Notations, méthodes, logique 1

Compétences

On cherchera à :

- ▷ Travailler avec les opérations sur les ensembles
  Exercices 1, 2, 3
- ▷ Utiliser les quantificateurs en logique
  Exercices 4, 5
- ▷ Écrire la négation d'une assertion
  Exercices 1, 4
- ▷ Déterminer si une assertion est vraie ou fausse, et le justifier
  Exercice 5
- ▷ Utiliser correctement les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ et $\Longleftrightarrow$
  Exercice 6
- ▷ Faire une démonstration par récurrence (simple)
  Exercices 7 à 11
- ▷ Faire une démonstration par récurrence (à deux crans)
  Exercice 12
- ▷ Faire une démonstration par récurrence (forte)
  Exercice 13
- ▷ Faire une démonstration par l'absurde
  Exercices 15, 16
- ▷ Faire un raisonnement par analyse-synthèse
  Exercices 17 à 19

Coup d'œil sur le chapitre

La première compétence à acquérir lors du passage d'une classe de Terminale à une Classe Préparatoire est certainement la rigueur. Pour cela il faudra approfondir et maîtriser parfaitement des notions abordées seulement de façon superficielle auparavant : la logique, les notations ensemblistes et les méthodes de démonstration. C'est seulement en étant parfaitement à l'aise avec ces outils que l'élève pourra exploiter de manière optimale le contenu des chapitres suivants du programme.

Concernant le langage des ensembles, on va apprendre à utiliser les notions d'appartenance ou non-appartenance $\in$, $\notin$, ainsi que les notions d'inclusion $\subset$ et d'égalité entre deux ensembles. Il est aussi important d'apprendre la signification de l'ensemble des parties d'un ensemble donné.

En logique, on va apprendre à utiliser les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et les connecteurs logiques : « et », « ou », « non ». On s'apercevra que parfois la signification d'une phrase en français est différente de celle dans le langage mathématique.

Enfin, parmi les méthodes de démonstration, on se servira des démonstrations par récurrence, par l'absurde, par analyse-synthèse...

Le saviez-vous ?

Les paradoxes en logique sont apparus dès l'Antiquité. Déjà le philosophe grec Épiménide mettait en exergue la contradiction de la phrase « Un Crétois dit que les Crétois sont menteurs ». Ce n'est cependant que vers 1900 que ces paradoxes ont ébranlé la toute récente théorie des ensembles. Le logicien Bertrand Russell (1872-1970) mit au jour un paradoxe qu'il a popularisé de manière imagée par ceci : dans un village le barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là. Le barbier se rase-t-il lui-même ? Qu'on réponde oui ou qu'on réponde non, on aboutit à une contradiction. Ces paradoxes sont obtenus par autoréférence, c'est-à-dire que la définition concerne l'objet lui-même.
Pour éviter ces paradoxes, on dut alors créer une théorie basée sur des axiomes permettant de construire un ensemble ; il est alors obtenu en partant d'ensembles élémentaires, comme les entiers, ou déjà construits, à l'aide d'opérations dûment répertoriées, parmi lesquelles : la réunion, l'ensemble des parties, etc. On n'a ainsi pas le droit de parler de l'ensemble de tous les ensembles.

Énoncés des exercices

Ensembles

Exercice 1.

Soit E un ensemble, et soient A et B deux parties de E.
On notera $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E (et de même pour B).
1. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 2.

Soient A, B et C trois ensembles.
Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 3. ($\star\star$) *Différence symétrique*

Soient A, B et C des ensembles. On définit la *différence symétrique* de A et B, notée $A \,\Delta\, B$ comme l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, mais pas à $A \cap B$. On a donc

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Montrer les propriétés suivantes :
1. $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$ *(commutativité).*
2. $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$ *(associativité).*
3. Si $A \,\Delta\, B = A \,\Delta\, C$ alors $B = C$ *(régularité).*
4. $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$ *(distributivité de $\cap$ par rapport à Δ).*

Logique

Exercice 4.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exprimer à l'aide des quantificateurs les affirmations suivantes, puis donner leur négation (en français et avec les quantificateurs) :

1. f est la fonction nulle.
2. L'équation $f(x) = 0$ a une solution.
3. f est l'identité de $\mathbb{R}$.
4. f est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = 2x$.
6. L'équation $\cos x = x$ a une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Soient $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4\}$ et $D = \mathbb{N}$.
Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse. (Pensez à justifier chaque réponse).

