HEC ESCP Europe 2018
Math. I

Durée : 4 heures

Hormis le résultat de la question **12°)** *b), la partie IV est indépendante du préliminaire et des parties I, II, et III.*

Préliminaire

1°) a) Etablir pour tout entier naturel k, la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t^2}\,dt.$$

On pose alors $A_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ et pour tout $k \geqslant 1$, $A_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$.

b) Calculer A_0, A_1 et A_2.

2°) Déduire de la question **1°) a)** la convergence, pour tout x réel, des deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt$$

Partie I. Calcul d'une fonction auxiliaire

On note F et G, respectivement, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,dt \text{ et } G(x) = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt$$

Dans cette partie, on veut montrer d'une part, que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'autre part, donner pour tout réel x, l'expression de $F(x)$.

3°) a) A l'aide d'une formule de Taylor, établir pour tout réel u, l'inégalité : $|\sin(u)| \leqslant |u|$.

b) Pour tous réels u et v, justifier la formule trigonométrique :

$$\cos(u) - \cos(v) = 2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{v-u}{2}\right)$$

c) En déduire que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

4°) a) Pour tout réel u, justifier à l'aide d'une formule de Taylor, l'inégalité :

$$|u - \sin(u)| \leqslant \frac{u^2}{2}$$

b) Pour tous réels x et h, établir l'inégalité :

$$|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\big(|(2ht - \sin(2ht))\sin(2xt)| + (1-\cos(2ht))|\cos(2xt)|\big)\,dt$$

(On pourra admettre l'existence de l'intégrale du second membre, qui découle du préliminaire.)

c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall\,(x,h) \in \mathbb{R}^2, |F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| < Ch^2$$

5°) a) Justifier que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction dérivée F' à l'aide de la fonction G.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel x, on a : $F'(x) = -2xF(x)$.

c) En déduire que pour tout réel x, on a : $F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Partie II. Fonction de Dirichlet

6°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit φ_n la fonction définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par :

$$\forall\, u \in \mathcal{D}, \varphi_n(u) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

(L'ensemble $\mathcal{D}$ est l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des multiples de 2π.)

a) Montrer que la fonction φ_n est continue sur $\mathcal{D}$ et prolongeable par continuité en 0.

b) En déduire que la fonction φ_n admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$. On note encore φ_n la fonction ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la fonction φ_n est paire.

7°) On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

a) Pour tout réel u, calculer la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{iku}$.

b) En déduire la relation : $\forall\, u \in \mathbb{R}, \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(ku) = \varphi_n(u) - \dfrac{1}{2}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_n(u)\,du$.

8°) Soit ψ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Etablir pour tout réel x, l'égalité :

$$\int_x^{x+T} \psi(u)\,du = \int_0^T \psi(u)\,du$$

Partie III. Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note θ un réel strictement positif **fixé** *et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :* $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^{-\theta x^2}$

9°) a) Montrer que pour tout réel x, les deux séries $\sum\limits_{k\geq 1} f(x+2k\pi)$ et $\sum\limits_{k\geq 1} f(x-2k\pi)$ sont convergentes. On pose alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, H(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x+2k\pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x-2k\pi)$$

On définit ainsi une fonction H sur $\mathbb{R}$ et on admet sans démonstration dans toute la suite du problème que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Préciser la parité de la fonction H et de sa fonction dérivée H'.

10°) Dans cette question, on note n un entier naturel fixé.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit H_N la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_N(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{N} f(x + 2k\pi) + \sum_{k=1}^{N} f(x - 2k\pi)$$

a) Etablir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} f(u)\cos(nu)\,du.$

b) En déduire que l'on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,du$$

c) Etablir pour tout réel x, l'inégalité : $\displaystyle |H(x) - H_N(x)| \leqslant 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-4\theta\pi^2k^2}.$

d) En déduire les égalités :

$$\int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,du = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \times \exp(-\frac{n^2}{4\theta}).$$

