CHAPITRE 1

Calcul dans $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre nous proposons tout d'abord une classification des nombres dont certains sont connus depuis le Primaire. Nous donnons ensuite une axiomatique simple autorisant des calculs basiques dans l'ensemble des nombres réels. Enfin nous démontrons quelques théorèmes utilisés au collège mais rarement prouvés à ce niveau. Ces derniers vont vous permettre d'acquérir une meilleure compréhension de l'algèbre qui structure les calculs dans $\mathbb{R}$ effectués en Seconde et dans les classes suivantes.

1.1 Classification des ensembles de nombres

Les entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. Enfant, vous avez commencé à compter avec des entiers naturels. Ce sont donc des nombres qui vous sont familiers depuis longtemps. Cependant la non finitude de l'ensemble des entiers naturels est plus complexe à appréhender.

Dans le langage mathématique, on note

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \cdots; n \cdots\}$$

Remarques

- Les $\cdots$ entre n et $\}$ traduisent que $\mathbb{N}$ est infini.
- Pour traduire qu'un nombre n appartient à $\mathbb{N}$, nous utilisons le symbole d'appartenance $\in$. On note : $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{N}$ privé de 0 est noté $\mathbb{N}^* = \{1; 2; \cdots; n \cdots\}$.

- Tout entier naturel n admet un successeur $n+1 \in \mathbb{N}$.
- Tout entier naturel non nul n admet un précédent $n-1 \in \mathbb{N}$.

1.1.1 Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, est tel que

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

Remarques

- $\mathbb{Z}$ privé de 0 est noté $\mathbb{Z}^*$.
- Tout entier naturel est un entier relatif. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- La réciproque est fausse. Un contre-exemple est $-2 \in \mathbb{Z}$ et $-2 \notin \mathbb{N}$.

1.1.2 Les nombres décimaux

Des exemples

$2,1 = \dfrac{21}{10}$; $-5,64 = -\dfrac{564}{100}$ sont des nombres décimaux.

$6,\underbrace{00\cdots0}_{n-1\,zeros}1 = \dfrac{6\overbrace{00\cdots0}^{n-1\,zeros}1}{10^n}$, avec n entier naturel non nul est un nombre décimal.

Définition. *L'ensemble des nombres décimaux, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres de la forme $\dfrac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

En notation ensembliste, nous pouvons écrire

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Remarques

- Tout entier naturel ou relatif est un nombre décimal. En effet, pour tout $a \in \mathbb{N}$ ou $a \in \mathbb{Z}$, nous avons $a = \dfrac{a}{10^0}$.
- On retiendra que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

1.1.3 Les nombres rationnels

Définition. *L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres (des fractions) de la forme $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.*

En notation ensembliste, nous pouvons écrire

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Remarques

- Nous pouvons définir un rationnel $\frac{a}{b}$, en restreignant $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
- Tout nombre décimal de la forme $\frac{a}{10^n}$ est un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b = 10^n$.
- Nous retiendrons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- La réciproque est fausse. Nous prenons comme contre-exemple $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.
- Un nombre rationnel a une partie décimale illimitée périodique.

Par exemple, nous avons

$$\frac{1}{3} \approx 0, \underbrace{3333333333333333333333333\cdots}_{\text{partie décimale illimitée de période 1}}$$
$$\frac{7}{11} \approx 0, \underbrace{636363636363636363636363\cdots}_{\text{partie décimale illimitée de période 2}}$$
$$\frac{17}{13} \approx 1, \underbrace{307692307692307692307692\cdots}_{\text{partie décimale illimitée de période 6}}$$

1.1.4 Les nombres irrationnels

Définition. *L'ensemble de nombres irrationnels est l'ensemble des nombres qui ne sont pas rationnels.*

Par exemple $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{5} + \sqrt{13}$, $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ sont des nombres irrationnels.

Remarques

- Un nombre irrationnel a une partie décimale illimitée non périodique.

