1 RAPPELS ET PRÉREQUIS

1.1 DÉVELOPPEMENT ET FACTORISATION

EXERCICE 1

Développer les expressions suivantes :

- $3(x-1)(x+3)=$ ....
- $-2(x-5)^2=$ ....
- $(x+a)^2=$ ....
- $(x-a)^2=$ ....
- $(x+a)(x-a)=$ ....
- $(x+a)(x+b)=$ ....

EXERCICE 2

Factoriser les expressions suivantes :

- $5x^2+10x=$ ....
- $x^2-1=$ ....
- $x^2-2=$ ....
- $(x+3)^2-4=$ ....
- $x^2+4x+4=$ ....

EXERCICE 3

Factoriser les expressions suivantes par le nombre indiqué comme dans l'exemple.

$$9x-2 \text{ par } 2 : 9x-2=2\left(\frac{9}{2}x-1\right).$$

- $\frac{1}{2}x^2-5x$ par $\frac{1}{2}$:

  $\frac{1}{2}x^2-5x=$ ....

- $6x-3$ par 4 :

  $6x-3=$ ....

- $\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{4}x+2$ par $\frac{1}{3}$:

  $\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{4}x+2=$ ....

- $2x^2-3x$ par $2x$:

  $2x^2-3x=$ ....

1.2 PRÉREQUIS

EXERCICE 4

Déterminer le nombre manquant permettant d'obtenir le début du développement donné :

- $(x+\ldots)^2$ pour obtenir : x^2+4x.
- $(x-\ldots)^2$ pour obtenir : x^2-x.
- $(x+\ldots)^2$ pour obtenir : x^2+3x.
- $(x-\ldots)^2$ pour obtenir : x^2-5x.

2 FONCTIONS POLYNOMIALES DU SECOND DEGRÉ

Définition 2.1

Une **fonction polynôme (ou polynomiale) de degré 2** est une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec *a*, *b* et *c* des réels où $a\neq 0$.

REMARQUES

- Pour déterminer les coefficients *a*, *b* et *c*, il faut la forme développée de $f(x)$.
- Si on donne à a la valeur 0, on obtient l'expression $f(x)=bx+c$ qui donnera une fonction affine, déjà étudiée en Seconde.

EXEMPLES

- $f(x)=x^2-4x+5$ donne : $a=1$, $b=-4$ et $c=5$.
- $f(x)=x^2$ donne : $a=1$ et $b=c=0$.
- $f(x)=2(x-2)(x+4)$ donne pour forme développée :
  $f(x)=2x^2+4x-16$ ainsi $a=2$, $b=4$ et $c=-16$.

Définition 2.2

Soit *f* une fonction polynôme de degré 2 avec $f(x)=ax^2+bx+c$.

Le **discriminant de *f*** est le nombre noté Δ et vaut $\Delta=b^2-4ac$.

Propriété 2.1

Soit *f* une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=ax^2+bx+c$. Alors la fonction *f* peut s'écrire :

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$$

avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}$.

Cette écriture est appelée la **forme canonique de *f***.

Démonstration

On pourrait développer l'expression donnée dans la propriété afin de retrouver la fonction *f*.

On va suivre un raisonnement différent, en retrouvant cette expression.

On a : $f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

En utilisant le raisonnement de l'exercice 4, on remarque un début de développement d'une identité remarquable pour l'expression $x^2+\frac{b}{a}x$.

On obtient l'identité remarquable : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

On a : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$.

Donc :

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

$$f(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$f(x)=a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a(x-\alpha)^2+\beta.$$

■

REMARQUES

- La démonstration de cette propriété est très importante. Il faut la comprendre car elle établit la méthode pour donner la forme canonique, ce qui permet de ne pas avoir à apprendre par cœur cette propriété (mais cela implique de maîtriser les bases du calcul). Si vous avez quelques difficultés pour la comprendre, n'ayez crainte, il faut un peu de temps. Revenez-y plus tard !
- Cela généralise ce que vous avez vu en Seconde sur les polynômes de degré 2.
- On a aussi l'égalité : $\beta=f(\alpha)$.

EXEMPLES

- Soit $f(x)=x^2-5x+3$ une fonction polynôme de degré 2.

  On a : $a=1$, $b=-5$ et $c=3$.

  On calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times3=13$.

On calcule les nombres α et β : $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-5}{2\times1}=\dfrac{5}{2}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{13}{4}$.

Donc la forme canonique de f est : $f(x)=1\times\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$.

