Exercice 10.17 (Tétraèdre équilatère).
Soit ABCD un tétraèdre dont les arêtes sont égales. Les points A et C sont équidistants des extrémités du segment BD, donc ils appartiennent au plan médiateur de ce segment. Par conséquent, les arêtes AC et BD sont orthogonales.

Exercice 10.18 (Trièdre trirectangle).
Les droites (OO') et (OA) sont toutes deux orthogonales à la droite (BC), donc la droite (BC) est orthogonale au plan (OO'A). Il en résulte que les droites (BC) et (O'A) sont perpendiculaires. Le raisonnement est analogue pour les deux autres couples de droites.

Exercice 10.19 (Tétraèdre orthocentrique).
Soit Π le plan contenant les droites (AA') et (BB'). La droite (AA') est orthogonale au plan (BCD), donc elle est orthogonale à la droite (CD). On prouve de même que la droite (BB') est orthogonale à la droite (CD). La droite (CD) est donc orthogonale à deux droitessécantes du plan Π, ce qui prouve qu'elle est orthogonale à ce plan.
La droite (AB) est contenue dans le plan Π. Or la droite (CD) est orthogonale au plan Π d'après ce qui précède. Donc la droite (CD) est orthogonale à la droite (AB).

Exercice 10.20.
Soit $Oxyz$ un trièdre. Au besoin en le renommant, on peut supposer que $\widehat{xOy}$ est le plus grand angle. Par conséquent, on ne peut avoir $\widehat{xOz} > \widehat{xOy} + \widehat{yOz}$ ou $\widehat{yOz} > \widehat{xOy} + \widehat{xOz}$. Il reste à démontrer qu'on ne peut avoir $\widehat{xOy} > \widehat{xOz} + \widehat{zOy}$.
Notons Otla demi-droite située à l'intérieur de $\widehat{xOy}$, telle que$\widehat{xOt} = \widehat{xOz}$. Soient A un point de la demi-droite Ox, et B un point de la demi-droite Oy. Alors la demi-droite Ot coupe le segment ABen un point D. Soit C le point de la demi-droite Oz tel que$OC = OD$.
Les triangles OAD et OAC sont égaux, donc $AD = AC$, d'où$BD = AB - AD = AB - AC$. Or, l'inégalité triangulaire dans ABC donne $AB - AC < BC$. Donc $BD < BC$.
Les triangles BOD et BOC ont le côté OB en commun, et les côtés OD et OC égaux, donc les angles $\widehat{BOD}$ et $\widehat{BOC}$ sont dans le même ordre que les côtés opposés BD etBC. On en déduit que $\widehat{BOD} < \widehat{BOC}$, c'est-à-dire $\widehat{xOy} - \widehat{xOt} < \widehat{zOy}$, d'où $\widehat{xOy} < \widehat{xOz} + \widehat{zOy}$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 12.42.
Choisir deux points A et B sur la droite d, tracer le cercle de centre M de rayon AB et le cercle de centre B de rayon AM. Soit N le point d'intersection de ces cercles tel que M et N sont du même côté de la droite (MB). Le quadrilatère ABNM est un parallélogramme, et par conséquent la droite (MN) est parallèle à la droite d.

Exercice 12.43.
Soit O_2t la demi-droite située du même côté de la droite d que O_2x_2 telle que les droites (O_2t) et (O_2x_2) sont parallèles. Alors $\widehat{O_1O_2t} + \widehat{O_2O_1x_1} = \pi$. Par conséquent, $\widehat{O_1O_2x_2} < \widehat{O_1O_2t}$, ce qui prouve que la demi-droite O_2x_2 est à l'intérieur de l'angle $\widehat{O_1O_2t}$. D'après l'axiome des parallèles, les droites $(O_1x_1)\ et\ (O_2x_2)$ sont sécantes. Le point d'intersection est sur la demi-droite d'origine O_2 contenue dans le demi-plan bordé par (O_2t) contenant (O_1x_1), à savoir la demi-droite O_2x_2. Par suite, le point d'intersection est dans le demi-plan bordé par d contenant O_2x_2, donc sur la demi-droite O_1x_1.

Exercice 12.44.
Soit A' le pied de la bissectrice issue de A. On a :

$$\widehat{BIA'} = \pi - \widehat{BIA} = \widehat{BAI} + \widehat{ABI} = 1/2\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$$
$$\widehat{CIA'} = \pi - \widehat{CIA} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = 1/2\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right)$$

En sommant les deux égalités on obtient :

$$\widehat{BIC} = 1/2\,\widehat{BAC} + 1/2\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA}\right) = 1/2\,\widehat{BAC} + \pi/2$$

Exercice 12.45.

1. Supposons la droite (OM) non sécante avec le plan Π, alors la direction de la droite (OM) est contenue dans la direction du plan Π, qui est aussi la direction du plan Π'. Puisque la droite (OM) et le plan Π' ont le point O en commun, on en déduit que le plan Π' contient la droite (OM) (proposition 12.9), en contradiction avec les hypothèses. On en conclut que la droite (OM) est sécante avec le plan Π.
2. Si A, B, C sont trois points alignés ayant pour images respectives A', B', C', alors les points A', B', C' sont alignés sur la droite d'intersection des plans (OAB) et Π. Si de plus B est entre A et C, alors on vérifie aisément grâce à l'axiome de Pasch que B' est entre A' et C'. Ainsi l'ordre est conservé.
   Un faisceau de droites concourantes un point non situé sur Π' a pour image un faisceau de droites concourantes. Un faisceau de droites concourantes un point situé sur Π' a pour image un faisceau de droites parallèles. Un faisceau de droites parallèles dont la direction n'est pas contenue dans la direction de Π' a pour image un faisceau de droites concourantes, privées du point de concours. Un faisceau de droites parallèles dont la direction est contenue dans la direction de Π' a pour image un faisceau de droites parallèles.
3. Commençons par étudier le cas où les triangles ABC et A'B'C' ne sont pas coplanaires. Dans ce cas, si deux côtés homologues sont sécants, le point d'intersection est sur la droite d'intersection des plans (ABC) et (A'B'C'), et si deux côtés homologues ont la même direction, alors, d'après le théorème du toit, c'est aussi la direction de la droite d'intersection des plans (ABC) et (A'B'C') lorsqu'elle existe. On en déduit le théorème de Desargues lorsque les triangles ABC et A'B'C' ne sont pas coplanaires. S'ils sont coplanaires, on introduit un triangle auxiliaire A''B''C'' de la façon suivante.Soit S un point n'appartenant pas au plan des triangles, soit Ω un point de la droite (OS) si les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en O, de la droite passant par O de même direction que AA'), (BB'), (CC') si celles-ci ont la même direction, et tel que les droites (ΩA) et (SA') sont sécantes en A'', les droites (ΩB) et (SB') sont sécantes en B'',les droites (ΩC) et (SC') sont sécantes en C''. Les triangles ABC et A''B''C'' ne sont pas coplanaires, et vérifient les hypothèses du théorème de Desargues. Par conséquent ils en vérifient les conclusions. Les triangles ABC et A'B'C' sont respectivement les images des triangles ABC et A''B''C'' par la perspective de centre S. Puisque la perspective conserve les faisceaux (question 2), on en déduit que les triangles ABC et A'B'C' vérifient les hypothèses du théorème de Desargues.
4. Soit M' une autre position de M, les triangles ONN' et AMM' vérifient la configuration de Desargues car les droites (OA), (MN) et (M'N') sont parallèles. Comme les droites (NN') et (MM') sont parallèles, on en déduit que la droite (II') est parallèle à (MM'). Le lieu cherché est donc une demi-droite parallèle à la droite (Ox).

Exercice 12.46.
Soit ABCD un parallélogramme. Notons d_A la bissectrice intérieure de l'angle en A, et d_B la bissectrice intérieure de l'angle en B. Raisonnons sur les angles de droites :

$$2(d_A, d_B) = 2\big(d_A, (AB)\big) + 2\big((AB), d_A\big) = \big((AD), (AB)\big) + \big((AB), (BC)\big) = \pi$$

Par conséquent, les bissectrices de deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont perpendiculaires.

Exercice 12.47.
Par chaque point on trace la parallèle à la droite joignant les deux autres. C'est la propriété de la droite des milieux qui assure la validité de la construction.

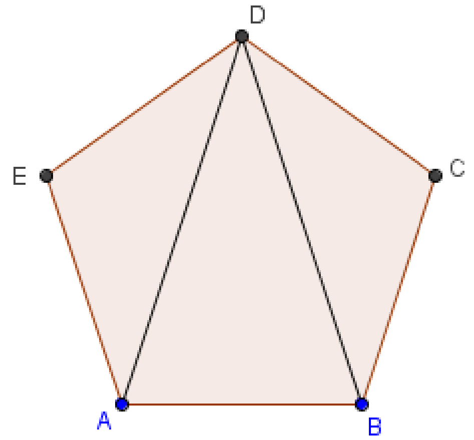
Exercice 12.48.
On démontre facilement que pour un parallélépipède rectangle, le plan médiateur d'un côté est aussi le plan médiateur des côtés ayant la même direction, et par suite un plan de symétrie du parallélépipède. Comme il y a trois directions de côtés, il y a trois plans de symétrie.

Exercice 12.49 (Quadrilatère des milieux).
Grâce à la propriété de la droite des milieux, on démontre que les côtés opposés du quadrilatère des milieux sont parallèles à la même diagonale du quadrilatère initial. Le quadrilatère des milieux est donc un parallélogramme. Si de plus le quadrilatère initial est un parallélogramme, alors il a le même centre que le quadrilatère des milieux. Réciproquement, soit IJKL un parallélogramme de centre O. Grâce à la méthode de l'exercice 12.47, construisons un triangle ABC tel que les milieux respectifs de AB, BC, CA sont I, J, O. Soit D le symétrique de B par rapport à O. Alors ABCD est un parallélogramme ayant pour parallélogramme des milieux IJKL.

Exercice 12.50 (Tétraèdre équifacial).
Grâce à la propriété de la droite des milieux, on démontre que les quadrilatères IKJL, IMJN et KNLM sont des losanges. Soit O le milieu de IJ, alors O est le centre de ces trois losanges. Par conséquent, les droites (IJ), (KL), (MN) sont concourantes en O. Par ailleurs, puisque les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN). Or, la droite (MK) est parallèle à la droite (AB) d'après la propriété de la droite des milieux. Donc les droites (IJ)et (AB) sont perpendiculaires. On en déduit que (IJ) est la médiatrice de AB dans le plan (ABJ), ce qui prouve que O est équidistant de A et B. On prouve de façon analogue que O est équidistant des autres sommets du tétraèdre ABCD. On en conclut que O est le centre de la sphère passant par les points A, B, C, D.

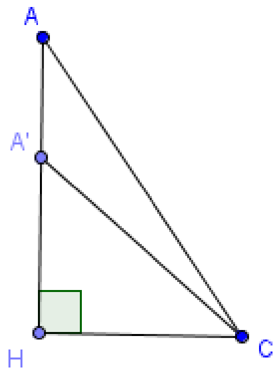
Exercice 12.51 (Solides de Platon).

<u>Lemme</u> : l'angle au sommet d'un polygone régulier à n côtés mesure $2\frac{n-2}{n}$ droits.



*Preuve.*Il y a n-3 diagonales qui partent d'un sommet donné, donc n-2 triangles dans lesquels la somme des mesures des angles est égale à 2 droits. Mais cette somme est aussi égale à la somme des mesures des angles aux sommets du polygone, qui sont égaux et au nombre de n.

<u>Lemme</u> : soit ABC un triangle n'ayant pas d'angle obtus, soit A' le projeté orthogonal de A sur un plan contenant B et C distinct du plan (ABC), alors $\widehat{BAC} < \widehat{BA'C}$.



Preuve. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans ABC, c'est aussi le pied de la hauteur issue de A' dans A'BC d'après la propriété des trois perpendiculaires. Le triangle AA'H est rectangle en A' donc A'H<AH. Par conséquent, lorsqu'on rabat le triangle A'HC sur le triangle AHC, le point A' vient sur le segment AC (figure ci contre). On en déduit que :

$$\widehat{HAC} < \widehat{HA'C}$$

En procédant de même avec les triangles AHB et A'HB on obtient : $\widehat{HAB} < \widehat{HA'B}$

En sommant on obtient l'inégalité recherchée.

<u>lemme</u> : la somme des mesures des angles au sommet d'un polyèdre régulier est strictement inférieure à 4 droits.

Preuve. Il suffit de projeter sur un plan bien choisi et d'appliquer le lemme précédent.

<u>Proposition</u> : un polyèdre régulier a en chaque sommet au plus 5 triangles équilatéraux, ou au plus 3 carrés, ou au plus 3 pentagones réguliers.

Preuve. Si p est le nombre de polygones à un sommet, et n le nombre de côtés de chaque face, alors

$$p \times 2\frac{n-2}{n} < 4$$

D'où

$$n < \frac{2p}{p-2}$$

On a $p \geq 3$.
Si $p = 3$, alors $n < 6$.
Si $p = 4$, alors $n < 4$.
Si $p = 5$, alors $n < 10/3$.
Si $p \geq 6$ alors $n < 3/2$, impossible.

Exercice 12.52.
Soit ρ une rotation d'axe d, et γ un glissement d'axe d. Alors $\gamma\rho\gamma^{-1}$ est une isométrie directe de l'espace fixant point par point d, c'est donc une rotation d'axe d. De plus, si δ est un dièdre d'arête d, et si δ' est son image par ρ, alors $\gamma\rho\gamma^{-1}$ envoie δ sur δ'. Par conséquent $\gamma\rho\gamma^{-1}$ a le même angle que ρ, d'où $\gamma\rho\gamma^{-1} = \rho$, ce qui prouve que $\gamma\rho = \rho\gamma$.

Exercice 12.53.
Soit ρ une rotation d'axe d, et σ une symétrie par rapport à un plan Π perpendiculaire à d. Alors $\sigma\rho\sigma^{-1}$ est une isométrie directe de l'espace fixant point par point d, c'est donc une rotation d'axe d. De plus, si δ est un dièdre d'arête d, et si δ' est son image par ρ, alors $\sigma\rho\sigma^{-1}$ envoie δ sur δ'. Par conséquent $\sigma\rho\sigma^{-1}$ a le même angle que ρ, d'où $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho$, ce qui prouve que $\sigma\rho = \rho\sigma$.

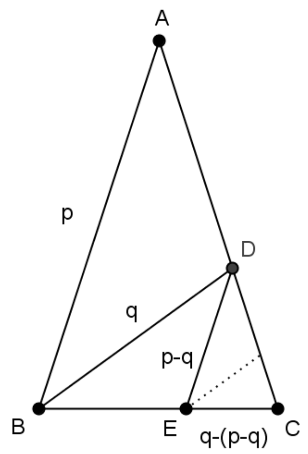
Exercice 12.54.
Soit γ un glissement d'axe d, et σ une symétrie par rapport à un plan Π contenant d. La restriction de σ à Π étant l'identité, $\gamma\sigma\gamma^{-1}$ et σ coïncident sur Π. Comme ce sont deux isométries directes, on en déduit que $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \sigma$, ce qui prouve que $\gamma\sigma = \sigma\gamma$.

Exercice 15.22.
On veut construire au compas seul le symétrique d'un point M par rapport à un point O. Tracer le cercle de centre O passant par M, reporter successivement trois cordes égales à OM à partir de O. Le symétrique de M par rapport à O est l'extrémité de la troisième corde.

Exercice 15.23 (Moyenne géométrique).
Soit AB un segment représentant λ_1. Soit C le point de la demi-droite opposée à BA) tel que $BC = \lambda_2$. Soit D un point d'intersection du cercle de diamètre AC et de la perpendiculaire à (AC) passant par B. Alors le triangle ACD est rectangle en D, et B est le pied de la hauteur issue de D. Il en résulte que $BD^2 = AB \times BC$. On en conclut que $\lambda = BD$ est la moyenne géométrique de λ_1 et λ_2.

Exercice 15.24.
1. Soit I le point d'intersection de la bissectrice de l'angle Â et du cercle circonscrit à ABC. D'après le théorème de l'angle inscrit les cordes IB et IC sous-tendent des arcs égaux donc elles ont égales. Le point I est donc sur la médiatrice de BC.
2. Soit J le point d'intersection de la bissectrice de l'angle C avec Γ. J est fixe lorsque C parcourt le même arc $\widehat{AB}$ car il appartient à la médiatrice de [AB] d'après la question 1. Soit I le centre du cercle inscrit, on a
$$\widehat{AIJ} = \pi - \widehat{AIC} = \widehat{ACI} + \widehat{CAI} = \widehat{JCB} + \widehat{IAB} = \widehat{JAB} + \widehat{BAI} = \widehat{JAI}$$
Le triangle JAI est donc isocèle en J, ce qui prouve que I parcourt un arc $\widehat{AB}$ de centre J. Le lieu cherché est la réunion de deux arcs.