11°) Soit x un réel appartenant au segment $[0, 2\pi]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle a_n = \int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)\,dx.$

a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, établir l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(u + x)\,du + \int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(u - x)\,du$$

où la fonction φ_N a été définie dans la question **6°)**.

b) En déduire l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{H(v + x) + H(v - x)}{2\sin(v/2)}\right) \times \sin\left((N + \frac{1}{2})v\right) dv$$

c) Justifier la continuité sur le segment $[0, 2\pi]$ de la fonction K_x définie par :

$$K_x(v) = \begin{cases} \dfrac{H(v + x) + H(v - x) - 2H(x)}{2\sin(v/2)} & \text{si } v \in \,]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si } v = 0 \text{ ou } v = 2\pi \end{cases}$$

d) A l'aide de la question **7°) c)**, établir l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v) \times \sin\left((N + \frac{1}{2})v\right) dv$$

12°) a) Soit g une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$.

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 lorsque le réel λ tend vers $+\infty$.

On admet plus généralement que si g est une fonction continue sur un segment $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$), alors $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_\alpha^\beta g(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0.$

b) Etablir pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$ et tout réel $\theta > 0$, la relation (*formule sommatoire de Poisson*)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\big(-\frac{n^2}{4\theta}\big)\cos(nx)\Big) = \mathrm{e}^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\theta(x-2k\pi)^2}$$

Partie IV. Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson

Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. Deux joueurs A et B lancent tour à tour une pièce de monnaie. Le jet de la pièce donne « Pile » avec la probabilité p et « Face » avec la probabilité $1 - p$.

Le vainqueur de la partie est le joueur qui obtient « Pile » le premier, auquel cas la partie s'arrête.

Le premier lancer (de rang 1) est effectué par le joueur A.

Si la partie ne s'arrête pas avant, les trois lancers suivants (de rangs $2, 3$ et 4) sont effectués par le joueur B, les cinq suivants (de rangs $5, 6, 7, 8$ et 9) par le joueur A, et ainsi de suite.

Après chaque changement de main, le joueur qui reprend la main peut ainsi effectuer (au maximum) deux lancers de plus que ceux que vient d'effectuer l'autre joueur.

On suppose que les résultats des lancers successifs sont indépendants.

13°) a) Compléter la fonction `Scilab` suivante qui simule une partie effectuée selon les règles précédentes et affiche le vainqueur.

```
function v =jeu(p)
  i= 1 ; v = 1 ; s = 1 ; j = 1 ;
  while rand()>p
    i = i+1 ; j = j+1 ;
    if j > s then v = -v ;// changement de main
      s = ...... ;
    j = ..... ;
      end ;
  end ;
  if v == 1 then disp("A gagne") ; else disp("B gagne") ;
  end ;
endfunction
```

b) Que représente la valeur de i après l'éxécution de la fonction « jeu » ?

c) Préciser la signification de la variable v.

d) Compléter le code de la fonction « jeu » pour qu'elle affiche le nombre de lancers effectués par le joueur A.

e) Ecrire un code `Scilab` permettant d'obtenir une valeur approchée de la probabilité que le vainqueur du jeu soit le joueur A.

14°) On suppose que l'expérience aléatoire précédente est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_p)$. On note :
- X le nombre de lancers effectués par le joueur A et I l'ensemble des rangs possibles de ses lancers $1, 5, 6, \ldots$.
- Y le nombre de lancers effectués par le joueur B et J l'ensemble des rangs possibles de ses lancers $2, 3, 4, \ldots$.
- H l'événement aléatoire « le vainqueur est A » ;
- K l'événement aléatoire « le vainqueur est B ».

a) Justifier que $P_p(H \cup K) = 1$ et identifier la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

b) Montrer que $\lim\limits_{p \to 1} P_p(H) = 1$.

15°) a) Justifier que l'ensemble I est inclus dans la réunion :
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1]\!]$$

b) Démontrer que : $P_p(H) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left((1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2+4n+1}\right)$.
Donner une expression similaire pour $P_p(K)$.