On simplifie et on obtient : $f(x)=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$.

→ Soit $f(x)=2x^2-3$ une fonction polynôme de degré 2.
On a : $a=2$, $b=0$ et $c=-3$.
On calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=0^2-4\times2\times(-3)=24$.

On obtient pour α et β : $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{0}{2\times2}=0$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{24}{4\times2}=-3$.

Donc la forme canonique de f est : $f(x)=2\times(x-0)^2-3=2x^2-3$.
On remarque que l'expression de f était déjà exprimée sous forme canonique. (ce qui est toujours le cas lorsque le coefficient b vaut 0).

EXERCICE 5

Soit une fonction f polynôme de degré 2 dont la forme canonique s'écrit : $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.
Montrer que la droite $x=\alpha$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.
(il faut montrer que pour tout réel $h>0$, on ait l'égalité : $f(\alpha-h)=f(\alpha+h)$).

EXERCICE 6

Donner la forme canonique des fonctions polynômes de degré 2 suivantes :

- $f(x)=-x^2+x+6$
- $f(x)=x^2+3x$
- $f(x)=(4x+2)(3-x)$
- $f(x)=3x^2-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{11}{3}$

Vérifier avec votre calculatrice vos résultats.

Propriété 2.2

Soit $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2. Le tableau de variations de *f* dépend principalement du signe de *a*.

Si $a>0$, le tableau est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de *f*		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a<0$, le tableau est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de *f*		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration

On démontre ce résultat pour $a<0$. Le cas $a>0$ est laissé au lecteur en suivant le même principe.

On suppose donc que $a<0$.

- Montrons que *f* est croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$:
  Soit x_1 et x_2 dans $]-\infty\,;\alpha]$ avec $\boldsymbol{x_1}<\boldsymbol{x_2}$. Donc $x_1<x_2\leq\alpha$.
  Alors : $x_1-\alpha<x_2-\alpha\leq\alpha-\alpha$.
  C'est-à-dire : $x_1-\alpha<x_2-\alpha\leq 0$.
  Donc : $(x_1-\alpha)^2>(x_2-\alpha)^2\geq 0$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
  Ainsi : $a(x_1-\alpha)^2<a(x_2-\alpha)^2\leq 0$ car le nombre *a* est négatif.
  D'où : $a(x_1-\alpha)^2+\beta<a(x_2-\alpha)^2+\beta\leq\beta$.
  Donc : $\boldsymbol{f(x_1)}<f(\boldsymbol{x_2})$. On en déduit que *f* est croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ (car le sens de l'inégalité est conservé).

- Montrons que *f* est décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$:
  Soit x_1 et x_2 dans $[\alpha\,;+\infty[$ avec $\boldsymbol{x_1}<\boldsymbol{x_2}$. Donc $\alpha\leq x_1<x_2$.
  Alors : $\alpha-\alpha\leq x_1-\alpha<x_2-\alpha$.
  C'est-à-dire : $0\leq x_1-\alpha<x_2-\alpha$.

Donc : $0\leq(x_1-\alpha)^2<(x_2-\alpha)^2$ car la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Ainsi : $0 \geq a(x_1 - \alpha)^2 > a(x_2 - \alpha)^2$ car le nombre a est négatif.

D'où : $\beta \geq a(x_1 - \alpha)^2 + \beta > a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$.

Donc : $\boldsymbol{f(x_1)} > f(\boldsymbol{x_2})$. On en déduit que f est décroissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$ (car le sens de l'inégalité est changé). ■

EXERCICE 7

Reprendre les quatre expressions de l'exercice 6 et donner pour chaque fonction, son tableau de variations.

3 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

3.1 ÉQUATIONS ET RÉSOLUTION

Définition 3.1

Une **équation du second degré**, d'inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.

Une solution de cette équation est appelée une **racine** du trinôme ax^2+bx+c.

EXEMPLE

L'équation $(2x-3)(5+x)=2$ est une équation du second degré car si on développe, on se ramène à : $2x^2+7x-17=0$.

Propriété 3.1

Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c. On considère l'équation (E) $ax^2+bx+c=0$.

- Si $\Delta<0$ alors l'équation (E) n'admet aucune solution et il n'y a aucune factorisation sous forme de produit de polynômes de premier degré.
- Si $\Delta=0$ alors l'équation (E) admet une unique solution $x_0=-\dfrac{b}{2a}$. On a alors : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta>0$ alors l'équation (E) admet deux racines réelles distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  On a alors : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.