1. $\forall x \in A,\ x \in B$.
2. $\exists x \in B,\ x \in A$.
3. $\exists x \in A,\ x \notin B$.
4. $\exists x \in B,\ x \notin A$.
5. $\forall x \in C, \forall y \in B,\ x \leqslant y$.
6. $\forall x \in C, \exists y \in B,\ x \leqslant y$.
7. $\exists x \in C, \forall y \in A,\ y \leqslant x$.
8. $\exists x \in B, \forall y \in A, \forall z \in C,\ y + z \leqslant 2x$.
9. $\exists x \in B, \forall y \in B,\ x \leqslant y$.
10. $\exists x \in D, \forall y \in D,\ x \leqslant y$.
11. $\exists x \in D, \forall y \in D,\ x \geqslant y$.
12. $\forall x \in D, \exists y \in A,\ x = y$.
13. $\exists x \in D, \exists y \in A,\ x = y$.
14. $\exists x \in D, \forall y \in A,\ x = y$.

Exercice 6.

Compléter les assertions suivantes avec $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ (et justifier) :
1. $x^2 \geqslant 9\ \dots\ x \geqslant 3$.
2. $x = 1\ \dots\ x^2 - 1 = 0$.
3. $x > 2\ \dots\ x \geqslant 3$.
4. f croissante $\dots$ f strictement croissante
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1\ \dots\ (u_n)$ est une suite constante
6. $x = 2\ \dots\ x^2 - 4x + 4 = 0$

Récurrence

Exercice 7.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^n + 3^n \leqslant 5^n$.

Exercice 8.

Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 5, on a $(n+1)^3 \leqslant 3^n$.

Exercice 9. $(\star)$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ un réel fixé. On définit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}.$$

Exercice 10. $(\star)$

Montrer par récurrence que le nombre de diagonales d'un polygone convexe de $n \geqslant 3$ côtés est $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Exercice 11.

On admet l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Montrer l'*inégalité triangulaire généralisée* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ |x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

Exercice 12.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = \frac{9}{14},\ u_1 = \frac{19}{14} \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 0.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{3^n}{2} + \frac{(-1)^n}{7}.$$

Exercice 13.

Montrer que tout entier naturel $n \geqslant 2$ possède au moins un diviseur premier.

Autres méthodes de démonstration

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.

Exercice 15.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres premiers. Soit $N = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, p_k ne divise pas N.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 16. *Irrationalité de* $\sqrt{3}$

Démontrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 17.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x = \sqrt{2x+35}$

Exercice 18.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est *paire* si
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$
- On dit que f est *impaire* si
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x).$$

Montrer que toute fonction f peut s'écrire de façon unique comme somme d'une fonction paire et une fonction impaire.

Exercice 19. $(\star\star)$

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) \cdot f(y) - f(xy) = x + y.$$

Un petit coup de pouce

Ex. 1. Raisonner par équivalences.

Ex. 2. Raisonner par double inclusion.

Ex. 3. 4. Faire des dessins et remarquer que $A \,\Delta\, B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Ex. 5. Pour montrer qu'une assertion est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple.

Ex. 12. Utiliser une récurrence à deux crans.

Ex. 13. Utiliser une récurrence forte.

Ex. 14. Faire une disjonction de cas.

Ex. 15.
1. Faire une démonstration par l'absurde, en supposant que l'un des p_k divise N.
2. Faire une démonstration par l'absurde, en supposant que l'ensemble des nombres premiers soit fini et en les énumérant tous.

Ex. 16. Faire un raisonnement par l'absurde : supposer qu'il existe deux entiers naturels p et q ($q \neq 0$), premiers entre eux, tels que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$.