16°) a) En utilisant le résultat de la question **12°) b)**, établir l'inégalité **stricte** suivante : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > \frac{1}{2}$.

b) Que peut-on en déduire concernant le jeu considéré ?

Corrigé

Préliminaire

Question 1.

a) La fonction $f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto t^k \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue (et positive) sur $\mathbb{R}_+$ telle que $t \geqslant 1 \implies f_k(t) \leqslant t^k \mathrm{e}^{-t}$ et comme $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 t^k \mathrm{e}^{-t} = 0$ (limite de référence du cours) on a aussi $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f_k(t) = 0$. Ainsi $f_k(t) \underset{(+\infty)}{=} o(1/t^2)$ et la règle de Riemann prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_k(t)\, dt$, donc de l'intégrale proposée.

b) $\star$ On ne fait pas vraiment le calcul de A_0, mais on se ramène à une intégrale de référence du cours, car on a admis que $\varphi_{m,\sigma} : t \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(t-m)^2/2\sigma^2}$ est une densité d'une variable aléatoie suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, et donc :
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(t-m)^2/2\sigma^2}\, dt$$
Soit, avec $m = 0$ $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$: $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$

$$\boxed{A_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$\star \displaystyle\int_0^{\alpha} t\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \Big[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt\Big]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}\big(1-\mathrm{e}^{-\alpha^2}\big) \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc :

$$\boxed{A_1 = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}}$$

$\star$ On peut écrire $t^2\mathrm{e}^{-t^2} = t{\times}t\mathrm{e}^{-t^2}$ et procéder à l'intégration par parties ainsi préparée, mais il vaut mieux rester dans l'esprit de la loi normale . . .
Si X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1/2)$, on a :
$V(X) = \dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2{\times}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} t^2{\times}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ (par parité, la convergence étant connue)

$$\boxed{A_2 = \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}}$$

Question 2.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions à intégrer sont clairement continues sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, |\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} = f_0(t); |t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2} = f_1(t)$$

La convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(t)$ donne alors, par la règle de majoration, la convergence absolue, donc la convergence des deux intégrales proposées.

Partie I

Question 3.

a) On a, pour tout réel u :

$$|\sin(u)| = |\sin(u)-\sin(0)| \leqslant |u-0| \max_{[0,u]} |\sin'| = |u-0| \max_{[0,u]} |\cos| \leqslant |u-0|$$

$$\boxed{\forall\, u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leqslant |u|}$$

b) On sait que $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{ia}\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i(a+b)}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.
En développant la première relation et en identifiant les parties réelles :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Par parité de $\cos$ et imparité de $\sin$, on a aussi :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Par différence :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$$

L'application $(a,b) \mapsto (u,v) = (a+b, a-b)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ de bijection réciproque $(u,v) \mapsto (a,b) = \big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\big)$, donc la relation précédente s'écrit aussi, par imparité de $\sin$:

$$\boxed{\forall\, u, v \in \mathbb{R}, \cos(u) - \cos(v) = 2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{v-u}{2}\right)}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}[\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt)]\, dt$$

Comme $|\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt)|\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant 2\mathrm{e}^{-t^2}$, dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ converge, on peut « passer » à la valeur absolue et utiliser les majorations précédentes :

$$\begin{aligned}|F(x+h) - F(x)| &\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}|\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt)|\, dt \\ &\leqslant 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}|\sin(2(x+h)t)||\sin(-ht)|\, dt \\ &\leqslant 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}|h|t\, dt = 2|h|A_1 = |h|\end{aligned}$$

Ainsi, par majoration, $\lim\limits_{h\to 0} F(x+h) - F(x) = 0$, ce qui prouve que F est continue au point x. Le calcul étant valide pour tout $x \in \mathbb{R}$, F est continue sur $\mathbb{R}$.

[On a même montré en fait que F est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.]

