

# Sommaire

## Algèbre et géométrie 1<sup>re</sup> année

<b>Chapitre 1.</b>	
<b>Logique, raisonnement</b> .....	<b>9</b>
Il y a une infinité de nombres premiers.....	10
$\sqrt{2}$ est irrationnel .....	11
Une récurrence pour une somme .....	12
Résolution d'équation par analyse-synthèse .....	13
<b>Chapitre 2.</b>	
<b>Ensembles et applications</b> .....	<b>14</b>
La formule de Vandermonde .....	14
La fonction affine $x \rightarrow mx + p$ est bijective.....	15
Composée injective, composée surjective.....	16
Calcul de $(f^{-1})'$ .....	17
<b>Chapitre 3.</b>	
<b>Calculs algébriques</b> .....	<b>18</b>
Identité de Brahmagupta .....	18
Diverses sommes de coefficients binomiaux .....	19
Calcul de la somme $\sum_{i=0}^n i^2$	
par Newton .....	20
Calculs de sommes doubles.....	21
<b>Chapitre 4.</b>	
<b>Nombres complexes, trigonométrie</b> .....	<b>22</b>
Racines carrées d'un nombre complexe .....	22
Simplification d'une fraction complexe .....	23
Calcul de $\cos(\pi/5)$ .....	24
Linéarisations classiques.....	25
Formules de duplication et d'addition par les complexes .....	26
Formules de trigo par l'arc moitié .....	27
Somme et arc moitié $n^\circ$ 1 .....	28
Somme et arc moitié $n^\circ$ 2 .....	29
<b>Chapitre 5.</b>	
<b>Polynômes</b> .....	<b>30</b>
Une somme étrangement nulle.....	30
Une somme simplifiée grâce aux polynômes.....	31
$p$ divise $n \Leftrightarrow x^p - 1$ divise $x^n - 1$ .....	32
Polynômes de Tchebychev.....	33
Calcul d'un produit de sinus.....	34
<b>Chapitre 6.</b>	
<b>Arithmétique</b> .....	<b>35</b>
Petit théorème de Fermat .....	35
Un polynôme qui n'admet pas de racines rationnelles .....	36
Une fraction toujours irréductible .....	37
<b>Chapitre 7.</b>	
<b>Structures algébriques</b> .....	<b>38</b>
Une drôle de loi pour un drôle de groupe.....	38
Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ .....	39
L'anneau des entiers de Gauss .....	40
Les quaternions .....	41
<b>Chapitre 8.</b>	
<b>Calcul matriciel</b> .....	<b>42</b>
Matrice inverse (matrice carrée d'ordre 2).....	42
Puissance n-ième d'une matrice triangulaire .....	43
Puissance n-ième d'une matrice.....	44
<b>Chapitre 9.</b>	
<b>Fractions rationnelles</b> .....	<b>45</b>
Simplification de	
$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$ .....	45

## Sommaire

Décomposition de $\frac{1}{1-x^4}$ .....	46	Une application linéaire toute simple (n° 2) .....	67
Dérivée n-ième d'une fraction rationnelle .....	47	Existence et unicité d'un polynôme interpolateur .....	68
Primitive d'une fraction rationnelle.....	48	Dimension par deux méthodes .....	69
<b>Chapitre 10.</b> <b>Systèmes linéaires .....</b>	<b>49</b>	<b>Chapitre 15.</b> <b>Matrices et applications linéaires .....</b>	<b>70</b>
Résolution d'un système linéaire par Gauss .....	49	Changement de base et dérivation .....	70
Instabilité d'un système linéaire.....	50	Trace et rang d'un projecteur sont égaux .....	71
Un joli système linéaire.....	51	Matrice triangulaire des coefficients binomiaux.....	72
<b>Chapitre 11.</b> <b>Géométrie du plan et de l'espace .....</b>	<b>52</b>	Matrice triangulaire des 1 .....	73
Une jolie propriété des triangles .....	52	Matrice à diagonale inversée.....	74
Identité de Lagrange dans le plan .....	53	Matrice à diagonale dominante.....	75
Coordonnées d'un projeté orthogonal.....	54	<b>Chapitre 16.</b> <b>Déterminants .....</b>	<b>76</b>
Distance d'un point à une droite .....	55	Equation de plan obtenu par un déterminant.....	76
Distance de deux droites (dans l'espace) .....	56	$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ et calcul de $A^n$ .....	77
<b>Chapitre 12.</b> <b>Espaces vectoriels .....</b>	<b>57</b>	Déterminant de Vandermonde.....	78
Une jolie famille libre et une jolie famille liée.....	57	Déterminants circulants .....	79
Un espace vectoriel tout simple.....	58	Déterminants circulants généralisés.....	80
Suites constantes et suites de limite nulle sont en somme directe.....	59	Des déterminants nuls quasi sans calcul ! .....	81
Fonctions paires et fonctions impaires sont en somme directe.....	60	Déterminants, retenez-les tous ! (n° 1) .....	82
Matrices symétriques et antisymétriques sont en somme directe .....	61	Déterminants, retenez-les tous ! (n° 2) .....	83
<b>Chapitre 13.</b> <b>Applications linéaires.....</b>	<b>62</b>	Déterminants, retenez-les tous ! (n° 3) .....	84
Une belle équivalence sur les noyaux .....	62	Déterminants, retenez-les tous ! (n° 4) .....	85
Une belle équivalence sur les images .....	63	<b>Chapitre 17.</b> <b>Produit scalaire .....</b>	<b>86</b>
Noyau et image d'un projecteur.....	64	Un produit scalaire et une norme pour les polynômes.....	86
<b>Chapitre 14. Dimension finie .....</b>	<b>65</b>	Identités de polarisation.....	87
Base naturelle et dimension d'un s.e.v .....	65	Des fonctions trigonométriques orthogonales .....	88
Une application linéaire toute simple (n° 1).....	66	Des polynômes orthogonaux .....	89
		« Gram-Schmidtage » d'un plan .....	90
		Matrice de Gram .....	91