Par exemple, nous avons

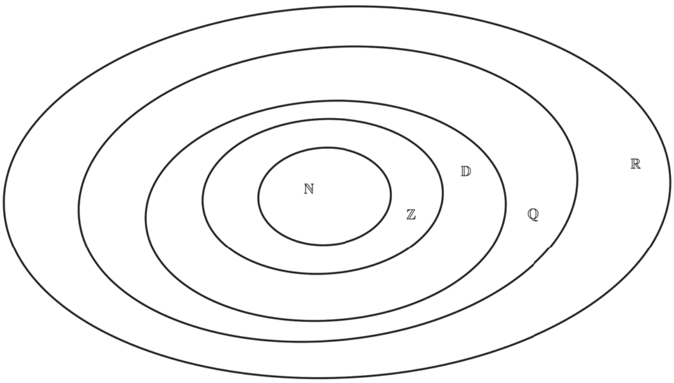
$$\sqrt{2} \approx 1, \underbrace{4142135623730950488016887\cdots}_{\text{partie décimale illimitée non périodique}}$$
$$\pi \approx 3, \underbrace{1415926535897932384626433\cdots}_{\text{partie décimale illimitée non périodique}}$$

1.1.5 Les nombres réels

Définition. *L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$ est la réunion de l'ensemble des nombres rationnels avec l'ensemble des nombres irrationnels.*

Remarques

- On peut noter $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels.
- Nous retiendrons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



1.1.6 Représentation géométrique d'un nombre réel

Soit d une droite graduée par un repère $(O; I)$. À chaque point M de cette droite, nous associons un réel x unique qui est l'abscisse du point M relativement au repère $(O; I)$.

1.1.7 Réels positifs-réels négatifs

À chaque point M de la demi-droite $[O; I)$ est associé un réel positif ou nul.

On note $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}$.

Soit I' le point de d d'abscisse -1.

À chaque point M de la demi-droite $(I'; O]$ est associé un réel négatif ou nul.

On note $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 0\}$.

À chaque point M de la demi-droite ouverte $]O; I)$ est associé un réel positif strictement.

On note $\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des réels strictement positifs.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$.

À chaque point M de la demi-droite ouverte $(I'; O[$ est associé un réel négatif strictement.

On note $\mathbb{R}^{-*}$ l'ensemble des réels strictement négatifs.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R}/x < 0\}$.

Exercice 1. Le nombre d'or est un irrationnel

Le nombre d'or, noté ϕ, est tel que $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que ϕ est irrationnel.

Solution 1

Nous raisonnons par l'absurde[1] en supposant que ϕ est rationnel.

Posons $\phi = \dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls puisque $\phi > 0$.

Nous avons $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{p}{q}$. Nous en déduisons

$$\sqrt{5} = \frac{2p}{q} - 1 = \frac{2p-q}{q}.$$

Nous savons que $2p - q \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Il en résulte que $\dfrac{2p-q}{q} \in \mathbb{Q}$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

Nous en concluons que le nombre d'or ϕ est irrationnel.

Exercice 2. Pavage d'un rectangle

Lorsqu'un rectangle de longueur L et de largeur l peut être recouvert exactement par des carrés de même côté c, on dit que ce rectangle est pavé par des carrés.

1. On suppose que L et l sont des entiers multiples de c. Justifier que dans ce cas, il est possible de paver ce rectangle.

2. On suppose que $L = \sqrt{2}$ et $l = 1$. Peut-on paver ce rectangle ?

1. Annexe § 5.1

3. Montrer que ce rectangle peut être pavé par des carrés de côté c si et seulement si $\dfrac{L}{l} \in \mathbb{Q}$.

Solution 2

1. Puisque L et l sont des multiples de c, il existe deux entiers naturels k et k' non nuls tels que $L = k \times c$ et $l = k' \times c$.

Nous en déduisons qu'en plaçant k carrés sur la longueur et k' carrés sur la largeur, le rectangle est pavé.

2. Supposons par l'absurde que ce rectangle est pavé.

Dans ce cas, il existe deux entiers p et q non nuls tels que $\sqrt{2} = p \times c$ et $1 = q \times c$.

Nous en déduisons que $\dfrac{\sqrt{2}}{1} = \dfrac{pc}{qc}$, ce qui donne $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

Or, nous savons que $\sqrt{2}$ est irrationnel, ce qui est contradictoire.

Nous en concluons qu'un rectangle de longueur $\sqrt{2}$ et de largeur 1, ne peut pas être pavé par des carrés de même côté.

3. On suppose que le rectangle puisse être pavé par des carrés de côté c. Dans ce cas, il existe deux entiers non nuls p et q tels que $L = p \times c$ et $l = q \times c$.