Ex. 18. Raisonner par analyse-synthèse.

Ex. 19. Raisonner par analyse-synthèse.

Solutions

Exercice 1.

1. On a

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow \text{non}\big(x \in (A \cup B)\big) \\ &\Leftrightarrow \text{non}\big(x \in A \text{ ou } x \in B\big) \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

2. De même, on a

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

On va montrer la double inclusion.

$\subset$ Soit $x \in A \cap (B \cup C)$, alors $x \in A$ et $x \in B \cup C$. On a donc soit $x \in B$ soit $x \in C$ (bien évidemment on peut aussi avoir les deux en même temps).

- Si $x \in B$ alors $x \in A \cap B$.
- Si $x \in C$ alors $x \in A \cap C$.

On en déduit que $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C)$, c'est-à-dire $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$\supset$ Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Alors $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C)$.

- Si $x \in (A \cap B)$ alors $x \in A$ et $x \in B$.
- Si $x \in (A \cap C)$ alors $x \in A$ et $x \in C$.

On en déduit que, dans tous les cas, $x \in A$. De plus, il est toujours vrai que $x \in B \cup C$. On peut donc conclure que $x \in A \cap (B \cup C)$.

Remarque : on aurait pu montrer de la même manière que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Exercice 3.

1. On sait que l'union est commutative. On a donc

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \,\Delta\, A.$$

2. On considère l'ensemble $S = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$.
   Par définition de la différence symétrique,

$$S = \{x \mid x \in A \ \text{ et } \ x \notin B \,\Delta\, C\} \cup \{x \mid x \notin A \ \text{ et } \ x \in B \,\Delta\, C\}.$$

D'autre part il est facile de montrer que

$$x \notin B \,\Delta\, C \quad \Leftrightarrow \quad x \in (B \cap C) \cup \overline{(B \cup C)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \big(A \cap (B \cap C)\big) \cup \big(A \cap \overline{(B \cup C)}\big) \cup \big(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\big) \cup \big(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\big) \\ &= \big(A \cap B \cap C\big) \cup \big(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\big) \cup \big(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\big) \cup \big(\overline{A} \cap \overline{B} \cup C\big). \end{aligned}$$

On remarque que chacun des trois ensembles A, B et C joue le même rôle dans cette formule, donc si on permute A, B et C on obtient le même ensemble. On a donc

$$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = C \,\Delta\, (A \,\Delta\, B)$$

puis, grâce à la commutativité, qu'on vient de montrer à la question précedente,

$$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C.$$

3. Montrons cette propriété par l'absurde. Supposons que $A \,\Delta\, B = A \,\Delta\, C$ mais $B \neq C$. Quitte à intervertir B et C, il existe donc $x \in C$, $x \notin B$. On a deux cas possibles :
   - **Soit $\boldsymbol{x \in A}$** : comme $x \in A \cap C$, on a $x \notin A \,\Delta\, C$. D'autre part, $x \in A$ et $x \notin B$, donc $x \in (A \setminus B)$. Par conséquent $x \in A \,\Delta\, B$. Absurde.
   - **Soit $\boldsymbol{x \notin A}$** : comme $x \notin A$ et $x \in C$, alors $x \in A \,\Delta\, C$. D'autre part, $x \notin A$ et $x \notin B$, donc $x \notin A \,\Delta\, B$. Absurde.

   On en déduit que $B = C$.
4. D'une part,

$$A \cap (B \,\Delta\, C) = A \cap \big((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)\big) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C).$$

   D'autre part,

$$\begin{aligned} (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C) &= \big((A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}\big) \cup \big(\overline{(A \cap B)} \cap (A \cap C)\big) \\ &= \big((A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})\big) \cup \big((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cap C)\big) \\ &= \big(A \cap B \cap \overline{C}\big) \cup \big(A \cap \overline{B} \cap C\big). \end{aligned}$$

   Cela nous permet de conclure que

$$A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C).$$

Exercice 4.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
   Négation : « f n'est pas la fonction nulle. » $(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0)$.
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
   Négation : « L'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution. » $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0)$.