Exercice 15.25. (Triangle d'or).
Soit ABC un triangle d'or tel que $\hat{A} = \pi/5$ et $\hat{B} = 2\pi/5 = \hat{C}$. Soit D le pied de la bissectrice issue de B. Dans le triangle BCD, on a $\hat{B} = \pi/5$ et $\hat{C} = 2\pi/5$, d'où $\hat{D} = 2\pi/5$. Par conséquent ABD est un triangle d'or.



Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que$\Phi = p/q$. De

$$AB/BC = BC/CD = DE/EC = \cdots$$

on déduit que

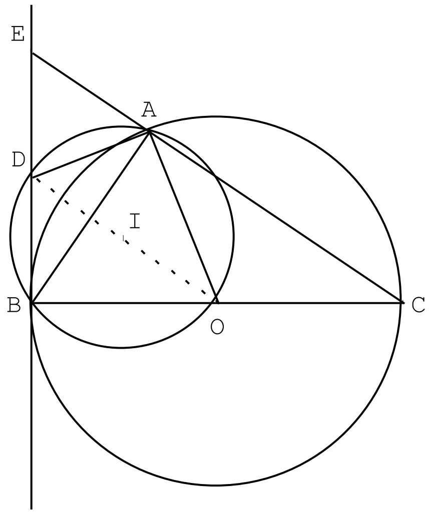
$$\Phi = \frac{p}{q} = \frac{p-q}{q-(p-q)} = \cdots$$

Ainsi, on construit une suite d'entiers (la suite des numérateurs) strictement décroissante non stationnaire. C'est absurde.

Exercice 15.26.

1. Dans le triangle isocèle OAC, on a $2\big(AO), AC)\big) = \pi - \big(OC), OA)\big)$. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\big(OC), OA)\big) = 2\big(BC), BA)\big)$. On en déduit l'égalité d'angles de droites
$$\big((AO), (AC)\big) = \frac{\pi}{2} - \big((BC), (BA)\big)$$
Notons A' le pied de la hauteur issuede A dans ABC. Dans le triangle rectangle ABA', $\big(AB), AA')\big) = \frac{\pi}{2} - \big(BA'), BA)\big)$. On en déduit l'égalité d'angles de droites
$$\big((AB), (AH)\big) = \frac{\pi}{2} - \big((BC), (BA)\big)$$
On en conclut que $\big((AB), (AH)\big) = \big((AO), (AC)\big)$, ce qui prouve que la suite de droites (AB), (AH), (AO), (AC) est proportionnelle
2. Soit ABC un triangle tel que le centre du cercle inscrit I est aligné avec l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit O. Supposons que ABC n'est isocèle ni en B, ni en C. D'après la question précédente, la suite de droites (AB), (AH), (AO), (AC) est proportionnelle. Par conséquent, la bissectrice de l'angle$\widehat{ABC}$est aussi la bissectrice de l'angle$\widehat{OBH}$. Puisque I est aligné avec O et H, on en déduit que I est le pied de la bissectrice issue de B dans le triangle OBH (qui n'est pas aplati car ABC n'est pas isocèle en B). On en déduit que
$$BH = BO \times \frac{IH}{IO}$$
On démontre de la même façon que
$$CH = CO \times \frac{IH}{IO}$$
Or $OB = OC$, donc $BH = CH$, ce qui prouve que H appartient à la médiatrice de BC. La droite (AH) étant perpendiculaire à (BC), il en résulte que la droite (AH) est cette médiatrice, et ABC est donc isocèle en A.

Exercice 15.27.



Les triangles rectangles OAD et OBD ont la même hypoténuse OD, les points O, A, B, D sont donc sur le cercle de diamètre OD. Il en résulte que le milieu I de OD est équidistant de A et B. De plus le point O est équidistant de A et B car OA et OB sont des rayons du cercle de diamètre BC. La droite (OI) est donc la médiatrice de AB. Or, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) car le côté BC est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc les droites (OI) et (AC) sont parallèles. Ainsi, dans le triangle BEC, la droite (OD) passe par le milieu du côté [BC] parallèlement au côté (EC), ce qui prouve qu'elle coupe le côté EB en son milieu. On en conclut que D est le milieu de EB.

Exercice 15.28.
Soit M le point d'intersection des segments OI et JK. L'angle $\widehat{MJO}$ a pour complémentaire $\widehat{KJH}$, l'angle $J\widehat{H}A$ a pour complémentaire $\widehat{OHJ}$. Dans le rectangle OKHJ,$\widehat{KJH} = \widehat{OHJ}$, donc $\widehat{MJO} = J\widehat{H}A$. Par ailleurs, puisque OAB est rectangle en O, le triangle OAI est isocèle, d'où $\widehat{MOJ} = J\widehat{A}H$. Or, les angles $J\widehat{H}A$ et $J\widehat{A}H$ sont complémentaires. Donc les angles $\widehat{MJO}$ et $\widehat{MOJ}$ sont complémentaires, ce qui prouve que le triangle MOJ est rectangle en M.

Exercice 15.29 (Conchoïde de Nicomède).
Construction mécanique : sur une règle placer une pointe sèche venant sur M, une pointe traçante venant sur M' et une pointe sèche se déplaçant dans une glissière et venant sur A ; lorsque M décrit (d) M' trace la conchoïde.
Soit M le point de d tel que M'=C'. Soit I le milieu de MM'. Alors le triangle ACI est isocèle en I, d'où $\widehat{CAC'} = \widehat{AIC}$. Par ailleurs, le triangle MCC' est rectangle en C, donc le triangle ICC' est isocèle en I. Il en résulte que $2\widehat{IC'C} = \pi - \widehat{C'IC} = \widehat{AIC}$. Enfin, les angles alternes internes $\widehat{IC'C}$ et $\widehat{C'AB}$ sont égaux. On en conclut que $\widehat{CAC'} = 2\widehat{C'AB}$, d'où

$$\widehat{C'AB} = 1/3\,\widehat{CAB}$$

Exercice 15.30 (Orthocentre).

1. Soit ABC un triangle. Soit A' le point d'intersection de la perpendiculaire en B à la hauteur issue de B, et de la perpendiculaire en C à la hauteur issue de C. Soit B' le point d'intersection de la perpendiculaire en A à la hauteur issue de A, et de la perpendiculaire en C à la hauteur issue de C. Soit C' le point d'intersection de la perpendiculaire en B à la hauteur issue de B, et de la perpendiculaire en A à la hauteur issue de A. Les quadrilatères ACBC' et ABCB' sont des parallélogrammes, donc A est le milieu de B'C'. De même B est le milieu de A'C', et C est le milieu de A'B'. Par conséquent les hauteurs du triangle ABC sont les médiatrices du triangle A'B'C', ce qui prouve qu'elles sont concourantes.
2. Soit ABC un triangle, soit H son orthocentre. Soit P le symétrique de H par rapport à (BC), prouvons que P est sur le cercle circonscrit à ABC.
   Soit A' et C' les pieds respectifs des hauteurs issues de A et C. Les points A, C, A', C' sont cocycliques car les triangles rectangles ACC' et AA'C ont leur hypoténuse en

commun (on peut supposer ces triangles non aplatis, le cas où ABC est rectangle étant trivial). Il en résulte l'égalité d'angles de droites

$$\big((CC'),(CA')\big) = \big((AC'),(AA')\big)$$

Les alignements de points permettent d'écrire cette égalité de la façon suivante :

$$\big((CH),(CB)\big) = \big((AB),(AP)\big)$$

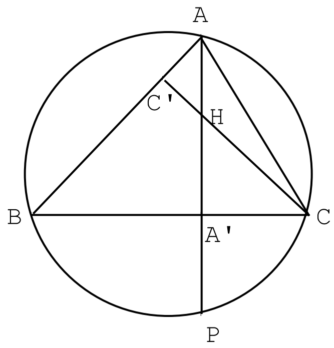
Or, par symétrie par rapport à (BC),

$$\big((CH),(CB)\big) = \big((CB),(CP)\big)$$

Donc

$$\big((AB),(AP)\big) = \big((CB),(CP)\big)$$

Ceci prouve que les points A, B, C, P sont cocycliques.



3. Soit H l'orthocentre, soit C' le deuxième point d'intersection de (CH) avec le cercle. Alors H est le symétrique de C' par rapport à (AB). Par conséquent le lieu cherché est le symétrique du cercle par rapport à la droite (AB).
4. Soit ABC un triangle, soit M un point de son cercle circonscrit, soient M_1, M_2, M_3 les symétriques respectifs de M par rapport aux droites (BC), (AC), (AB). Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Démontrons que les points H, M_1, M_2, M_3 sont alignés. Soit H_1 le symétrique de H par rapport à (BC). D'après la question 2, les points B, H_1, C, M sont cocycliques. Par symétrie par rapport à (BC), les points B, H, C, M_2 sont donc cocycliques. Il en résulte l'égalité d'angles de droites $\big((HM_2),(HB)\big) = \big((CM_2),(CB)\big)$. Par symétrie par rapport à (BC), $\big((CM_2),(CB)\big) = \big((CB),(CM)\big)$. Donc

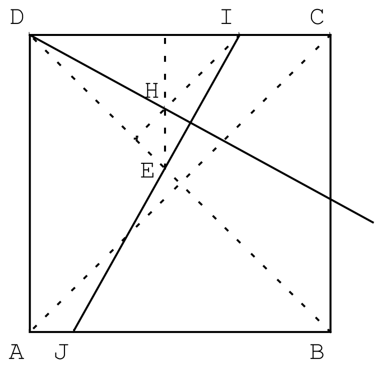
$$\big((HM_2),(HB)\big) = \big((CB),(CM)\big)$$

On démontre de façon analogue que les points B, H, A, M_3 sont cocycliques, d'où $\big((HB),(HM_3)\big) = \big((AB),(AM_3)\big)$. Par symétrie par rapport à (AB), $\big((AB),(AM_3)\big) = \big((AM),(AB)\big)$. Puisque les points A, B, C, M sont cocycliques, $\big((AM),(AB)\big) = \big((CM),(CB)\big)$. Donc

$$\big((HB),(HM_3)\big) = \big((CM),(CB)\big)$$

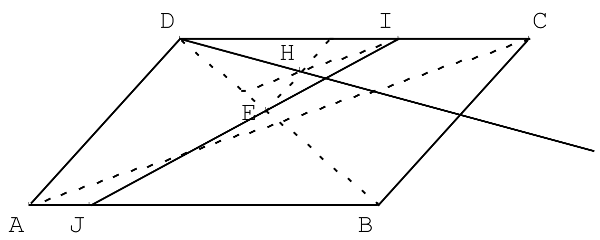
En sommant les deux égalités, on en obtient $\big((HM_2),(HM_3)\big) = 0$, ce qui prouve que H, M_2, M_3 sont alignés. En appliquant le même raisonnement aux autres côtés du triangle, on en conclut que H, M_1, M_2, M_3 sont alignés.

5. Réalisons une vue de dessus



Soit E le point d'intersection de (IJ) et (BD). La perpendiculaire à (IJ) passant par D est une hauteur du triangle DEI. Pour la construire il suffit donc de construire l'orthocentre H du triangle DEI.
Dans le triangle DEI la hauteur issue de E est parallèle à (BC). De plus la hauteur issue de I est parallèle à (AC) (car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires).
Nous savons donc construire H, le problème est résolu.

Retour à la perspective



On construit E, point d'intersection de (BD) et (IJ). On trace ensuite la parallèle à (BC) passant par E, puis la parallèle à (AC) passant par I. Ces droites sont les hauteurs du triangle DEI. Soit H leur point d'intersection, la droite (DH) est la perpendiculaire à (IJ) passant par H.

Exercice 15.31(Droite de Simson).

1. Soient M_1, M_2, M_3 les projetés orthogonaux respectifs de M sur (BC), (CA), (AB). Les points C, M, M_1, M_2 sont cocycliques car les triangles rectangles MCM_1 et MCM_2 ont la même hypoténuse. Par conséquent on a l'égalité d'angle de droites $\big((M_1M_2),(M_1M)\big) = \big((CM_2),(CM)\big)$. Par alignement on en déduit que $\big((M_1M_2),(M_1M)\big) = \big((CA),(CM)\big)$. On prouve de façon analogue que $\big((M_1M_3),(M_1M)\big) = \big((BA),(BM)\big)$. Le point M appartient au cerce circonscrit au triangle ABC si et seulement si $\big((CA),(CM)\big) = \big((BA),(BM)\big)$, c'est-à-dire si et seulement si $\big((M_1M_2),(M_1M)\big) = \big((M_1M_3),(M_1M)\big)$, qui est équivalent à $\big((M_1M_2),(M_1M_3)\big) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si les points M_1, M_2, M_3 sont alignés.
2. On a démontré dans la question 1 que $\big((M_1M_2),(M_1M)\big) = \big((CA),(CM)\big)$. Par alignement cette relation peut s'écrire $\big((M_1M_2),(QM)\big) = \big((CA),(CM)\big)$. Or, par cocyclicité, $\big((QA),(QM)\big) = \big((CA),(CM)\big)$. Donc $\big((M_1M_2),(QA)\big) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 15.32 (Triangle orthique).

Soit ABC un triangle, soient A', B', C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C. Prouvons que le point A est sur l'une des deux bissectrices de l'angle $\widehat{B'A'C'}$.
Soit H l'orthocentre du triangle ABC.Les triangles B'HC et A'HC sont rectangles et ont la même hypoténuse, donc les points A', B', H, C sont cocycliques. On en déduit que$\big((A'B'),(A'H)\big) = \big((CB'),(CH)\big)$. Les points A', A, H sont alignés, et les points C', C, H sont alignés, cette égalité peut s'écrire

$$\big((A'B'),(A'A)\big) = \big((CB'),(CC')\big)$$

Le même raisonnement appliqué aux triangles A'HB et C'HB permet de démontrer que

$$\big((A'A),(A'C')\big) = \big((BB'),(B'C)\big)$$

Les triangles B'CB et C'CB sont rectangles et ont la même hypoténuse, donc les points B', C', B, C sont cocycliques. On en déduit que

$$\big((CB'),(CC')\big) = \big((BB'),(BC')\big)$$

Par transitivité, on déduit de ces trois égalités que

$$\big((A'B'),(A'A)\big) = \big((A'A),(A'C')\big)$$

On en conclut que A est sur l'une des bissectrices de l'angle $\widehat{B'A'C'}$.

Exercice 15.33.
Les triangles rectangles ABC et OBC ont la même hypoténuse, donc points A, B, C, O sont cocycliques. Il en résulte que $\big((OB),(OA)\big) = \big((CB),(CA)\big)$, ce qui prouve que le point A se déplace sur une droite passant par O lorsque le triangle ABC glisse.

Exercice 15.34.
Soit H le pied de la hauteur issue de N dans le triangle OMN. Les triangles rectangles OTM et NHM ont l'hypoténuse égale, et l'angle en M en commun. Ils sont donc égaux, ce qui implique que NH=OT. Par conséquent N se déplace sur la parallèle à (OM) passant par B.

Exercice 15.35.
Tracer le cercle de diamètre MQ. Soit A' le point de ce cercle se trouvant du même côté de (MQ) que N et P et tel que l'arc arc $\widehat{QA'}$ soit un quart de cercle. Recommencer avec le cercle de diamètre NP, on obtient le point C'. Soit A le deuxième point d'intersection de la droite (A'C') et du cercle de diamètre MQ, soit C le deuxième point d'intersection de la droite (A'C') et du cercle de diamètre NP. Soit B le point d'intersection des droites (AM) et (CN). Soit D le point d'intersection des droites (PC) et (AQ). Les angles $\widehat{BAA'}$ et $\widehat{DAA'}$ interceptent tous deux un quart de cercle, donc d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{BAA'} = \pi/4 = \widehat{DAA'}$. De même $\widehat{BCC'} = \pi/4 = \widehat{DCC'}$. Par conséquent les triangles BAC et DAC sont rectangles isocèles, ce qui prouve que ABCD est un carré.

