

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Logique et théorie des ensembles</b>	<b>1</b>
I.1	Logique . . . . .	1
I.1.1	Quelques locutions et symboles . . . . .	2
I.1.2	Tables de vérité . . . . .	3
I.1.3	Types de démonstration . . . . .	4
I.1.4	Une application : le binôme de Newton . . . . .	8
I.2	Ensembles . . . . .	11
I.2.1	Définition . . . . .	12
I.2.2	Relations entre éléments et parties d'un ensemble . . . . .	13
I.2.3	Ensembles associés à des ensembles . . . . .	13
I.2.4	Relations remarquables . . . . .	15
I.2.5	Union et intersection de plusieurs ensembles . . . . .	16
I.2.6	Produit fini d'ensembles . . . . .	17
I.2.7	Deux quantificateurs de première importance . . . . .	18
I.2.8	Le paradoxe de Russell $\heartsuit$ . . . . .	18
I.3	Applications . . . . .	19
I.3.1	Définition d'une application . . . . .	19
I.3.2	Image directe, image inverse . . . . .	20
I.3.3	Composition d'applications . . . . .	22
I.3.4	Injections, surjections et bijections . . . . .	22
I.3.5	L'axiome du choix $\heartsuit$ . . . . .	25
I.4	Ensembles équipotents, dénombrables . . . . .	26
I.4.1	Ensembles en bijection . . . . .	26
I.4.2	Ensembles dénombrables . . . . .	27
I.4.3	Exemples d'ensembles dénombrables . . . . .	28
<b>II</b>	<b>Les nombres</b>	<b>31</b>
II.1	Corps commutatifs . . . . .	31
II.1.1	Définition d'un corps commutatif $\heartsuit$ . . . . .	31
II.1.2	Ensembles ordonnés $\heartsuit$ . . . . .	33
II.1.3	Corps ordonnés $\heartsuit$ . . . . .	36
II.1.4	Les nombres naturels, entiers, rationnels et réels $\heartsuit$ . . . . .	37
II.1.5	Les nombres complexes . . . . .	42
II.2	Compléments concernant les nombres . . . . .	44
II.2.1	Valeur absolue d'un nombre réel . . . . .	44

II.2.2	Module d'un nombre complexe . . . . .	45
II.2.3	Signature, parties positive et négative . . . . .	47
II.2.4	Parties majorées et minorées de $\mathbb{R}$ . . . . .	49
II.2.5	Intervalles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ . . . . .	51
<b>III</b>	<b>Suites complexes</b>	<b>55</b>
III.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	55
III.1.1	Définitions . . . . .	55
III.1.2	Suites convergentes de $\mathbb{C}$ . . . . .	57
III.1.3	Résultats fondamentaux . . . . .	58
III.1.4	Suites divergentes . . . . .	59
III.1.5	Suites réelles . . . . .	61
III.2	Propriétés supplémentaires . . . . .	63
III.2.1	Combinaisons linéaires de suites convergentes . . . . .	63
III.2.2	Produit et inverse de suites convergentes . . . . .	65
III.2.3	Parties réelle et imaginaire d'une suite convergente . . . . .	66
III.2.4	Module d'une suite convergente . . . . .	67
III.2.5	Théorème de Cesàro . . . . .	67
III.2.6	Sur les suites réelles . . . . .	68
III.2.7	Exemples fondamentaux . . . . .	70
III.3	Rudiments de topologie dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ . . . . .	75
III.3.1	Adhérence d'un ensemble . . . . .	75
III.3.2	Ensembles ouverts et fermés . . . . .	76
III.3.3	Intérieur d'un ensemble $\mathfrak{U}$ . . . . .	79
III.3.4	Ensembles bornés, ensembles compacts . . . . .	81
III.3.5	Une caractérisation des ensembles compacts $\mathfrak{U}$ . . . . .	84
III.4	Suites de Cauchy . . . . .	87
III.4.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	87
III.4.2	Complétude . . . . .	89
III.4.3	Théorème de Bolzano-Weierstraß . . . . .	90
III.5	Compléments de théorie pour les suites réelles . . . . .	91
III.5.1	Suites adjacentes . . . . .	91
III.5.2	Limites supérieure et inférieure . . . . .	93
<b>IV</b>	<b>Séries complexes</b>	<b>97</b>
IV.1	Définition et premières propriétés . . . . .	97
IV.1.1	Définition . . . . .	97
IV.1.2	Suite associée et restes d'une série . . . . .	99
IV.1.3	Séries réelles . . . . .	100
IV.1.4	Critère de Cauchy . . . . .	101
IV.1.5	Convergence absolue et semi-convergence . . . . .	102
IV.1.6	Convergence et permutations . . . . .	103
IV.2	Séries fondamentales . . . . .	107
IV.2.1	Séries géométriques dans $\mathbb{C}$ . . . . .	107
IV.2.2	Séries de Riemann . . . . .	109
IV.2.3	Séries de Bertrand $\mathfrak{U}$ . . . . .	111
IV.3	Théorèmes d'Abel et de Mertens . . . . .	112

