64$

Solution de l'exemple 6.

⚠ Il faut bien vérifier la puissance de x avant de récupérer les coefficients. Le polynôme n'est pas nécessairement rangé dans l'ordre des puissances de x.

☞ $P(x) = x^2 - x + 1$.
On a $a = 1, b = -1$ et $c = 1$.Donc, $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.

☞ $P(x) = 40 - 21x + 2x^2$.
On a $a = 2$, $b = -21$ et $c = 40$. Donc, $\Delta = (-21)^2 - 4 \times 2 \times 40 = 121$.

☞ $P(x) = 16x + 8x^2 - 64$.
On a $a = 8$, $b = 16$ et $c = -64$. Donc, $\Delta = (16)^2 - 4 \times 8 \times (-64) = 2304$.

Propriété 1.4 – Existence de racine pour un polynôme du second degré

Soit P un polynôme du second degré. Alors :

1. Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$, P admet deux racines distinctes ;
2. Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$, P admet une racine double ;
3. Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$, P n'admet aucune racine.

Commentaire

Soit un polynôme P. On sait que si α est une racine de P alors il existe un polynôme Q de degré égal au degré de P moins 1 tel que :

$$P(x) = (x - \alpha)\,Q(x)$$

Si α est également une racine de Q on dit que α est une **racine double** de P. Il existe alors un polynôme R de degré égal au degré de P moins deux tel que :

$$P(x) = (x - \alpha)^2\,R(x)$$

Si α est également une racine de R, on parle de **racine triple**. Dans le cas général, on parle de **racine de multiplicité** k où k est un entier compris entre 1 et le degré de P.

Par exemple, si $P(x) = (x-2)^2(x+1)^3$ alors 2 est une racine de multiplicité 2 alors que -1 est une racine de multiplicité 3.