Analyse et probabilités 1<sup>re</sup> année

<b>Chapitre 1.</b>	
<b>Inégalités ..... 93</b>	Convergence par majoration ..... 120
Inégalités obtenues par des	Divergence de la suite $(\cos(n))$ ..... 121
identités remarquables ..... 94	
Inégalité triangulaire ..... 95	<b>Chapitre 6.</b>
Inégalité de Bernoulli ..... 96	<b>Limites et continuité ..... 122</b>
Inégalité de Cauchy-Schwarz ..... 97	Continuité de la fonction racine
Inégalité $e^x \geq 1+x$ ..... 98	carrée (par les epsilon) ..... 122
Inégalité	Non-continuité d'une fonction par
$\ln(1+x) \leq x \leq (1+x)\ln(1+x)$ ..... 99	les suites ..... 123
Inégalité de convexité pour la	Existence d'un point fixe ..... 124
fonction carré ..... 100	Equation fonctionnelle et fonction
Inégalité arithmético-géométrique ..... 101	nulle ..... 125
	Equation fonctionnelle et fonction
	identité ..... 126
<b>Chapitre 2.</b>	
<b>Dérivées, primitives ..... 102</b>	<b>Chapitre 7.</b>
Dérivées successives de $xe^x$ ..... 102	<b>Dérivabilité ..... 127</b>
De belles primitives de fractions	Une fonction continue en 0 mais
rationnelles ..... 103	non dérivable en 0 ..... 127
Primitive de puissances de cosinus ..... 104	Une fonction dérivable et $C^1$ ..... 128
	Une fonction dérivable sans être $C^1$ .. 129
<b>Chapitre 3. Fonctions usuelles ..... 105</b>	Des limites évidentes sans en avoir
Sommes constantes de fonctions	l'air ..... 130
trigonométriques réciproques ..... 105	Equation fonctionnelle et fonction
Simplification de $\arccos(\cos)$ et	logarithme ..... 131
$\arcsin(\sin)$ ..... 106	Equation fonctionnelle et fonction
Simplification de $\arctan(\tan)$ ..... 107	exponentielle ..... 132
	Dérivées n-ièmes des fonctions cos
<b>Chapitre 4.</b>	et sin ..... 133
<b>Equations différentielles ..... 108</b>	Dérivée n-ième de $(x^2 - 1)^n$
Variation de constante ..... 108	et Leibniz ..... 134
Recollement qui « marche » ..... 109	Inégalités célèbres et
Recollement qui « ne marche pas » ... 110	accroissements finis ..... 135
Equation de Bernoulli ..... 111	Suite convergente et
Equation de Ricatti ..... 112	accroissements finis ..... 136
Equation différentielle linéaire	Le théorème de Darboux ..... 137
d'ordre 2 ..... 113	
	<b>Chapitre 8.</b>
<b>Chapitre 5.</b>	<b>Développements limités ..... 138</b>
<b>Suites réelles ..... 114</b>	Les DL, retrouvez-les tous !
La suite de Fibonacci ..... 114	(« famille » série géométrique) ..... 138
La suite de Babylone ..... 115	Les DL, retrouvez-les tous !
Les suites adjacentes ..... 116	(« famille » exponentielle) ..... 139
Moyenne arithmético-géométrique ..... 117	Les DL, retrouvez-les tous !
Constante d'Euler ..... 118	(« famille » binomiale) ..... 140
Convergence au sens de Cesàro ..... 119	

## Sommaire

Une limite célèbre, vaincue par les DL .....	141	Divergence de la série harmonique par Oresme .....	152
Position d'une courbe par rapport à sa tangente .....	142	Transformation d'Abel .....	153
<b>Chapitre 9.</b>		Une jolie série télescopique .....	154
<b>Equivalents et petits o</b> .....	<b>143</b>	Quand d'Alembert nous sauve .....	155
Une limite de fonction résolue par les équivalents .....	143	Quand Riemann nous sauve .....	156
Une limite de fonction résolue par des DL puis des équivalents .....	144	<b>Chapitre 12.</b>	
Une limite de suite résolue par les équivalents .....	145	<b>Dénombrement</b> .....	<b>157</b>
<b>Chapitre 10.</b>		Les anagrammes .....	157
<b>Intégration simple</b> .....	<b>146</b>	Les frites « à Toufik » .....	158
Une intégrale vaincue par la linéarisation .....	146	Table ronde de huit personnes .....	159
Des intégrales évidentes sans en avoir l'air .....	147	<b>Chapitre 13.</b>	
Intégrale et quart de cercle .....	148	<b>Probabilités</b> .....	<b>160</b>
Les intégrales de Wallis .....	149	La commode « à Kévina » .....	160
Une somme de Riemann convergente .....	150	Le sorcier du château .....	161
<b>Chapitre 11.</b>		Les buteurs au foot .....	162
<b>Séries numériques</b> .....	<b>151</b>	La formule de Poincaré .....	163
Une série alternée convergente .....	151	<b>Chapitre 14.</b>	
		<b>Variables aléatoires sur un univers fini</b> .....	<b>164</b>
		Les elfes et les gobelins .....	164
		La pièce et Bienaymé-Tchebychev .....	165
		Le robot sur l'étagère .....	166
		Proba d'avoir le même nombre de piles .....	167