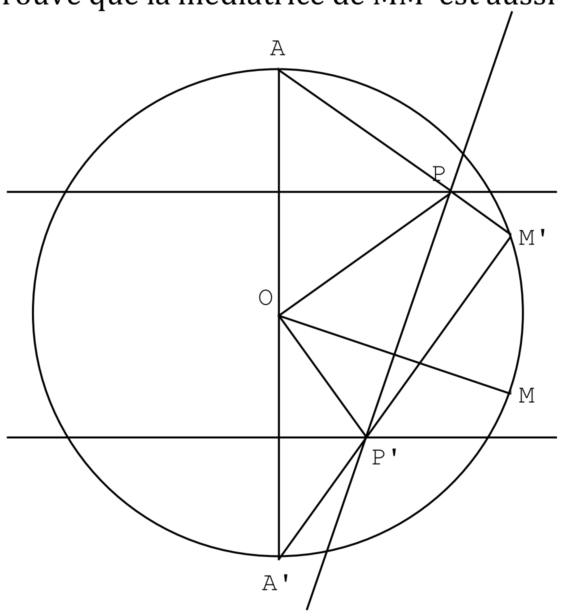
Exercice 15.36.
soit ABCD un quadrilatère. Soient d_1 une bissectrice de l'angle de droites $\big((AB),(CD)\big)$, et d_2 une bissectrice de l'angle de droites $\big((AD),(BC)\big)$. On a :

$$\begin{aligned}
2(d_1,d_2) &= 2\big(d_1,(AB)\big) + 2\big((AB),(BC)\big), +2\big((BC),d_2\big) \\
&= \big((CD),(AB)\big) + 2\big((AB),(BC)\big) + \big((BC),(AD)\big) \\
&= \big((CD),(BC)\big) + \big((AB),(AD)\big) \\
&= \big((CD),(CB)\big) - \big((AD),(AB)\big)
\end{aligned}$$

L'équivalence demandée se déduit aisément de cette égalité.

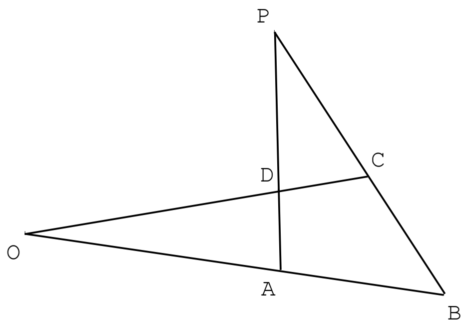
Exercice 15.37.

1. Il suffit de prouver que l'angle $\widehat{AM'A'}$ est droit. En appliquant la relation de Chasles, puis en utilisant les alignements de points, on a les égalités d'angles de droites
$$\begin{aligned}2\big((M'A),(M'A')\big) &= 2\big((M'A),(AA')\big)+2\big((AA'),(M'A')\big)\\ &= 2\big((AP),(AO)\big)+2\big((A'O),(A'P')\big)\end{aligned}$$
Les triangles OAP et OA'P' étant isocèles on a $2\big((AP),(AO)\big)=2\big((OA),(OP)\big)$, et $2\big((A'O),(A'P')\big)=2\big((OP'),(OA')\big)$, d'où
$$2\big((M'A),(M'A')\big)=2\big((OA),(OP)\big)+2\big((OP'),(OA')\big)$$
P' est le centre du cercle circonscrit à OA'M, car il est sur les médiatrices de OA' et OM, donc $2\big((OP'),(OA')\big)=\big((OM),(OA')\big)$. De même P est le centre du cercle circonscrit à OAM', donc $2\big((OA),(OP)\big)=\big((OA),(OM)\big)$. On a finalement $2\big((M'A),(M'A')\big)=\big((OA),(OM)\big)+\big((OM),(OA')\big)=0$, CQFD.
2. Par alignement on a $2\big((M'P),(M'P')\big)=2\big((M'A),(M'A')\big)=0$, donc M' appartient au cercle de diamètre PP'. On a démontré dans la question 1 que
$$2\big((OA),(OP)\big)+2\big((OP'),(OA')\big)=2\big((M'A),(M'A')\big)$$
Les points O, A, A' étant alignés, on peut appliquer la relation de Chasles dans le membre de gauche, et l'on obtient $2\big((OP'),(OP)\big)=2\big((M'A),(M'A')\big)=0$, ce qui prouve que O appartient au cercle de diamètre PP'. Enfin M appartient à ce cercle par symétrie par rapport à (PP').
3. D'après le théorème de Thalès, la parallèle à d et d' passant par O coupe PP' en son milieu. Or, la médiatrice de MM' passe par O car M et M' appartiennent au cercle de diamètre AA' (question 1), et elle passe aussi par le milieu de PP' car M et M' appartiennent au cercle de diamètre PP' (question 2). Donc ces deux droites sont confondues, ce qui prouve que la médiatrice de MM' est aussi la médiatrice de AA'.



Exercice 15.38 (Billard à deux bandes).
On a $\big((AU),(BV)\big) = \big((AU),(UV)\big) + \big((UV),(BV)\big) = 2\big((UO),(UV)\big) + 2\big((UV),(OV)\big) = 2\big((OU),(OV)\big) = 0$, ce qui prouve que les droites (AU) et (BV) sont parallèles. Il suffit donc de prouver que les droites (OI) et (UA) sont parallèles, et le théorème des milieux permettra de conclure que (OI) passe par J.
On a $\big((OI),(UA)\big) = \big((OI),(IU)\big) + \big((IU),(UA)\big)$. Or, le triangle OIU est isocèle en I car IU est la médiane issue de O dans le triangle OUV rectangle en O. Donc $\big((OI),(IU)\big) = 2\big((UO),(UI)\big)$. De plus, par symétrie, $\big((IU),(UA)\big) = 2\big((IU),(OU)\big)$. On en déduit que $\big((OI),(UA)\big) = 2\big((UO),(UI)\big) + 2\big((IU),(OU)\big) = 0$, CQFD.

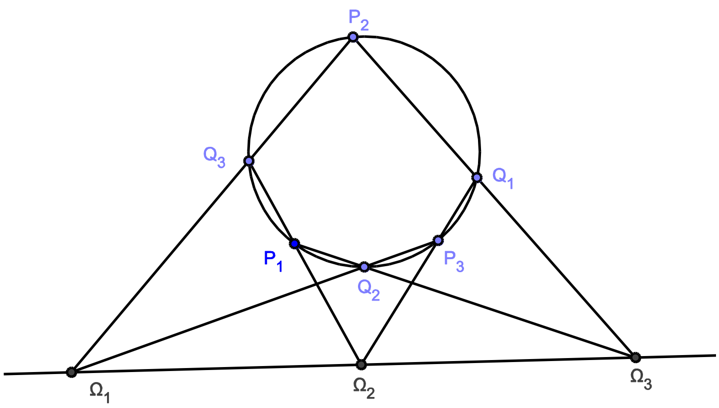
Exercice 15.39 (Point et cercle de Miquel).
1. On note A, B, C, D, P, O les six sommets du quadrilatère complet (voir la figure pour la disposition).
   Les cercles circonscrits aux triangles PCD et PAB ont le point P en commun et ne peuvent être tangents, ils se recoupent donc en un point I. Celui-ci vérifie, d'après la condition de cocyclicité :
$$\big((BA),(BP)\big) = \big((IA),(IP)\big)$$
$$\big((CP),(CD)\big) = \big((IP),(ID)\big)$$
   Par alignement de points, on a $\big((OA),(OD)\big) = \big((BA),(CD)\big)$. D'après la relation de Chasles, $\big((BA),(CD)\big) = \big((BA),(BC)\big) + \big((BC),(CD)\big)$. Par alignement de points, $\big((BA),(BC)\big) + \big((BC),(CD)\big) = \big((BA),(BP)\big) + \big((CP),(CD)\big)$. De toutes ces relations, on déduit que
$$\big((OA),(OD)\big) = \big((IA),(IP)\big) + \big((IP),(ID)\big) = \big((IA),(ID)\big)$$
   D'après la condition de cocyclicité, ceci implique que I appartient au cercle circonscrit au triangle OAD. On prouve de façon analogue qu'il appartient au cercle circonscrit au triangle OBC

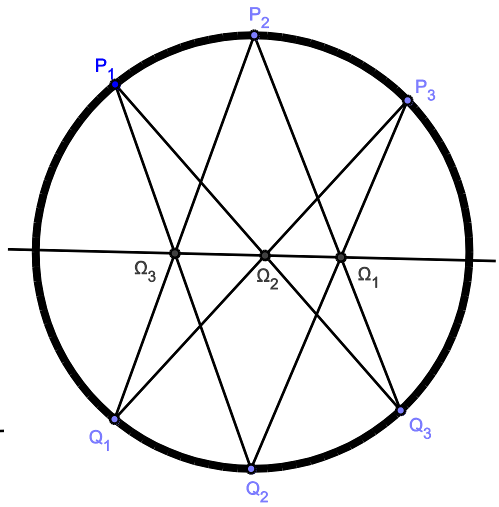


2. Supposons les points A_i cocycliques alignés. En utilisant la condition de cocyclicité et la relation de Chasles on a :
$$\begin{aligned}\big((B_1B_2),(B_1B_4)\big) &= \big((B_1B_2),(B_1A_1)\big) + \big((B_1A_1),(B_1B_4)\big)\\ &= \big((A_2B_2),(A_2A_1)\big) + \big((A_4A_1),(A_4B_4)\big)\\ &= \big((A_2B_2),(A_2A_3)\big) + \big((A_2A_3),(A_2A_1)\big) + \big((A_4A_1),(A_4A_3)\big) + \big((A_4A_3),(A_4B_4)\big)\\ &= \big((B_3B_2),(B_3A_3)\big) + \big((B_3A_3),(B_3B_4)\big)\\ &= \big((B_3B_2),(B_3B_4)\big)\end{aligned}$$
   On en déduit que les points B_j sont cocycliques ou alignés.

Exercice 15.40.
On modélise le problème de la façon suivante : la statue est un segment AB de longueur h, le support un segment BC de longueur a, B est entre A et C, on note d la perpendiculaire à (AC) en C, et l'on cherche le point O de d tel que l'angle $\theta = \widehat{AOB}$ soit maximal. On note $x = OC$. Remarquons que le point O est sur l'arc capable de l'angle $\widehat{AOB}$. Le problème revient donc à trouver l'arc capable du plus grand angle possible coupant la droite d.
Soit δ la médiatrice de AB, soit I le milieu de AB, et M un point de la droite δ. Le cercle de centre M, de rayon MA, contient l'arc capable de l'angle$\widehat{IMA}$. Or cet angle croit lorsque la longueur MA décroît. On veut donc MA le plus petit possible, sachant que le cercle de centre M, de rayon MA, doit couper d, c'est-à-dire sachant que $MA \geq IC$. Avec cette contrainte, la plus petite valeur possible de MA est $MA = IC$. Dans ce cas la droite d est tangente en O au cercle de centre M, de rayon MA. La puissance du point C par rapport à ce cercle est alors $\overline{CO}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$, soit $x^2 = h(h+a)$. On en conclut que $x = \sqrt{h(h+a)}$.

Exercice 15.41 (Théorème de Pascal 1).





Soit IJK le triangle défini par :
$$I = (P_1Q_3) \cap (P_2Q_1), J = (P_2Q_1) \cap (P_3Q_2), K = (P_3Q_2) \cap (P_1Q_3).$$
On applique trois fois le théorème de Ménélaüs à IJK :

- avec la sécante (P_1Q_2), on obtient
$$\frac{\overline{\Omega_3 I}}{\overline{\Omega_3 J}} \cdot \frac{\overline{Q_2 J}}{\overline{Q_2 K}} \cdot \frac{\overline{P_1 K}}{\overline{P_1 I}} = 1$$
- avec la sécante (P_2Q_3), on obtient
$$\frac{\overline{\Omega_1 J}}{\overline{\Omega_1 K}} \cdot \frac{\overline{Q_3 K}}{\overline{Q_3 I}} \cdot \frac{\overline{P_2 I}}{\overline{P_2 J}} = 1$$
- avec la sécante (P_3Q_1), on obtient
$$\frac{\overline{\Omega_2 K}}{\overline{\Omega_2 I}} \cdot \frac{\overline{Q_1 I}}{\overline{Q_1 J}} \cdot \frac{\overline{P_3 J}}{\overline{P_3 K}} = 1$$

Par ailleurs la propriété de puissance d'un point par rapport à un cercle nous donne :
$$\overline{IP_1} \cdot \overline{IQ_3} = \overline{IP_2} \cdot \overline{IQ_1}$$
$$\overline{JP_2} \cdot \overline{JQ_1} = \overline{JP_3} \cdot \overline{JQ_2}$$
$$\overline{KP_3} \cdot \overline{KQ_2} = \overline{KP_1} \cdot \overline{KQ_3}$$
En multipliant les trois égalités données par Ménélaüs, puis en simplifiant avec les trois égalités ci-dessus, on obtient

$$\frac{\overline{\Omega_3 I}}{\overline{\Omega_3 J}} \cdot \frac{\overline{\Omega_1 J}}{\overline{\Omega_1 K}} \cdot \frac{\overline{\Omega_2 K}}{\overline{\Omega_2 I}} = 1,$$

ce qui prouve l'alignement des points Ω_1, Ω_2, Ω_3.

Exercice 15.42 (Théorème de Pascal 2).

Les points A', B, C, D' sont cocycliques, donc $\overline{OB} \times \overline{OC} = \overline{OA'} \times \overline{OD'}$. On en déduit que les triangles OCA' et OD'B sont semblables, d'où $\widehat{OCA'} = \widehat{OD'B}$. Or $\widehat{OCA'} = \widehat{OAC'}$ car (CA')//(AC'). Donc

$$\widehat{OD'B} = \widehat{OAC'}$$

Il en résulte que les triangles OD'B et OAC' sont semblables, d'où $\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OC'} \times \overline{OD'}$. On en déduit que les triangles OAD' et OC'B sont semblables, d'où $\widehat{OAD'} = \widehat{OC'B}$. Or $\widehat{OB'C} = \widehat{OC'B}$ car (CB')//(BC'). Donc

$$\widehat{OAD'} = \widehat{OB'C}$$

Il en résulte que les triangles OAD' et OB'C sont semblables, d'où $\overline{OA} \times \overline{OC} = \overline{OB'} \times \overline{OD'}$. On en déduit que les triangles OAB' et OD'C sont semblables, d'où

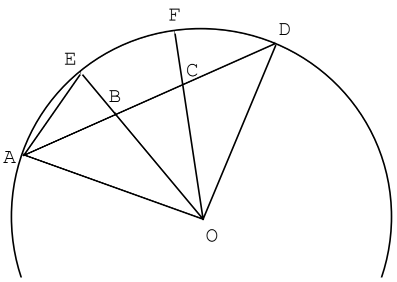
$$\widehat{OAB'} = \widehat{OD'C}$$

Or, les points A', B, C, D' sont cocycliques, donc $\overline{OB} \times \overline{OC} = \overline{OA'} \times \overline{OD'}$. On en déduit que les triangles OD'C et OBA' sont semblables, d'où

$$\widehat{OD'C} = \widehat{OBA'}$$

Des deux dernières égalités on déduit que les angles correspondants $\widehat{OAB'}$ et $\widehat{OBA'}$ sont égaux, ce qui prouve que les droites (AB') et (BA') sont parallèles.

Exercice 15.43.



On note E le point d'intersection des segments OE et AD, et C le point d'intersection des segments OF et AD. On a

$$p = \frac{AB}{OA} + \frac{BC}{OA} + \frac{CD}{OA}$$

L'angle inscrit $\widehat{EAB}$ et l'angle au centre $\widehat{EOD}$ interceptent le même arc, donc $\widehat{EAB} = 1/2\ \widehat{EOD} = \widehat{AOE}$. De plus les triangles OAAE et AEB ont l'angle en E en commun. On en déduit qu'ils sont semblables, ce qui prouve d'une part que AEB est isocèle en A, d'autre part que $EB/AE = AE/OA$.

On en déduit que

$$\frac{AB}{OA} = \frac{AE}{OA} = x$$

Et que

$$\frac{EB}{OA} = \left(\frac{AE}{OA}\right)^2 = x^2$$

Par ailleurs, par symétrie par rapport à la médiatrice de AD,

$$\frac{CD}{OA} = \frac{AB}{OA} = x$$

Les triangles OBC et OAE sont semblables car ils ont un angle égal et les côtés de cet angle proportionnels. On a donc $= OB \times AE/OA$, d'où

$$\frac{BC}{OA} = \left(1 - \frac{EB}{OA}\right) \times \frac{AE}{OA} = (1 - x^2)x$$

On en conclut que

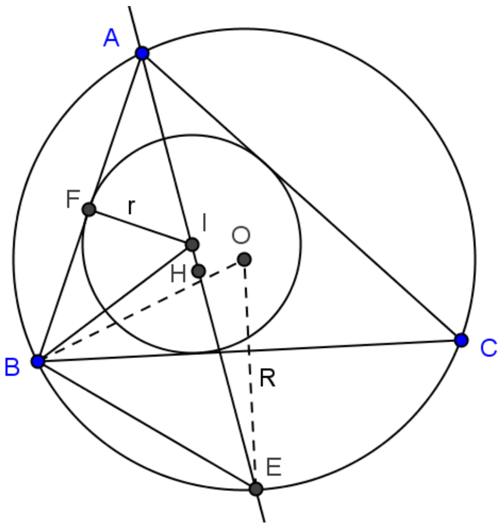
$$p = x + (1 - x^2)x + x = 3x - x^3$$

Exercice 16.28 (Longueur de la bissectrice).
Soient E et F les projetés orthogonaux de B et C sur (AD). On sait que les pieds de la bissectrice de l'angle$\hat{A}$ sont conjugués harmoniques par rapport à B et C, par projection orthogonale les points E et F sont conjugués harmoniques par rapport à A et D, d'où :

$$\frac{2}{AD} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$$

La formule en résulte

Exercice 16.29.