Question 4.

a) L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $\sin$ à l'ordre 2 donne :

$$|\sin(u) - u| = |\sin(u) - \sin(0) - u\sin'(0)| \leqslant \frac{u^2}{2}\max_{[0,u]}|\sin''| \leqslant \frac{u^2}{2}$$

Donc :

$$\boxed{\forall\, u \in \mathbb{R}, |\sin(u) - u| \leqslant \frac{u^2}{2}}$$

b) Pour x et h réels quelconques, on écrit en revenant aux définitions des objets :

$F(x+h) - F(x) + 2hG(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\varphi(t)\, dt$, avec :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) + 2ht\sin(2xt) \\ &= \cos(2xt)\cos(2ht) - \sin(2xt)\sin(2ht) - \cos(2xt) + 2ht\sin(2xt) \\ &= (2ht - \sin(2ht))\sin(2xt) + (1 - \cos(2ht))\cos(2xt)\end{aligned}$$

Ainsi : $|\varphi(t)| \leqslant |(2ht - \sin(2ht))\sin(2xt)| + (1 - \cos(2ht))|\cos(2xt)|$.

Comme on nous dit de ne pas nous préoccuper de la convergence de l'intégrale écrite à droite de la formule demandée, il n'y a plus qu'à multiplier par e^{-t^2} pour obtenir :

$$|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| = \Big|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\varphi(t)\, dt\Big| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}|\varphi(t)|\, dt$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\big(|(2ht - \sin(2ht))\sin(2xt)| + (1 - \cos(2ht))|\cos(2xt)|\big)\, dt$$

c) On continue les majorations :

$\rightarrow |(2ht - \sin(2ht))\sin(2xt)| \leqslant |(2ht - \sin(2ht))| \leqslant \dfrac{(2ht)^2}{2} = 2h^2t^2.$

$\to (1-\cos(2ht))|\cos(2xt)| \leqslant 1-\cos(2ht) = 2\sin^2(ht) \leqslant 2h^2t^2$.

Ainsi $|\varphi(t)| \leqslant 4h^2t^2$ et on touche au but :

$$|F(x+h)-F(x)+2hG(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} 4h^2t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = 4h^2A_2 = \sqrt{\pi}h^2 :$$

$$\boxed{\forall\, x, h \in \mathbb{R}, |F(x+h)-F(x)+2hG(x)| \leqslant Ch^2, \text{ avec } C = \sqrt{\pi}}$$

Question 5.

a) Pour $h \neq 0$, l'inégalité précédente s'écrit aussi :

$$\Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - (-2G(x))\Big| \leqslant Ch$$

Le majorant étant de limite nulle lorsque h tend vers 0, cela prouve que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = -2G(x)$$

ce qui signifie que F est dérivable en tout point x, avec $F'(x) = -2G(x)$:

$$\boxed{F' = -2G}$$

b) Pour $\alpha > 0$, en intégrant par parties :

$$\int_0^\alpha t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt = \Big[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\Big]_0^\alpha + x\int_0^\alpha \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha^2}\sin(2x\alpha) + x\int_0^\alpha \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$$

Le passage à la limite lorsque α tend vers $+\infty$ est sans angoisse et donne :
$\forall\, x \in \mathbb{R}, G(x) = xF(x)$, donc :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2G(x) = -2xF(x)}$$

c) Soit $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}F(x)$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \mathrm{e}^{x^2}(2xF(x)+F'(x)) = 0$$

La fonction φ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(0) = F(0) = A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\varphi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}}$$

Partie II

Question 6.

a) $u \notin \mathcal{D} \iff \frac{u}{2} \in \pi\mathbb{Z} \iff \sin(\frac{u}{2}) = 0$.

La fonction φ_n est donc bien définie sur $\mathcal{D}$ et est clairement continue sur ce domaine comme quotient de fonctions continues le dénominateur n'étant jamais nul.

Comme $\sin(t) \underset{(0)}{\sim} t$, on a :

$$\varphi_n(u) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})} \underset{(0)}{\sim} \frac{(n+\frac{1}{2})u}{2(\frac{u}{2})} = n + \frac{1}{2}$$