Nous en déduisons que $\dfrac{L}{l} = \dfrac{p \times c}{q \times c} = \dfrac{p}{q}$, ce qui justifie que $\dfrac{L}{l} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, supposons que $\dfrac{L}{l} \in \mathbb{Q}$.

Nous en déduisons qu'il existe deux entiers non nuls p et q tels que $\dfrac{L}{l} = \dfrac{p}{q}$, ce qui implique

$$\frac{L}{p} = \frac{l}{q}.$$

Posons $c = \dfrac{L}{p} = \dfrac{l}{q}$.

Nous obtenons

$$L = p \times c \text{ et } L = q \times c.$$

Par suite, il est possible de paver ce rectangle avec des carrés de côté c.

1.2 Addition dans $\mathbb{R}$

1.2.1 Axiomatique de l'addition dans l'ensemble des nombres réels

Pour tous réels a, b et c, nous disposons pour structurer l'addition dans $\mathbb{R}$ des axiomes suivants :

1. $a + b \in \mathbb{R}$.
2. $a + b = b + a$. *On dit que $+$ est commutative.*
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$. *On dit que $+$ est associative.*
4. $a + 0 = 0 + a = a$. *On dit que 0 est neutre pour $+$ dans $\mathbb{R}$.*
5. *Chaque réel a admet un unique opposé $-a$ tel que $a+(-a) = (-a)+a = 0$.*

Remarques

• $\mathbb{R}$ muni de son addition $+$, noté $(\mathbb{R}, +)$ et satisfaisant aux propriétés (1) à (5) est un groupe commutatif.

• $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe commutatif car la propriété (5) est en défaut.

• Disposant de cette axiomatique de l'addition des réels, nous pouvons commencer à démontrer les règles de calcul usuelles que vous avez utilisées au collège.

La proposition qui suit en est une première illustration.

Proposition. *Pour tout réel a, on a : $-(-a) = a$.*

Démonstration. Dans l'axiome 5., remplaçons a par $-a$.

Nous obtenons $(-a) + (-(-a)) = (-(-a)) + (-a) = 0$.

Or, le réel a étant donné, par unicité de l'opposé $-a$, nous obtenons $-(-a) = a$.

1.2.2 Soustraction dans $\mathbb{R}$

Définition. *Soient a et b deux réels. Par définition, nous avons*

$$a - b = a + (-b).$$

Remarque

La soustraction est ni commutative, ni associative.

1.2.3 Égalité dans $\mathbb{R}$

Définition. *Soient a et b deux réels. Nous disposons de la définition :*

$$a = b \text{ si et seulement si } a - b = 0.$$

Exercice 3. À nouveau le nombre d'or

Nous savons que $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Vérifier que* $\phi^2 = \phi + 1$.

Solution 3

Nous avons,

$$\phi^2 - \phi - 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 0.$$

Nous avons ainsi justifié que, $\phi^2 = \phi + 1$.

Remarques

Pour prouver une égalité dans $\mathbb{R}$, nous pouvons choisir une des méthodes suivantes :

- Partir du membre de gauche pour obtenir après calculs le membre de droite.
- Partir du membre de droite pour obtenir après calculs le membre de gauche.
- Calculer la différence des deux membres pour obtenir après calculs la valeur 0.

Théorème. *Soient a, b et c trois réels. Nous disposons des propriétés suivantes :*

- *$a = b$, alors $b = a$. On dit que la relation $=$ est symétrique.*
- *si $a = b$ et $b = c$, alors $a = c$. On dit que la relation $=$ est transitive.*
- *$a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$. On dit que la relation $=$ est compatible avec l'addition.*

Démonstration. Si $a = b$, alors $a - b = 0$ donc $b - a = 0$, ce qui justifie que $b = a$.

Si $a = b$ et $b = c$, alors on a $a - b = 0$ et $b - c = 0$, donc $a - b + b - c = 0$, ce qui donne $a - c = 0$, soit $a = c$.

Si $a + c = b + c$, alors $a + c - (b + c) = 0$, soit $a - b = 0$, donc $a = b$.

Réciproquement, supposons que $a = b$.

Nous avons $a + c - (b + c) = a - b = 0$, ce qui prouve que $a + c = b + c$.