Notons E le second point d'intersection de la bissectrice AI) avec le cercle circonscrit, et p la puissance du point I par rapport au cercle circonscrit. Alors, d'une part $p = OI^2 - r^2$, d'autre part$p = \overline{IA} \times \overline{IE} = -IA \times IE$.
On a $\widehat{IBC} = \widehat{IBC} + \widehat{CBE}$. Les angles inscrits $\widehat{CBE}$ et $\widehat{CAE}$ interceptent le même arc, donc $\widehat{CBE} = \widehat{CAE}$. Par ailleurs, puisque I est sur la bissectrice de $\widehat{CAB}$, on a $\widehat{CAE} = \widehat{IAB}$.De même, puisque I est sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$, on a $\widehat{IBC} = \widehat{IBA}$. Ainsi, $\widehat{IBC} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB}$, d'où $\widehat{IBC} + \widehat{BIA} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} + \widehat{BIA} = \pi$, puisque c'est la somme des angles du triangle IAB. L'angle $\widehat{IBE}$ a donc pour supplémentaire $\widehat{BIA}$. Or l'angle $\widehat{BIE}$ a aussi pour supplémentaire $\widehat{BIA}$. Donc $\widehat{IBE} = \widehat{BIE}$, ce qui prouve que le triangle IBE est isocèle en E. Par conséquent, EI=EB, d'où $p = -IA \times BE$.
Notons F le point de contact du cercle inscrit avec le côté AB. Le triangle AFI est rectangle en F, et dans ce triangle

$$IA = \frac{\rho}{\sin \widehat{BAE}}$$

Dans le triangle isocèle OBE on a$BE = 2r \sin \frac{\widehat{BOE}}{2}$. Mais l'angle inscrit $\widehat{BAE}$ intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{BOE}$, donc $\widehat{BAE} = 1/2\, \widehat{BOE}$, d'où

$$BE = 2r \sin \widehat{BAE}$$

On en déduit que $p = -2r\rho$, d'où $OI^2 - r^2 = -2r\rho$. On en conclut que

$$OI = \sqrt{r(r - 2\rho)}$$

Exercice 16.30 (Formule de Héron).

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{1}{16}(a+b+c)(c+b-a)(a+b-c)(c-b+a)$$
$$= \frac{1}{16}[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (b-a)^2]$$

D'après le théorème de Pythagore généralisé, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. On introduit cela dans l'égalité ci-dessus, on développe $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$, on factorise chaque parenthèse par ab et on obtient :

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{a^2b^2}{4}(1+\cos\gamma)(1-\cos\gamma) = \frac{a^2b^2}{4}\sin^2\gamma$$

Exercice 16.31.

Soit O le sommet du bâtiment, H son projeté orthogonal sur le sol, on veut déterminer OH. Soit A un point du sol (supposé horizontal), B un point du segment OH tel que la distance AB soit mesurable. On effectue les mesures suivantes : $a = \widehat{OAH}$, $b = \widehat{OBH}$, $\delta = AB$. Alors

$$OH = \delta \times \frac{\sin a \sin b}{\sin(b-a)}$$

En effet dans le triangle rectangle OBH, $OH = OB \times \sin b$. Par ailleurs, d'après la formule des sinus dans le triangle OAB, $OB = AB \times \frac{\sin a}{\sin \widehat{BOA}}$.
Enfin, dans le triangle OAB, $\widehat{BOA} + a + (\pi - b) = \pi$, d'où $\widehat{BOA} = b - a$.

Exercice 16.32.

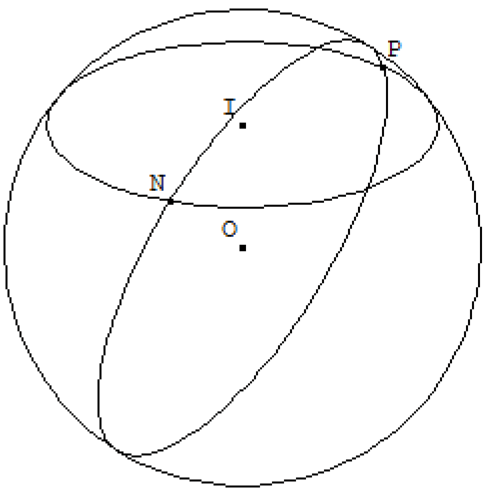


Figure 1

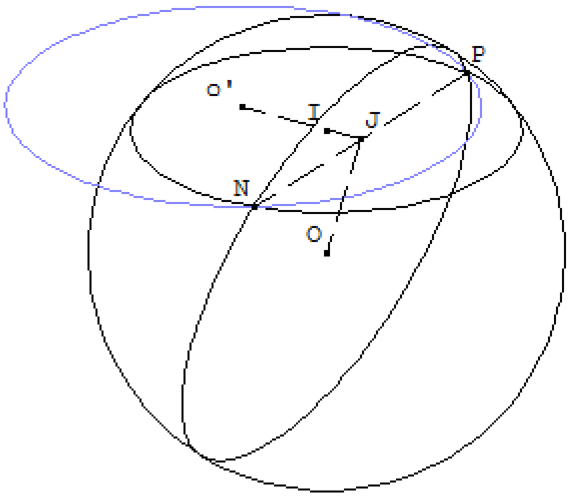


Figure 2

On considère deux villes P et N situées à la même latitude (figure 1). On souhaite comparer la longueur de l'arc de grand cercle et la longueur de l'arc de parallèle qui les joignent. On note c le grand cercle, p le parallèle, O le centre de la Terre, et I le centre de p.On fait pivoter le grand cercle c dans le plan de p, à l'aide d'une rotation d'axe (PN). On note c' l'image de c, O' l'image de O, J le milieu de PM (figure 2). On fait ensuite une vue à plat du plan contenant p et c' (figure 3)

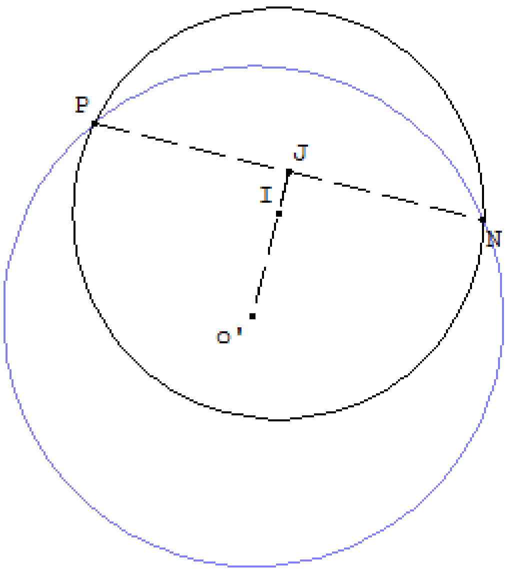
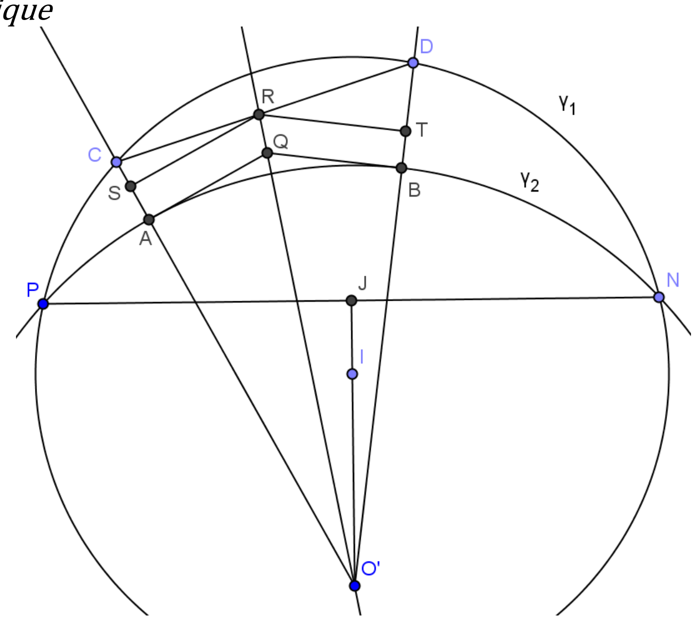


Figure 3

Méthode analytique

Notons respectivement θ_1 et θ_2 les mesures en radians des angles $\widehat{PIJ}$ et $\widehat{PO'J}$. Le triangle OIP étant rectangle en P, on a $IP < OP$, d'où $IP < O'P$. On en déduit que $\theta_1 > \theta_2$.
Notons λ la longueur du segment PN, γ_1 la longueur de l'arc de cercle PN de centre I situé à l'intérieur de l'angle $\widehat{PIN}$, et γ_2 la longueur de l'arc de cercle PN de centre O' situé à l'intérieur de l'angle $\widehat{PON}$. On a $\gamma_1 = IP \times 2\theta_1$, et dans le triangle IJP on a $IP = \frac{\lambda/2}{\sin\theta_1}$, donc $\gamma_1 = \lambda f(\theta_1)$, avec $f(x) = x/\sin x$.
On démontre de façon analogue que $\gamma_2 = \lambda \times f(\theta_2)$.
On a $f'(x) = \frac{(\tan x - x)\cos x}{(\sin x)^2} > 0$ sur]0,π/2[. La fonction f est donc croissante sur cet intervalle. On en déduit que $f(\theta_1) > f(\theta_2)$, ce qui prouve que $\gamma_1 > \gamma_2$.

Méthode géométrique



La longueur d'un arc est la limite de la longueur des lignes polygonales inscrites lorsque le pas tend vers 0. Pour prouver que $\gamma_2<\gamma_1$, il suffit donc, étant donnée une corde AB inscrite dans γ_2, et la corde CD interceptée sur l'arc γ_1 par l'angle $\widehat{AO'B}$, que AB<CD pour $\widehat{AO'B}$ suffisamment petit.
Soit Q le point d'intersection des tangentes à γ_2 en A et en B, il est sur la bissectrice de $\widehat{AO'B}$. Soit R le point d'intersection de cette bissectrice et de la corde CD.
Pour $\widehat{AO'B}$ suffisamment petit, Q est entre O' et R (car Q se rapproche de γ_2, R se rapproche de γ_1, et toute demi-droite d'origine O' située à l'intérieur de l'angle $\widehat{PON}$ coupe d'abord γ_2 puis γ_1). On en déduit, en désignant par S et T les projetés orthogonaux respectifs de R sur O'C et O'D, que A est entre O' et S, et que B est entre O' et T. Il en résulte que AQ<SR et QB<RT. Or AB<AQ+QR, et SR+RT<CR+RD=CD, d'où AB<CD. Par passage en la limite, on en conclut que $\gamma_1 > \gamma_2$.

Exercice 16.33.
Les fonctions sinus et cosinus étant 2π-périodiques, et la fonction cosinus étant paire, il suffit de prouver cette inégalité sur l'intervalle $[0,\pi]$.
Cette inégalité est équivalente à
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos(\mathrm{x})\right) \leq \cos(\sin(x))$$
Or, pour $x \in [0,\pi]$, on a
$$\sin(x) \in\ [0,1] \subset [0,\pi]$$
$$\frac{\pi}{2}-\cos(x) \in \left[\frac{\pi}{2}-1;\frac{\pi}{2}+1\right] \subset [0,\pi]$$
La fonction cosinus étant décroissante sur $[0,\pi]$, on en déduit que cette inégalité est équivalente à
$$\pi/2-\cos x \geq \sin x$$
c'est-à-dire
$$\sin x+\cos x \leq \pi/2$$
Méthode trigonométrique.
D'après les formules d'addition
$$\cos(x)+\sin(x) = \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2} \leq \frac{\pi}{2}$$
Méthode géométrique.
Dans un repère orthonormé (O,I,J) soit M le point du cercle trigonométrique correspondant à l'angle x, soit H et K les projetés orthogonaux respectifs de M sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Sachant que $\sin x+\cos x \leq |\sin x|+|\cos x|$, il suffit d'étudier le cas où $0<x<\pi/2$. On a $\cos x = MK < MJ$ et $\sin x = MH < IM$, d'où $\sin x + \cos x$ est inférieur à la longueur de la ligne polygonale IMJ, elle-même inférieur à la longueur de l'arc IJ, qui est $\pi/2$.

Exercice 16.34.
On modélise le problème de la façon suivante : la statue est un segment AB de longueur h, le support un segment BC de longueur a, B est entre A et C, on note d la perpendiculaire à (AC) en C, et l'on cherche le point O de d tel que l'angle $\theta = \widehat{AOB}$ soit maximal. Notons $x = OC$, $\alpha = \widehat{AOC}$ et $\beta = \widehat{BOC}$. On a :
$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{a+h}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{a(a+h)}{x^2}} = \frac{hx}{x^2+a(a+h)} = f(x)$$

Le numérateur de $f'(x)$ est $h[-x^2+a(a+h)]$, il s'annule en $\pm\sqrt{a(a+h)}$, et la fonction f atteint son maximum en $x=\sqrt{a(a+h)}$. Puisque la fonction tangente est croissante sur]0,π/2[, l'angle θ est lui aussi maximal lorsque $x=\sqrt{a(a+h)}$.

Exercice 16.35.
Les coordonnées cartésiennes de B et D sont respectivement $(1;\sqrt{3})$ et $(2\cos\theta\,;2\sin\theta)$. On en déduit que les coordonnées cartésiennes de F sont $\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\,;\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta\right)$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}AF^2 &= \left(-\frac{3}{2}+\cos\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta\right)^2=\frac{9}{4}-3\cos\theta+\cos^2\theta+\frac{3}{4}+\sqrt{3}\sin\theta+\sin^2\theta\\ &= 4-3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\end{aligned}$$

D'où

$$AF^2=4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

AF est maximal quand AF² est maximal, car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or AF² est maximal quand le cosinus vaut -1, c'est-à-dire quand $\theta=\frac{5\pi}{6}$. De même AF² est minimal quand le cosinus vaut 1, c'est-à-dire quand $\theta=-\frac{\pi}{6}$.

Exercice 16.36.
Soit A un sommet du dodécaèdre, soient AB, AC, AD les trois arêtes issues de A. On veut déterminer le rectiligne du dièdre d'arête (AC), dont les faces contiennent respectivement B et D. Choisissons AB comme unité de longueur, on a AB=AC=AD=1. De plus, puisque les faces d'un dodécaèdre régulier convexe sont des pentagones réguliers convexes, on a $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=\widehat{CAD}=3\pi/5$ et $BC=CD=DB=\varphi$ (le nombre d'or). Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Par symétrie par rapport au plan médiateur du segment BD, H est aussi le projeté orthogonal du point D sur (AC). Le rectiligne cherché est donc l'angle $\widehat{BHD}$. Dans le triangle AHD on a $DH=1\times\sin(\pi-3\pi/5)=\sin(2\pi/5)$. Dans le triangle isocèle BHD, on a, d'après le théorème de Pythagore généralisé, $\varphi^2=2DH^2-2DH^2\cos\widehat{BHD}$, d'où, sachant que $\varphi^2=\varphi+1$,

$$\cos^2\widehat{BHD}=\frac{2\sin^2(2\pi/5)-\varphi-1}{2\sin^2(2\pi/5)}$$

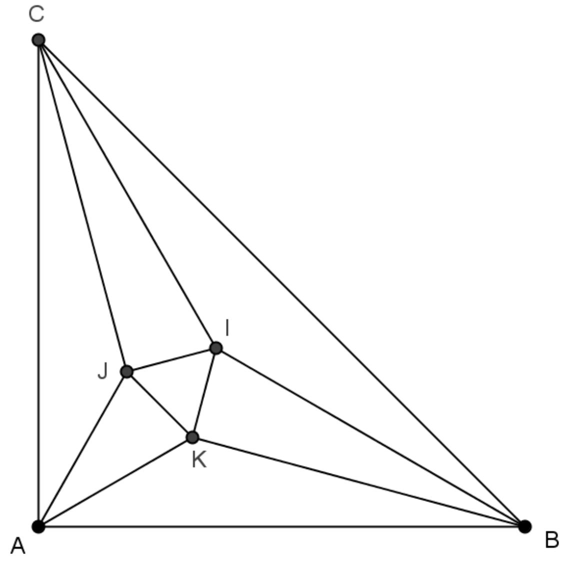
Or

$$\sin^2(2\pi/5)=1-\cos^2(2\pi/5)=1-\left(\frac{\varphi-1}{2}\right)^2=1+\frac{\varphi}{2}$$

Donc

$$\cos^2\widehat{BHD}=\frac{2+\varphi-\varphi-1}{2+\varphi}=\frac{1}{2+\varphi}=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Exercice 16.36 (Théorème de Morley).



Calcul de KA et KB. Par trisection, $\widehat{KAB} = \pi/2 \div 3 = \pi/6$. Par ailleurs, le triangle ABC étant rectangle isocèle en A, on a$\widehat{ABC} = \pi/4$, d'où ,$\widehat{ABK} = \pi/4 \div 3 = \pi/12$.
On applique la formule des sinus dans ABK, on obtient

$$\mathrm{KB} = \frac{\sin \pi/6}{\sin 3\,\pi/4} = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$\mathrm{KA} = \frac{\sin \pi/12}{\sin 3\,\pi/4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2 \times 2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

*Calcul de AJ.*En se plaçant dans le triangle AJC, on obtient le même calcul que celui de AK dans ABK, donc AJ = AK.
Calcul de BI. Par trisection, $\widehat{IBC} = \widehat{ABK} = \pi/12$. De même, $\widehat{ICB} = \pi/12$. Le triangle IBC est donc isocèle, et $\widehat{BIC} = \pi - 2\,\pi/12 = 5\,\pi/6$. De plus, le théorème de Pythagore dans ABC nous donne $\mathrm{BC} = \sqrt{2}$. On applique la formule des sinus dans IBC, on obtient

$$\mathrm{IB} = \frac{\sqrt{2}\sin \pi/12}{\sin 5\,\pi/6} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2 \times 2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}-1$$

Calcul de JK^2. On applique le théorème de Pythagore généralisé dans AJK. Sachant que AJ = AK on obtient $\mathrm{JK}^2 = 2\mathrm{AK}^2 - 2\mathrm{AK}^2 \cos \pi/6 = 2\mathrm{AK}^2(1 - \cos \pi/6)$.
Or

$$\mathrm{AK}^2 = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2^2} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{4} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$1 - \cos \pi/6 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

Donc

$$\mathrm{JK}^2 = 2 \times \frac{2-\sqrt{3}}{2} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 4\sqrt{3} + 3}{2} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2}$$

Calcul de IK^2. On applique le théorème de Pythagore généralisé dans BIK :

$$\mathrm{IK}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\sqrt{3}-1\right) \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

On a d'une part

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2=\frac{1}{2}+4-2\sqrt{3}=\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$$

D'autre part

$$2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(\sqrt{3}-1\right)\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}^2-1^2}{2}=\frac{2}{2}$$

D'où

$$\mathrm{IK}^2=\frac{9-4\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{2}=\frac{7-4\sqrt{3}}{2}$$

Le calcul de IJ^2 se faisant de la même façon dans le triangle CIJ que le calcul de IK^2, on obtient le même résultat, et l'on en conclut que le triangle IJK est équilatéral.

Exercice 17.94.

Soit H l'orthocentre du triangle ABC, on se place dans le cas ou H est à l'intérieur du triangle. Les angles sont tous aigus et les pieds A', B', C' des hauteurs issues respectivement de A, B, C sont sur les côtés du triangle. On a donc

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=-\frac{A'B}{A'C}=-\frac{AA'}{\tan\hat{B}}\times\frac{\tan\hat{C}}{AA'}=-\frac{\tan\hat{C}}{\tan\hat{B}}$$

Le point A' vérifie$A'=\alpha B+(1-\alpha)C$ avec

$$\alpha=\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=\frac{1}{1-\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}}=\frac{1}{1+\frac{\tan\hat{C}}{\tan\hat{B}}}=\frac{\tan\hat{B}}{\tan\hat{B}+\tan\hat{C}}$$

On a donc

$$A'=\frac{\tan\hat{B}}{\tan\hat{B}+\tan\hat{C}}B+\frac{\tan\hat{C}}{\tan\hat{B}+\tan\hat{C}}C$$

De même

$$B'=\frac{\tan\hat{A}}{\tan\hat{A}+\tan\hat{C}}A+\frac{\tan\hat{C}}{\tan\hat{A}+\tan\hat{C}}C$$

H est le point d'intersection de (AA') et (BB') donc$=(1-t)A+tA'=(1-k)B+kB'$. En remplaçant A' par son expression en fonction de B et C et B' par son expression en fonction de A et C on obtient trois équations d'inconnues t et k dont la résolution donne :

$$H=\frac{\tan\hat{A}}{\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}}A+\frac{\tan\hat{B}}{\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}}B+\frac{\tan\hat{C}}{\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}}C$$

Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC. Notons le résultat préliminaire suivant : soit P un point de BC, soit$\gamma=\widehat{BOP}$ et$\beta=\widehat{COP}$, alors

$$P=\frac{\sin\beta}{\sin\beta+\sin\gamma}B+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta+\sin\gamma}C$$

En effet, la formule des sinus appliquée aux triangles OPB et OPC donne$OP/\sin\hat{B}=PB/\sin\gamma$ et$OP/\sin\hat{C}=PC/\sin\beta$. Comme les angles à la base du triangle isocèle OBC sont égaux, on en déduit que$PB/PC=\sin\gamma/\sin\beta$, d'où la formule recherchée.

Ce préliminaire étant établi, nous allons l'appliquer avec le point P intersection de (AO) et (BC) (on se place dans le cas où O est à l'intérieur de ABC). Dans ce cas, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\beta=2\widehat{PAC}$. Or, dans le triangle isocèle OAC, $2\widehat{PAC}=\pi-\widehat{AOC}$. De plus, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{AOC}=2\hat{B}$. Donc$\sin\beta=\sin 2\hat{B}$. De même$\sin\gamma=\sin 2\hat{C}$, d'où

$$P = \frac{\sin 2\hat{B}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} B + \frac{\sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} C$$

On fait de même avec le point Q intersection de (BO) et (AC), puis en écrivant que O est l'intersection de (AP) et (BQ) on obtient finalement :

$$H = \frac{\sin 2\hat{A}}{\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} A + \frac{\sin 2\hat{B}}{\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} B + \frac{\sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}} C$$

Exercice 17.95.
Soit I le centre du cercle inscrit, soient A', B', C' les pieds des bissectrices issues respectivement de A, B, C. Le point A' vérifie$A' = \alpha B + (1-\alpha)C$avec

$$\alpha = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}} = \frac{1}{1 + \frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB + AC}$$

On a donc

$$A' = \frac{AC}{AB + AC} B + \frac{AB}{AB + AC} C$$

De même

$$B' = \frac{BC}{BA + BC} A + \frac{BA}{BA + BC} C$$

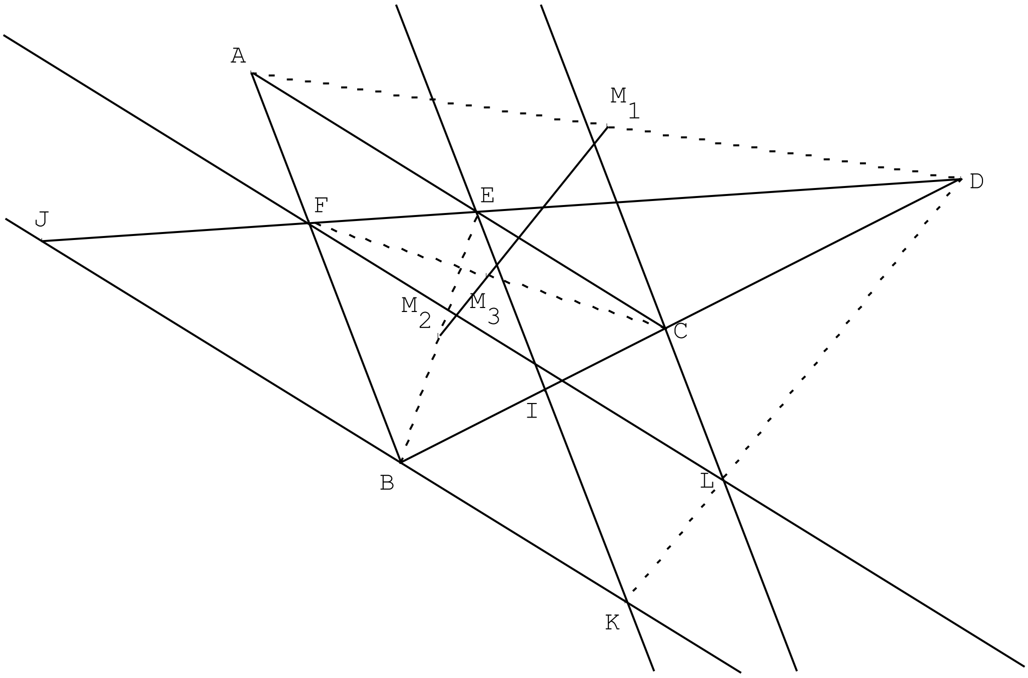
I est le point d'intersection de (AA') et (BB') donc$I = (1-t)A + tA' = (1-k)B + kB'$. En remplaçant A' par son expression en fonction de B et C et B' par son expression en fonction de A et C on obtient trois équations d'inconnues t et k, on trouve $k = \frac{AB+BC}{AB+BC+CA}$ et $= \frac{AB+BC}{AB+BC+CA}$. On en conclut que

$$I = \frac{BC}{AB + BC + CA} A + \frac{AC}{AB + BC + CA} B + \frac{CA}{AB + BC + CA} B$$

Exercice 17.96.
Soit M l'isobarycentre de A, B, C, D. On a $4M = A + B + C + D = 2P + 2R$, ce qui prouve que M est sur (PR). De même $4M = 2Q + 2S$, ce qui prouve que M est sur (QS). Par conséquent, M=I. Soit G le centre de gravité du triangle ABC, c'est l'isobarycentre des points A, B, C, d'où $4I = 3G + D$. Ceci prouve que les points D, I, G sont alignés. De plus, il en résulte que $\overrightarrow{GD} = 1/4\,\overrightarrow{GI}$. On en déduit que le lieu de I lorsque D parcourt le cercle circonscrit à ABC est l'image de ce cercle par l'homothétie de centre G, de rapport ¼.

Exercice 17.97 (Droite de Gergonne).
Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes au centre du cercle inscrit, on peut donc appliquer le théorème de Desargues aux triangles ABC et A'B'C'. Les points P, Q, R étant les points d'intersection des côtés homologues, d'après ce théorème ils sont alignés.

Exercice 17.98.



Notons ABCDEF le quadrilatère complet. On rapporte le plan au repère barycentrique ABC. On pose$D = \lambda B + (1-\lambda)C$ et$E = \mu A + (1-\mu)C$. Puisque le point F est le point d'intersection des droites (AB) et (DE), il existe deux réels ν et k vérifiant

$$\nu A + (1-\nu)B = F = kE + (1-k)D$$

On en déduit que

$$F = \frac{\lambda\mu - \mu}{\lambda - \mu}A + \frac{\lambda - \lambda\mu}{\lambda - \mu}B$$

Soit K le milieu de CF, alors$2(\lambda-\mu)K = (\lambda\mu - \mu)A + (\lambda - \lambda\mu)B + (\lambda - \mu)C$.
Soit I le milieu de AD, alors $2I = A + \lambda B + (1-\lambda)C$.
Soit J le milieu de BE, alors $2J = \mu A + B + (1-\mu)C$.
On a donc$2(\lambda-\mu)K = 2\lambda J - 2\mu J$, ce qui prouve que les points I, J, K sont alignés.

Exercice 17.99.

1. Les égalités de rapport impliquent que les coordonnées barycentriques de M par rapport à (A,B) sont les mêmes que les coordonnées barycentriques de N par rapport à (C,D). Il existe donc un réel k tel que$M = kA + (1-k)B$ et$N = kC + (1-k)D$.
   Notons I, J, K les milieux respectifs des segments AC, BD, MN, on a alors
   $$2K = M + N = k(A+C) + (1-k)(B+D) = 2kI + 2(1-k)J$$
   Ceci prouve que les points I, J, K sont alignés.
2. Soient A, B, C trois points alignés, soient A', B', C' leurs images. Puisque f est affine, $\overline{AB}/\overline{AC} = \overline{A'B'}/\overline{A'C'}$. Il suffit alors d'appliquer 1.

Exercice 17.100.

$$\begin{cases} (-\alpha+\beta+\gamma)G_1 = -\alpha A + \beta B + \gamma C & L_1 \\ (\alpha-\beta+\gamma)G_2 = \alpha A - \beta B + \gamma C & L_2 \\ (\alpha+\beta-\gamma)G_2 = \alpha A + \beta B - \gamma C & L_3 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$: $(-\alpha+\beta+\gamma)G_1 + (\alpha-\beta+\gamma)G_2 = 2\gamma C$, ce qui prouve que le point C appartient à la droite (G_1G_2).

$L_1 + L_3: (-\alpha + \beta + \gamma)G_1 + (\alpha + \beta - \gamma)G_3 = 2\beta B$, ce qui prouve que le point B appartient à la droite (G_1G_3).
$L_3 + L_2: (\alpha + \beta - \gamma)G_3 + (\alpha - \beta + \gamma)G_2 = 2\alpha A$, ce qui prouve que le point A appartient à la droite (G_3G_2).
Par ailleurs,

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 + L_3: (-\alpha + \beta + \gamma)G_1 + (\alpha - \beta + \gamma)G_2 + (\alpha + \beta - \gamma)G_3 &= \alpha A + \beta B + \gamma C \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)G_0 \end{aligned}$$

D'où

$$2\gamma C + (\alpha + \beta - \gamma)G_3 = (\alpha + \beta + \gamma)G_0$$
$$2\beta B + (\alpha - \beta + \gamma)G_2 = (\alpha + \beta + \gamma)G_0$$
$$2\alpha A + (-\alpha + \beta + \gamma)G_1 = (\alpha + \beta + \gamma)G_0$$

Par conséquent les droites (CG_3), (BG_2) et (AG_1) sont concourantes en G_0.

Exercice 17.101.
Soit G l'isobarycentre des cinq points. Soient I le milieu A_1A_2 et J l'isobarycentre de A_3, A_4, A_5. On a

$$5G = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 2I + 3J$$

Par conséquent G est sur la droite (IJ). On prouve de façon analogue qu'il est sur l'une quelconque des neuf autres droites joignant le milieu du segment formé par deux de ces points à l'isobarycentre des trois autres.
Soient maintenant K l'isobarycentre de A_2, A_3, A_4, A_5. On a

$$5G = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = A_1 + 4K$$

Par conséquent G est sur la droite (A_1K). On prouve de façon analogue qu'il est sur l'une quelconque des quatre autres droites joignant un point à l'isobarycentre des quatre autres.

Exercice 17.102.
Il existe deux réels α et β compris entre 0 et 1 tels que

$$I = \alpha A + (1 - \alpha)B$$
$$J = \beta A + (1 - \beta)D$$

Grâce à l'égalité des côtés opposés d'un parallélogramme, on a

$$I' = \alpha D + (1 - \alpha)C$$
$$J' = \beta B + (1 - \beta)C$$

On en déduit que

$$\beta I - \alpha J = \beta(1 - \alpha)B - \alpha(1 - \beta)D$$
$$(1 - \alpha)J' - (1 - \beta)I' = \beta(1 - \alpha)B - \alpha(1 - \beta)D$$

Ainsi, si les droites (IJ) et (BD) sont sécantes, alors les droites (I'J') et (BD) sont sécantes au même point, et si les droites (IJ) et (BD) ont la même direction, alors les droites (I'J') et (BD) ont la même direction. Le lieu cherché est donc sur la droite (BD). Par ailleurs les coordonnées barycentriques par rapport à B et D du point d'intersection des droites (IJ) et (I'J') sont $\frac{\beta(1-\alpha)}{\beta-\alpha}$ et $-\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta-\alpha}$. Lorsque $\alpha<\beta$ la première est négative et la seconde positive, et inversement lorsque $\alpha>\beta$. Le lieu cherché est donc l'extérieur de la diagonale BD privé de B et D.

Exercice 17.103.
Considérons l'homothétie de centre E, envoyant A sur C. Cette homothétie envoie la droite (BD) sur elle-même, et la droite (AB) sur la droite (CD) car celles-ci sont

parallèles. Elle envoie donc le point B sur le point D. Puisqu'elle envoie A sur C, elle envoie le milieu de AB sur le milieu de CD. On en conclut que le point E est aligné avec les milieux de AB et CD. On montre de façon analogue que le point F est aligné avec ces deux milieux en considérant l'homothétie de centre F envoyant A sur D.

Exercice 17.104 (Théorème de Pascal).
Soit h_1 l'homothétie de centre O telle que $h_1(A) = C$. L'hypothèse (AC')//(A'C) implique que $h_1(C') = A'$. Soit h_2 l'homothétie de centre O telle que $h_2(C) = B$. L'hypothèse (BC')//(B'C) implique que $h_2(B') = C'$. Les homothéties de centre O forment un groupe commutatif, donc h_2h_1 est une homothétie h_3, et $h_3 = h_1h_2$. On a $h_3(A) = h_2h_1(A) = B$, et $h_3(B') = h_1h_2(B') = A'$. On en conclut que (AB')//(A'B).

Exercice 17.105.
La droite de Steiner d'un point M est l'image de la droite de Simson de ce point M par l'homothétie de centre M, de rapport 2.

Exercice 17.106 (Construction de cercles).
1. Soient deux droites d et d' sécantes en O, et soit M un point non situé sur une de ces droites. Construisons un cercle tangent à d et d', et passant par M. Soient A et A' deux points situés respectivement sur d et d', tels que M soit à l'intérieur de l'angle $\widehat{AOA'}$. Soit I un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOA'}$. Soit c le cercle de centre I tangent à d et d'. Soient B et B' les deux points d'intersection de la droite (OM) avec le cercle c. Alors l'image de c par l'homothétie de centre O envoyant B sur M, et l'image de c par l'homothétie de centre O envoyant B' sur M sont les deux cercles passant par M tangents à d et d'.
2. Soient deux droites d et d' sécantes en O, et soit σ un cercle. Construisons un cercle c tangent à d, d', et σ. Soit K le point de contact de c et σ. Alors K est le centre d'une homothétie envoyant σ sur c. Soit γ un cercle de centre ω tangent à d et d'. Alors O le centre d'une homothétie envoyant γ sur c. Soit S le centre d'une homothétie envoyant σ sur γ. Alors les points O, K, S sont alignés. Pour construire c, ilsuffit donc de procéder ainsi : on construit un centre S, puis un point K, intersection de (OS) et σ, puis le cercle tangent à d et d' passant par K. Notons que ω peut être au choix sur l'une ou l'autre des deux bissectrices du couple (d, d'), et qu'ilpeut y avoir deux choix pour S, chacun donnant deux possibilités pour K. Il peut donc y avoir jusqu'à 8 cercles solutions.

Exercice 17.107 (Un lieu).
Le centre de gravité G est l'image du point C par l'homothétie de centre I, de rapport 1/3. Par conséquent le lieu cherché est l'image du cercle circonscrit par cette homothétie.

Exercice 17.108 (Configuration de Poncelet).
On note A (resp. C, E) le centre de l'homothétie négative transformant C_1 en C_2 (resp. C_2 en C_3 et C_1 en C_3), et l'on note h_A (resp. h_C, h_E) cette homothétie. On note B (resp. D, F) le centre de l'homothétie positive transformant C_1 en C_2 (resp. C_2 en C_3 et C_1 en C_3), et l'on note h_B (resp. h_D, h_F) cette homothétie. La composée $h_Ch_A$est une homothétie positive, et elle envoie C_1 sur C_3, donc h_Ch_A=h_F. On en déduit que A, C, F sont alignés. On prouve de même que B,C,E sont alignés, ainsi que B, D, F puis A, C, E.

Exercice 17.109.
Soit O le point d'intersection de d_1 et d_2, soit Ox) une demi-droite contenue dans d_1, soit Oy) l'image de Ox) par la symétrie d'axe (OP). Soit C un point de Ox) et soit D le point de Oy) tel que OC/OD=k. Comme la demi-droite OP) est la bissectrice de OCD issue de O, elle coupe le segment CD en un point E tel que EC/ED=k. Soient C' et D' les images respectives de C et D par l'homothétie de centre O envoyant E sur P, alors PC'/PD'=k. Soit A_2 le point d'intersection de d_2 et de la parallèle à d_1 passant par D', soit A_1 le point d'intersection de d_1 et (PA_2), d'après le théorème de Thalès $PA_1/PA_2=k$.

Exercice 17.110 (Droite et cercle d'Euler).
Soit ABC un triangle. Soit H l'orthocentre de ABC, soit O le centre du cercle circonscrit, soit G le centre de gravité. Soient I, J, K les milieux respectifs de BC, AC, AB, et soient A', B', C' les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B, C.

1. Soit h l'homothétie de centre G, de rapport $-1/2$. Puisque le centre de gravité est aux 2/3 de chaque médiane, on a $h(A) = A'$. L'image par h de la hauteur issue de A est donc la parallèle à celle-ci passant par A', à savoir la médiatrice de BC. Il en est de même pour les deux autres hauteurs, par conséquent l'homothétie h envoie l'orthocentre sur le centre du cercle circonscrit. On en conclut que $\overrightarrow{GO} = -1/2\,\overrightarrow{GH}$.
2. Soit ABC un triangle, soient I, J, K les milieux respectifs de BC, AC, AB, soient A', B', C' les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B, C, soit H l'orthocentre de ABC, soient E, F, D les milieux respectifs de AH, BH, CH.
   En appliquant la propriété de la droite des milieux dans les triangles ABC et ABH, on prouve que (KJ)//(BC) et (KF)//(AH). Or, les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires. Donc les droites (KJ) et (KF) sont perpendiculaires. En procédant de façon analogue avec les trois autres sommets, on prouve que le quadrilatère KJDF est un rectangle. Par conséquent les points K, J, D, F sont sur le cercle X de diamètres KD et JF. Un raisonnement analogue permet de démontrer que le quadrilatère KIDE est un rectangle, par conséquent les points I et E sont aussi sur le cercle X, et IE est un diamètre de X.
   Le triangle EA'I est rectangle en A', donc le point A' est sur le cercle de diamètre EI, à savoir X. On prouve de façon analogue que B' et C' sont sur le cercle X.
3. L'homothétie de centre G, de rapport $-1/2$ envoie le triangle ABC sur le triangle A'B'C'. Par conséquent elle envoie le cercle circonscrit au triangle ABC sur le cercle circonscrit au triangle A'B'C', à savoir X.
4. Les droites (KF) et (OI) sont parallèles, car elles ont la droite (BC) comme perpendiculaire commune. De même, les droites (FI) et (OK) sont parallèles, car elles ont pour perpendiculaire commune (AB). Par conséquent, OIFK est un parallélogramme, d'où $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{KF}$. Or, d'après la propriété de la droite des milieux appliquée au triangle ABH, $\overrightarrow{KF} = 1/2\,\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EH}$. Donc $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{EH}$, ce qui prouve que OIHE est un parallélogramme. Le centre du cercle X étant le milieu de la diagonale IE, c'est aussi le milieu de la diagonale OH. Autrement dit, le centre O' du cercle d'Euler est le milieu du segment joignant l'orthocentre H au centre du cercle circonscrit O. Par conséquent, l'homothétie de centre H, de rapport 1/2, envoie O sur O'. De plus, d'après la question 1, le rapport des rayons du cercle d'Euler et du cercle circonscrit est 1/2. Par conséquent, l'homothétie de centre H, de rapport 1/2, envoie le cercle circonscrit sur le cercle d'Euler.
5. On note i_1, j_1, k_1 les projetés orthogonaux de M_1 respectivement sur (BC), (AC), (AB). De même pour M_2. D'après la relation de Chasles :

$$\big((k_1j_1),(k_2i_2)\big) = \big((k_1j_1),(k_1A)\big) + \big((k_1A),(k_2B)\big) + \big((k_2B),(k_2i_2)\big)$$

Or $\big((k_1A),(k_2B)\big) = 0$ car les deux droites ont pour perpendiculaire commune (AB). Par ailleurs, les triangles rectangles AM_1k_1 et AM_1j_1 ont la même hypoténuse, donc leurs sommets sont cocycliques. D'après la condition de cocyclicité,

$$\big((k_1j_1),(k_1A)\big) = \big((M_1j_1),(M_1A)\big)$$

De même,$\big((k_2B),(k_2i_2)\big) = \big((M_2B),(M_2i_2)\big)$, d'où

$$\big((k_1j_1),(k_2i_2)\big) = \big((M_1j_1),(M_1A)\big) + \big((M_2B),(M_2i_2)\big)$$

On en déduit, grâce à la relation de Chasles, que

$$\big((k_1j_1),(k_2i_2)\big) = \big((M_1j_1),(AC)\big) + \big((AC),(AM_1)\big) + \big((BM_2),(BC)\big) + \big((BC),(M_2i_2)\big)$$

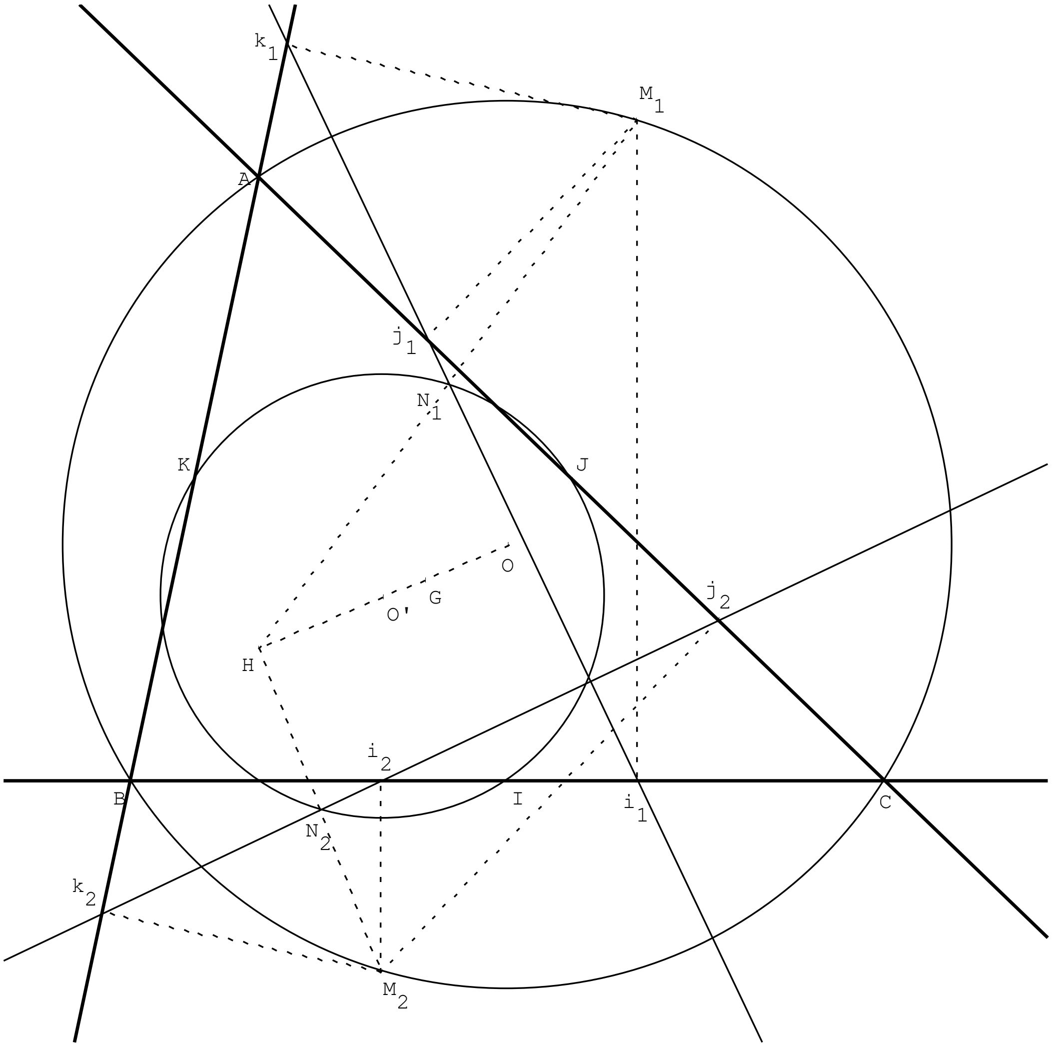
Or, les angles $\big((M_1j_1),(AC)\big)$ et $\big((BC),(M_2i_2)\big)$ sont droits, donc leur somme est nulle. Ainsi,

$$\big((k_1j_1),(k_2i_2)\big) = \big((AC),(AM_1)\big) + \big((BM_2),(BC)\big)$$

Par ailleurs, d'après la condition de cocyclicité, $\big((AC),(AM_1)\big) = \big((M_2C),(M_2M_1)\big)$, et$\big((BM_2),(BC)\big) = \big((M_1M_2),(M_1C)\big)$, d'où

$$\big((k_1j_1),(k_2i_2)\big) = \big((M_2C),(M_2M_1)\big) + \big((M_1M_2),(M_1C)\big) = \big((M_2C),(M_1C)\big)$$

Le dernier angle est un angle droit car C est un point du cercle de diamètre M_1M_2. On en conclut que les droites de Simson (k_1j_1) et (k_2i_2) sont perpendiculaires.
Soit R le point d'intersection de ces deux droites. Soit N_1 le milieu de HM_1, et soit M_2 le milieu de HM_2. On sait que H est sur la droite de Steiner du point M_1 (exercice 15.30), et que la droite de Simson du point M_1 est l'image de la droite de Steiner du point M_1 par l'homothétie de centre M_1, de rapport ½. Par conséquent, N_1 est sur la droite de Simson de M_1. De même, N_2 est sur la droite de Simson de M_2. Ces deux droites étant perpendiculaire en R, le triangle N_1RN_2 est rectangle en R. Par ailleurs, l'homothétie de centre H, de rapport ½, envoie le cercle de diamètre M_1M_2 sur le cercle de diamètre N_1N_2. Or le cercle de diamètre M_1M_2 est le cercle circonscrit. Donc, d'après la question 4, le cercle de diamètre N_1N_2 est le cercle d'Euler. Commele triangle N_1RN_2 est rectangle en R, on en conclut que R appartient au cercle d'Euler.



Exercice 17.111.
Considérons le quart de tour de centre C envoyant la demi-droite CN) sur la demi-droite CM). Celui-ci envoie le cercle C_2 sur le cercle C_1, par conséquent il envoie le point N, intersection de la demi-droite CN) et du cercle C_2, sur le point M, intersection de la demi-droite CM) et du cercle C_1. Il en résulte que le triangle CMN est rectangle et isocèle en C. Par conséquent le triangle CMI est rectangle isocèle en I, donc I est l'image de M par la similitude de centre C, de rapport$1/\sqrt{2}$, d'angle $\pi/4$. L'image de B par cette similitude étant le centre du carré ABCD, le lieu cherché est le cercle circonscrit à ABCD.

Exercice 17.112.
Puisque I est le milieu de A'H, on a
$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AH}$$
Par ailleurs :
- $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA'}$ car H est le projeté orthogonal de A' sur (AH).
- $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{A'C}$ car A' et le milieu de [BC].
- $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}$ car H est le projeté orthogonal de A' sur (AH).

Donc
$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}$$
Le triangle ABC est isocèle en A, donc la médiane (AA') est aussi une hauteur. Ainsi, B et C ont tous deux pour projeté orthogonal sur (AA') le point A', d'où $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CH}$.

Or $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CH}$, car H est le projeté orthogonal de A' sur (CH). Donc

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CH}$$

Des trois égalités démontrées ci-dessus on déduit que :

$$2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BH} = \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}$$
$$= \overrightarrow{AH} \cdot \left(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

On en conclut que les droites (AI) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 17.113.

$$2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{JK} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OK}\right) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OH}$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$$

Exercice 17.114.

Soit B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. On cherche l'ensemble des points M du plan (de l'espace) tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$. C'estl'ensemble des points M du plan (de l'espace) dont le projeté orthogonal H sur la droite (AB) vérifie $\overline{AH} \times \overline{AB} = k$. Il n'y a qu'un seul point H vérifiant cette condition, l'ensemble cherché est donc la droite (le plan) perpendiculaire à (AB) passant par H.

Exercice 17.115 (Droite d'Euler).

Soit ABC un triangle, on rapporte le plan au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \vec{j}\right)$. Dans ce repère, $A = (0; 0)$, $B = (1; 0)$, $C = (u, v)$.

Coordonnées de l'orthocentre H : la hauteur issue de C a pour équation $x = u$, la hauteur issue de B a pour équation $ux + vy - u = 0$, d'où $H = \left(u; \frac{u-u^2}{2}\right)$.

Coordonnées du centre du cercle circonscrit O : la médiatrice de AB a pour équation $x = 1/2$, la médiatrice de AC a pour équation $ux + vy - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 0$, d'où $O = \left(\frac{1}{2}; \frac{v^2+u^2-u}{2v}\right)$.

Coordonnées du centre de gravité G : c'est l'isobarycentre de A, B, C, d'où $G = \left(\frac{1+u}{3}; \frac{v}{3}\right)$.

On a alors $\overrightarrow{GO} = \left(\frac{1-2u}{6}; \frac{v^2+3u^2-3u}{6v}\right)$ et $\overrightarrow{GH} = \left(\frac{-1+2u}{3}; \frac{-v^2-3u^2+3u}{3v}\right)$, d'où $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$, ce qui prouve l'alignement des trois points.

Exercice 17.116.

Soient $d_1 : A_1 + k_1\overrightarrow{v_1}$ et $d_2 : A_2 + k_2\overrightarrow{v_1}$ deux droites non coplanaires. Un vecteur directeur de la perpendiculaire commune est $\vec{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$. Soit π_i le plan passant par A_i, dirigé par $\overrightarrow{v_i}$ et $\vec{n}$. Alors la perpendiculaire commune à d_1 et d_2 est la droite d'intersection des plans π_1 et π_2. Pour trouver un système d'équations paramétriques de cette droite, il suffit donc de déterminer une équation cartésienne pour chaque plan π_i, puis de résoudre le système formé par ces deux équations cartésiennes.

Exercice 17.117.

1. Soit π un plan dont on connaît un point et deux vecteurs directeurs. On peut déterminer une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point, cherchons la distance de M à π. C'est la norme du vecteur $\overrightarrow{MH}$, où H est le projeté orthogonal de M sur π. Le vecteur$\vec{n}(a, b, c)$ est normal à π, donc il est colinéaire à $\overrightarrow{MH}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MH} = k\vec{n}$. Donc
$$(1) : \mathrm{d}(M, \pi) = |k| \times \|\vec{n}\| = |k|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Déterminons k. Posons $H = (x, y, z)$. La relation $\overrightarrow{MH} = k\vec{n}$ nous donne le système

$$\begin{cases} x - x_0 = ka \\ y - y_0 = kb \\ z - z_0 = kc \end{cases}$$

On remplace x, y, z dans l'équation cartésienne de π (car $H \in \pi$), on obtient

$$k(a^2 + b^2 + c^2) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

Ceci permet de déterminer k. En remplaçant dans (1), on en déduit que

$$\mathrm{d}(A, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2. Soit $d: A + t\vec{v}$ une droite. Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point, cherchons la distance de M à d. C'est la norme du vecteur $\overrightarrow{MH}$, où $H(x, y, z)$ est le projeté orthogonal de M sur d. On a $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MA} + t\vec{v}$, d'où $0 = \overrightarrow{MH} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{MA} \cdot \vec{v} + t\|\vec{v}\|^2$. Ainsi,
$$t = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$
Connaissant le paramètre du point H, on peut alors calculer ses coordonnées, puis la norme du vecteur $\overrightarrow{MH}$.
3. Soient $d_1: A_1 + k_1\overrightarrow{v_1}$ et $d_2: A_2 + k_2\overrightarrow{v_1}$ deux droites non coplanaires. On cherche le paramètre k_1 du point M_1 et le paramètre k_2 du point M_2 tels que $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$ et $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$. Ceci nous donne un système de deux équations à deux inconnues, que l'on résout. On calcule alors les coordonnées des points M_1 et M_2. La distance cherchée est M_1M_2.

Exercice 17.118 (Trièdre trirectangle).

1. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AH}$.
La droite (BA) est perpendiculaire aux droites (AC) et (AD), donc elle est perpendiculaire au plan (ACD). Il en résulte que $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.
$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BCD).
On a donc $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$, ce qui prouve que (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle BCD. On prouve de façon analogue que (CH) est la hauteur issue de C, d'où H est l'orthocentre de BCD.
2. Soit C' le pied de la hauteur issue de C dans le triangle BCD. La droite (AC) est perpendiculaire au plan (ABD) car elle est perpendiculaire aux droites (AB) et (AD), il en résulte que le triangle ACC' est rectangle en A. D'après la proposition 13.17, on en déduit que :
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC'^2} + \frac{1}{AC^2}$$
On a $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{BD}$. Le premier terme est nul car H est le projeté orthogonal de A sur (BCD), le second terme est nul car H est l'orthocentre de BCD, donc $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD} = 0$. Ceci prouve que C' est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABD. Comme celui-ci est rectangle en A, on a, d'après la proposition 13.17 :
$$\frac{1}{AC'^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$$
Des deux relations précédentes on déduit que
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$$
3. $AD^2 + BC^2 = AD^2 + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Le dernier terme est nul car le triangle ABC est rectangle en A, le premier et le troisième terme donnent BD^2 d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABD. On obtient donc $AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2$.
Par ailleurs le deuxième et le troisième terme donnent CD^2 d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ACD. On obtient ainsi $AD^2 + BC^2 = CD^2 + AB^2$.

Exercice 17.119.

1. Soit ABC un triangle, soit A'B'C' un triangle dont ABC est le projeté orthogonal. Par translation on peut se ramener au cas où A et A' sont confondus. On se place alors dans un repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, où $\vec{\jmath}$ est un vecteur du plan (ABC). On note $C = (a; b; 0)$, $C' = (a; b; x)$, $B' = (1; 0; t)$. Le triangle AB'C' est équilatéral si et seulement si $AB'^2 = AC'^2$ et $AC'^2 = B'C'^2$. On obtient le système
$$\begin{cases} 1 + t^2 = a^2 + b^2 + x^2 \\ a^2 + b^2 + x^2 = (a-1)^2 + b^2 + (x-t)^2 \end{cases}$$
La deuxième équation nous donne
$$x = \frac{1}{2t}(1 - 2a + t^2)$$
En remplaçant dans la première on obtient
$$3t^4 - (4a^2 + 4b^2 - 4a - 2)t^2 - (1 - 2a)^2 = 0$$
C'est une équation bicarré dont le discriminant est positif et dont le produit des racines est négatif, il y a donc au moins une solution réelle.
2. Cela revient à prouver que tout triangle est la projection orthogonale sur son plan d'un triangle rectangle isocèle ; en effet on obtient alors le 4ème sommet du carré par symétrie par rapport au centre de la diagonale puisque la projection orthogonale conserve le milieu. On procède alors comme au 1 avec les conditions $AB'^2 = AC'^2$ et $AB'^2 + AC'^2 = B'C'^2$.
3. On trouve un triangle rectangle isocèle OA'B' dont OAB est la projection orthogonale, on définit C' par $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{OB'}$, puis C comme le projeté orthogonal de C'.

Exercice 17.120 (Construction d'un trièdre équilatère).

Le plan (ADE) est le plan médiateur de BC donc il contient toutes les droites passant par D et orthogonales à (BC) ; en particulier (DF). Le plan (ADE) contient les points F, A, E, de même que le plan (ABC), ces points sont donc alignés sur la droite d'intersection de ces deux plans.
Par ailleurs le plan (ADE) contient toutes les droites passant par A et orthogonales à (BC) ; en particulier il contient la droite (AH), où H désigne le projeté orthogonal de A sur la plan (BCD). Ceci prouve d'une part que H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ADE, d'autre part que (DH) est la hauteur issue de D dans le triangle BCD. On prouve de même que (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle BCD ; ainsi H est l'orthocentre du triangle BCD. Comme le triangle BCD est équilatéral, H est aussi le centre de gravité du triangle BCD.
De ceci on déduit d'une part que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE}\right) = AH^2 - HD \times HE$, d'autre part que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE}$, d'où
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{AH^2 - HD \times HE}{AE^2}$$
De plus :
$$HD \times HE = \frac{2}{3}DE \times \frac{1}{3}DE = \frac{2}{9}DE^2$$

$$AH^2 = AD^2 - HD^2 = AD^2 - \frac{4}{9}DE^2$$
$$DE^2 = BD^2 - BE^2 = \frac{3}{4}BD^2$$

On en déduit que

$$HD \times HE = \frac{1}{6}BD^2$$
$$AH^2 = AD^2 - \frac{1}{3}BD^2$$

d'où :

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{2AD^2 - BD^2}{2AE^2}$$

D'après le théorème de Pythagore généralisé dans ABD, $2AD^2 - BD^2 = 2AD^2 \cos\theta$. On a donc

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \left(\frac{AD}{AE}\right)^2 \cos\theta$$

Or $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AE} = \frac{1}{\cos(\theta/2)}$ et $(\cos(\theta/2))^2 = \frac{1+\cos\theta}{2}$.
On en conclut que :

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

Exercice 17.121 (Tétraèdre orthocentrique).

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{DB} + \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\right) = \vec{0}$.
2. Deux des termes de la relation démontrée à la question 1 sont nuls, donc le troisième est nul.
3. Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD), on a
$$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CD} = \underbrace{\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CD}}_{=0} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$$
On en déduit l'équivalence entre (a) et (b). On a (b) implique (c) de façon évidente. Si (c) est vrai alors le raisonnement ci-dessus permet de prouver que le tétraèdre ABCD a deux paires de côtés opposés orthogonaux, d'où (a).
Si (a) et (b) sont vrais, soit A' le pied de la hauteur issue de A dans ABC. Soit I le projeté orthogonal de D sur (ABC). D'après (b), I est l'orthocentre de ABC, donc I est sur la hauteur (AA'). Ainsi, (DI) est la hauteur issue de D dans le triangle AA'D. Par ailleurs, $\overrightarrow{DA'}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ d'après (a). On peut donc utiliser le même raisonnement pour démontrer que H est sur (A'D), ainsi (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle AA'D. On en déduit que les droites (DI) et (AH) sont sécantes en l'orthocentre O de AA'D. On a
$$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BD} = \underbrace{\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BD}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{BD}}_{=0}$$
On prouve de même que $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$, donc (CO) est la perpendiculaire au plan (ABD) passant par C. On prouve de même que (BO) est la perpendiculaire au plan (ACD) passant par B, d'où (d).
Si (d) est vrai, soit O le point de concours des hauteurs de ABCD, alors
$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = \underbrace{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BD}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BD}}_{=0}$$

donc les côtés opposés (AC) et (BD) sont orthogonaux. On raisonne de même sur les autres paires de côtés opposés, ce qui prouve (a).

Exercice 17.122 (Formule de Lagrange).
Dans un repère orthonormé direct d'origine O, considérons les points $M = (x; y; z)$ et $M = (x'; y'; z')$. Alors la relation demandée est équivalente à

$$\left\|\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{OM'}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|^2$$

Pour démontrer ceci, il suffit de remarquer que

$$\left\|\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|^2\cos^2\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)$$

Et

$$\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{OM'}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|^2\sin^2\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)$$

Exercice 17.123.
D'après la relation de Chasles,

$$\big((A'B'),(CD)\big) = \big((A'B'),(A'B)\big) + \big((A'B),(CD)\big) = \big((A'B'),(A'B)\big) + \big((DB),(DC)\big)$$

Les triangles rectangles AA'B et AB'B ont la même hypoténuse, donc les points A, B, A', B' sont cocycliques, d'où

$$\big((A'B'),(A'B)\big) = \big((AB'),(AB)\big) = \big((AC),(AB)\big)$$

Les points A, B, C, D sont cocycliques, donc

$$\big((AC),(AB)\big) = \big((DC),(DB)\big)$$

On en déduit que

$$\big((A'B'),(CD)\big) = \big((DC),(DB)\big) + \big((DB),(DC)\big) = 0$$

Les droites (A'B') et (CD) sont donc parallèles.
Soit O le point d'intersection de (AC) et (BD), soit H l'orthocentre de OCD, comme (A'B')//(CD), les droites (OH) et (A'B') sont perpendiculaires. On en déduit que

$$0 = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OD'}\cdot\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{OA'}$$

Ceci prouve que les points A', B', C', D' sont cocycliques.

Exercice 17.124.
Soit ABCD le tétraèdre, O son centre, et Σ la sphère circonscrite au tétraèdre. Le triangle sphérique ABC est équilatéral, on cherche la longueur a de son côté. D'après les formules de Gauss $\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cos 2\pi/3$, ce qui conduit à l'équation $3\cos^2 a - 2\cos a - 1 = 0$. Les solutions sont 1 et -1/3, par conséquent $a = \cos^{-1}(-1/3)$.

Exercice 17.125.
Notons O le centre de la Terre, J le point de latitude nulle et de longitude$\pi/2$. Fixons le rayon de la Terre comme unité de longueur, alors le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{ON}\right)$ est orthonormé direct.
Soit M_i un point de latitude $\lambda_i$et de longitude θ_i. On cherche l'angle $\varphi = \widehat{M_1OM_2}$, il suffit pour cela de connaître son cosinus. On a $\cos\varphi = \overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2}$. Notons H_i le point d'intersection de l'équateur et du méridien passant par M_i, alors

$$\overrightarrow{OM_\iota} = \cos\lambda_i\,\overrightarrow{OH_\iota} + \sin\lambda_i\,\overrightarrow{OH_\iota}$$

De plus

$$\overrightarrow{OH_1}\cdot\overrightarrow{OH_2} = 1\times 1\cos\left(\overrightarrow{OH_1},\overrightarrow{OH_2}\right) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

et

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{ON}=0=\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OH'}$$

Donc

$$\cos\varphi=\cos\lambda_1\cos\lambda_2\cos(\theta_2-\theta_1)+\sin\lambda_1\sin\lambda_2$$

Calculons maintenant le cap. Considérons le triangle sphérique NM_1M_2, notons µ l'angle sphérique en M_1 (le cap cherché), ν l'angle sphérique en N, et $m=\widehat{NOM_2}$.
On applique la formule des sinus au triangle sphérique NM_1M_2, on obtient

$$\frac{\sin\mu}{\sin m}=\frac{\sin\nu}{\sin\varphi}$$

Sachant que φ a été calculé ci-dessus, que $m=\pi/2-\lambda_2$, et que $\nu=\theta_1-\theta_2$, on en déduit sin µ puis µ.

Exercice 17.126.
On considère le point A du cercle trigonométrique correspondant à l'angle $-a$, et le point B correspondant à l'angle b. Alors, d'après la relation de Chasles,

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=-(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=a+b$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos(a+b)$$

Par ailleurs, dans le repère orthonormé associé au cercle trigonométrique,
$A=(\cos -a\,,\sin -a)=(\cos a\,,-\sin a)$, et $B=(\cos b\,,\sin b)$. On en déduit que

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

En égalant les deux expressions, on en conclut que

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

Vérifions maintenant le théorème de Pythagore généralisé :

$$a^2=BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

Exercice 17.127.
Formules d'addition du cosinus : notons R_a, R_b, R_{a+b} les rotations vectorielles d'angles respectifs a, b, $a+b$. Choisissons une base orthonormée, les matrices des ces rotations sont respectivement

$$\begin{pmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos b & -\sin b\\ \sin b & \cos b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos(a+b) & -\sin(a+b)\\ \sin(a+b) & \cos(a+b)\end{pmatrix}$$

Par ailleurs, on a $R_aR_b=R_{a+b}$. En effectuant le produit des deux premières matrices, puis en comparant avec la troisième, on en déduit les formules d'addition du cosinus et du sinus.
Formule de Gauss : Reprenons les notations du paragraphe 17.4.5. Rapportons l'espace au repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, où $\vec{\imath}=\overrightarrow{OA}$, B est dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, et C dans le demi-espace bordé par $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ contenant $\vec{k}$. On a

$$Mat_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\overrightarrow{OC})=\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\cos\alpha\\ \sin b\sin\alpha\end{pmatrix}$$

Soit $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$ la base orthonormée directe telle que $\vec{\jmath}'=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{k}'=\vec{k}$. On a

$$Mat_{(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')}(\overrightarrow{OC})=\begin{pmatrix}\sin a\cos\beta\\ \cos a\\ \sin a\sin\beta\end{pmatrix}$$

Par ailleurs, la formule de changement de base nous donne

$$Mat_{(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')}(\overrightarrow{OC})=Mat_{(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')}(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})Mat_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\overrightarrow{OC})$$

Mais $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est l'image de $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$ par la rotation r d'axe $(O,\vec{k})$, d'angle $\pi/2-c$, donc

$$Mat_{(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})}(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) = Mat_{(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2-c) & -\sin(\pi/2-c) & 0 \\ \sin(\pi/2-c) & \cos(\pi/2-c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sin(c) & -\cos(c) & 0 \\ \cos(c) & \sin(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$Mat_{(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})}(\overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix} \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha \\ \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \sin b \sin \alpha \end{pmatrix}$$

En égalant les deux expressions de $Mat_{(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})}(\overrightarrow{OC})$, on en déduit les formules de Gauss.

Exercice 18.52.
Soient A et B les points de contact d'une de ces tangentes. Soit I le milieu de AB. Alors le point I a la même puissance par rapport à chacun des deux cercles, à savoir $IA^2 = IB^2$.
On en conclut que les milieux des segments joignant deux points de contact d'une tangente commune sont alignés, et que la droite qui les contient est l'axe radical des deux cercles.

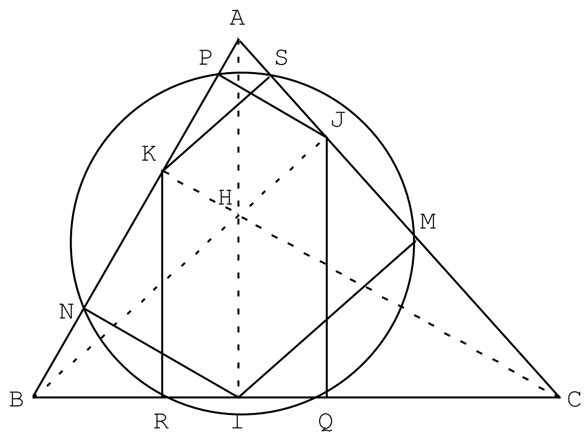
Exercice 18.53.
Lorsque les plans des cercles sont sécants il faut et il suffit que de points de la droite d'intersection aient la même puissance par rapport à chacun des deux cercles.
Lorsque les plans sont parallèles, il faut et il suffit que la droite joignant les centres soit perpendiculaire aux plans des cercles.

Exercice 18.54 (Quelques constructions de cercles).
1. Construisons un cercle tangent à une droite d passant par deux points A et B. Il n'y a de solution que si A et B sont du même côté de d. Si la droite (AB) est parallèle à d, soit C le point d'intersection de la médiatrice de AB avec d. Alors le cercle circonscrit au triangle ABC est tangent à d et passe par A et B. Si la droite (AB) coupe la droite d en un point O, traçons un cercle passant par A et B ne coupant pas d, puis une tangente à ce cercle passant par O. Soit T le point de contact de la tangente avec ce cercle, et soit C un point de d tel que OC=OT. La puissance du point O par rapport au cercle circonscrit à ABC est $\overline{OA} \times \overline{OB} = OT^2 = OC^2$. Par conséquent, le cercle circonscrit à ABC est tangent à d en C.
   Construisons un cercle tangent à un cercleXpassant par deux points A et B. Il n'y a de solution que si A et B sont du même côté de X. Construire un cercle Γ passant par A et B coupant X en M et N. Si les droites (MN) et (AB) sont sécantes, soit I leur point d'intersection. Construisons une tangente à X passant par I, soit C le point de contact. La puissance du point I par rapport au cercle circonscrit à ABC est $\overline{IA} \times \overline{IB} = \overline{IM} \times \overline{IN} = IC^2$. Par conséquent, le cercle circonscrit à ABC est tangent à X en C.
   Construisons maintenant un cercle tangent à trois cercles donnés. Pour cela, nous avons besoin au du résultat de la question 2.
2. Analyse : soit X un cercle tangent en M à Γ et en M' à Γ', soit σ l'inversion de pôle I intersection de (MM') et de la ligne des centres de X et X', de puissance $\overline{IM}.\overline{IM'}$, alors X est stable par σ. L'image de Γ est un cercle centré sur la ligne des centres de X et X', passant par M' et dont la tangente en M' est l'image de la tangente en M par la

symétrie d'axe la médiatrice de MM'. Or les tangentes en M et en M' àX sont symétriques par rapport à la médiatrice de MM', donc l'image de Γ est Γ'.
Synthèse : soient Γ et Γ' deux cercles et A un point, on veut construire un cercle X passant par A et tangent à Γ et Γ'. Soit σ une inversion échangeant Γ et Γ', elle laisse stable X donc X passe aussi par l'inverse de A. On est donc ramené à la construction d'un cercle passant par deux points et tangent à un cercle donné. On obtient donc en général 4 solutions au problème.

3. Soit à construire le cercle Γ tangent aux cercles X, X', X'' de centres O, O', O'' et de rayons R, R', R''. Soit I le centre de Γ, soit ρ son rayon, on suppose que R' est le plus petit des rayons, le cercle Γ_1 de centre I de rayon ρ+R' passe par O' et est tangent extérieurement au cercle de centre O de rayon R-R' et au cercle de centre O'' de rayon R''-R'. On sait construire ce cercle (voir la question 2.), il suffit de le diminuer de R' pour obtenir Γ. Le problème admet en général huit solutions (suivant la répartition des contacts intérieurs ou extérieurs).

Exercice 18.55 (Cercle de Taylor).
Commençons par démontrer que les points M, N, P, S sont cocycliques. Il suffit pour cela de prouver que $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AN}$.



Plaçons-nous dans le cas où les angles du triangle ABC sont aigus, cela revient à prouver que $AS/AP=AN/AM$. Or les triangles APJ et ASK sont semblables, donc $AS/AP=AK/AJ$. La question revient donc à établir que $AK/AJ=AN/AM$, ce qui est vrai puisque l'homothétie de centre A envoyant I sur H envoie M sur J et N sur K.
On a donc démontré que les points M, N, P, S sont cocycliques, notons c_1 le cercle qui les contient. Par permutation des sommets, on prouve que S, M, Q, R sont sur un cercle c_2 et que Q, R, N, P sont sur un cercle c_3. Il reste à prouver que ces trois cercles sont confondus.
Supposons ces cercles distincts deux à deux, l'axe radical de c_1 et c_2 est (MS), l'axe radical de c_3 et c_2 est (RQ), l'axe radical de c_1 et c_3 est (NK) ; il en résulte que les côtés du triangle ABC concourent au centre radical des trois cercles c_1, c_2, c_3, ce qui est absurde. Deux au moins des trois cercles c_1, c_2, c_3 sont confondus, ce qui conclut le problème.

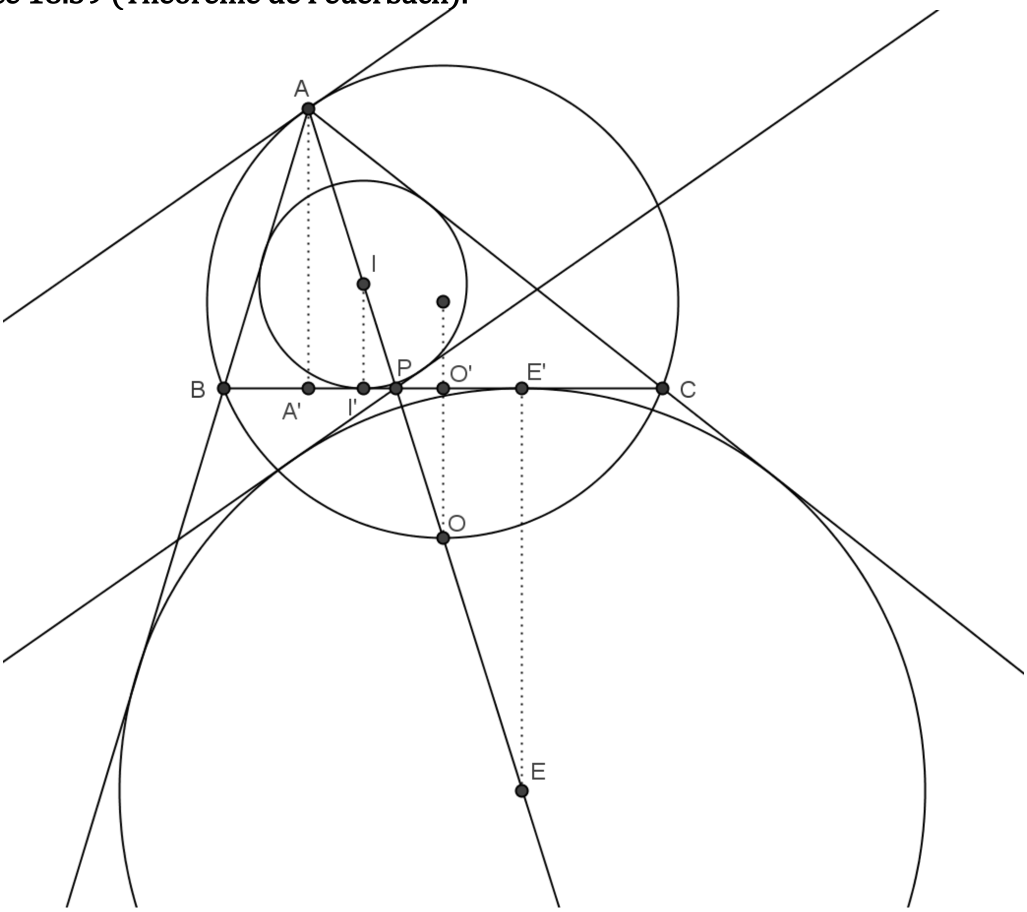
Exercice 18.56.
Soient A et B deux points distincts, soit M un point n'appartenant pas à la droite (AB), ni à la médiatrice de AB. Construisons le cercle c du faisceau à point limites A et B passant par M. Construisons le cercle circonscrit au triangle ABM, et notons O son centre. Le cercle circonscrit au triangle ABM est un cercle du faisceau conjugué, par conséquent il est orthogonal à c. Il en résulte que le centre de c est l'intersection de la perpendiculaire à (OM) passant par M avec la droite (AB).

Exercice 18.57 (Constructions au compas seul).

1. Pour construire le symétrique d'un point A par rapport à un point B, on trace le cercle de centre B passant par A puis on reporte trois fois le rayon.
   Pour construire le symétrique d'un point A par rapport à une droite d, on choisit deux points I et J sur D, puis on trace le cercle de centre I passant par A et le cercle de centre J passant par A. Le point cherché est le second point d'intersection de ces cercles.
2. Les triangles isocèles MOA et AOM' sont semblables car ils ont un angle en commun, donc $OM \times OM' = OA^2$. On en déduit que M' est l'inverse de M par rapport à c.
3. Le milieu I d'un segment AB est l'inversepar rapport au cercle de centre A passant par B du symétrique I' de A par rapport à B. En Effet, $AI \times AI' = AI \times 4AI = (2AI)^2$.
4. Simple vérification. On en déduit la construction suivante. Soit M un point situé à l'intérieur d'un cercle c de centre O, de rayon r, dont on veut construire l'inverse M' par rapport à c. Soit n un entier tel que $r/2^n < OM$. Alors M est à l'extérieur du cercle de centre O, de rayon $r/2^n$. Grâce à la question 3 on sait construire un tel cercle. Grâce à la question 2 on sait construire $\sigma_{r/2^n}(M)$. Grâce à la question 1 on sait construire $h_{2n}\sigma_{r/2^n}(M) = M'$.
5. Soit X le cercle dont on cherche le centre O, soit Γ un cercle centré sur un point A de X. Grâce à la question 2, on sait construire au compas seul l'inverse O' de O par rapport à Γ. O est alors l'inverse de O' par rapport à Γ, on le construit grâce à la question 4.
6. Soit H le projeté orthogonal de O sur (d), soit O' le symétrique de O par rapport à d, soit R le rayon du cercle d'inversion. On a
   $$\overline{O\sigma(H)} \times \overline{OH} = R^2 = \overline{O\sigma(O')} \times \overline{OO'} = 2\overline{O\sigma(O')} \times \overline{OH}$$
   Par conséquent $\overline{O\sigma(H)} = 2\overline{O\sigma(O')}$, ce qui prouve que $\sigma(O')$ est le centre du cercle de diamètre $O\sigma(H)$, image de la droite d.
   Pour prouver le théorème de Mascheroni, il suffit de prouver que l'on peut construire au compas seul l'intersection de deux droites, ou l'intersection d'une droite et d'un cercle.
   Intersection de deux droites : soient deux droites (AB) et (CD) dont on veut construire le point d'intersection. Traçons un cercle c tel que les deux droites soient à l'extérieur de c. Grâce à ce qui a été démontré en début de question, on peut construire les cercles inverses de (AB) et (CD) par rapport à c. Ces cercles sont sécants en le centre de c, et en un second point. Le point d'intersection des deux droites est alors l'inverse par rapport à c de ce second point, on peut le construire grâce à la question 4.
   Intersection d'une droite et d'un cercle : distinguons deux sous-cas.
   1^er^ sous-cas : la droite ne passe pas par le centre du cercle. Dans ce cas ses points d'intersection avec le cercle sont les points d'intersection du cercle et de son symétrique par rapport à la droite. Pour construire ce dernier au compas seul, il suffit de construire le symétrique de son centre, ce qui est facile.
   2^ème^ sous-cas : la droite d passe par le centre du cercle c. Soit I un point du cercle c n'appartenant pas à d. On sait construire au compas seul le point O', symétrique de O par rapport à I (question 1). Soient C et D les points d'intersection du cercle c et du cercle de diamètre OO'. Soit c' le cercle de centre O' passant par C et D. Soit σ l'inversion par rapport au cercle c'. On sait construire au compas seul $\sigma(d)$ (début de cette question), et $\sigma(c) = c$ car c et c' sont orthogonaux. Soient E et F les points d'intersection des cercles $\sigma(d)$ et $\sigma(c)$, alors les points cherchés sont $\sigma(E)$ et $\sigma(F)$, que l'on sait construire au compas seul (question 3).

Exercice 18.58.
Partant du théorème de Pascal, il suffit d'utiliser une inversion dont le centre n'est ni sur le cercle, ni sur une droite, pour montrer l'équivalence avec le théorème de Miquel.

Exercice 18.59 (Théorème de Feuerbach).



Considérons un triangle ABC, notons I le centre du cercle inscrit, et E le point de concours de la bissectrice intérieure de l'angle A, et des bissectrices extérieures des angles B et C. Démontrons que le cercle d'Euler est tangent au cercle inscrit, ainsi qu'au cercle exinscrit de centre E.
Notons O le milieu de IE. Le cercle circonscrit aux triangles rectangles BIE et CIE est le cercle de diamètre IE, par conséquent OB=OC, ce qui prouve que O est sur la médiatrice de BC. Ainsi, le projeté orthogonal de O sur (BC) est le milieu O' de BC.
Notons A' et E' les projetés orthogonaux respectifs de A et E sur (BC), et P le pied de la bissectrice de l'angle A. Puisque la division A, P, I, E est harmonique, par projection la division A', P, I', E' est harmonique. De plus, puisque O est le milieu de IE, par projection O' est le milieu de I'E'. D'après les relations de Newton, on a donc

$$O'I'^2 = O'E'^2 = \overline{O'A'} \times \overline{O'P}$$

Soit σ l'inversion de pôle O', de puissance $O'I'^2$. Alors σ fixe le points I', et laisse donc globalement invariante la droite (O'I'). Elle envoie donc le cercle inscrit sur le cercle tangent en I' à (O'I'), situé du même côté de (O'I') que le cercle inscrit, et dont le rayon est $\frac{k}{p}r$, où k est la puissance du point O' par rapport au cercle inscrit, p la puissance de

l'inversion et r le rayon du cercle inscrit. Or $k = O'I'^2 = p$. Donc σ envoie le cercle inscrit sur lui-même.
Un raisonnement analogue permet de prouver que σ envoie le cercle exinscrit sur lui-même. Par ailleurs, puisque le cercle d'Euler passe par O', son image par σ est une droite d passant par O'. Par conséquent, pour prouver le théorème, il suffit de prouve que d est tangente au cercle inscrit et au cercle exinscrit.
La tangente en A' au cercle d'Euler est globalement invariante par σ, donc d est parallèle à cette tangente, qui est elle-même parallèle, par homothétie entre le cercle d'Euler et le cercle circonscrit, à la tangente t en A au cercle circonscrit. Ainsi,

$$\big(d,(AI)\big) = \big(t,(AI)\big)$$

D'après la condition angulaire de tangence, $\big(t,(AB)\big) = \big((CA),(CB)\big)$, d'où, d'après la relation de Chasles, $\big(t,(AI)\big) + \big((AI),(AB)\big) = \big((CA),(AI)\big) + \big((AI),(CB)\big)$. Or, puisque (AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, on a $\big((AI),(AB)\big) = \big((CA),(AI)\big)$. Donc

$$\big(t,(AI)\big) = \big((AI),(CB)\big)$$

On en déduit que $\big(d,(AI)\big) = \big((AI),(CB)\big)$, ce qui prouve que les droites d et (BC) sont symétriques par rapport à (AI). Or, la droite (BC) est tangente au cercle inscrit et au cercle exinscrit, et ces cercles sont globalement invariants par la symétrie d'axe (BC). Donc d est tangente à ces deux cercles, ce qu'il fallait démontrer.