IV.3.1	Critères d'Abel . . . . .	112
IV.3.2	Théorème de Mertens . . . . .	114
IV.4	Étude de la convergence de séries . . . . .	116
IV.4.1	Séries alternées . . . . .	116
IV.4.2	Critères théoriques de convergence . . . . .	117
IV.4.3	Critères pratiques de convergence . . . . .	118
IV.4.4	Critères de convergence des séries : compléments $\heartsuit$ . . . . .	120
IV.4.5	Exemples d'étude de série . . . . .	122
<b>V</b>	<b>Fonctions</b>	<b>125</b>
V.1	Généralités . . . . .	125
V.1.1	Définitions . . . . .	125
V.1.2	Opérations entre fonctions . . . . .	127
V.1.3	Fonctions associées . . . . .	128
V.1.4	Fonctions bornées . . . . .	130
V.1.5	Zéros d'une fonction . . . . .	132
V.1.6	Fonctions caractéristiques . . . . .	133
V.2	Limite des valeurs d'une fonction . . . . .	134
V.2.1	Définitions . . . . .	134
V.2.2	Critère par les suites . . . . .	137
V.2.3	Critère par les limites restreintes . . . . .	139
V.2.4	Critère de Cauchy . . . . .	139
V.2.5	Propriétés de la limite . . . . .	140
V.3	Fonctions continues . . . . .	143
V.3.1	Définitions . . . . .	143
V.3.2	Exemples fondamentaux . . . . .	145
V.3.3	Propriétés des fonctions continues . . . . .	147
V.3.4	Fonctions continues sur un compact . . . . .	148
V.4	Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ . . . . .	149
V.4.1	Continuité à gauche et à droite . . . . .	149
V.4.2	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	151
V.4.3	Théorème de la limite monotone . . . . .	155
V.4.4	Convexité . . . . .	157
V.4.5	Superconvexité $\heartsuit$ . . . . .	162
<b>VI</b>	<b>Fonctions dérivables</b>	<b>165</b>
VI.1	Dérivabilité . . . . .	165
VI.1.1	Définitions . . . . .	165
VI.1.2	Dérivée d'une fonction définie sur une partie réelle . . . . .	167
VI.1.3	Dérivée complexe . . . . .	171
VI.1.4	Théorèmes de génération . . . . .	173
VI.2	Théorème des accroissements finis . . . . .	176
VI.2.1	Théorème des accroissements finis . . . . .	176
VI.2.2	Une généralisation du théorème des accroissements finis . . . . .	181
VI.2.3	Théorème de l'ouvert connexe . . . . .	182
VI.2.4	Théorème de Darboux . . . . .	183
VI.3	Espaces $C^p$ . . . . .	184

VI.3.1	Définitions . . . . .	184
VI.3.2	Théorème de structure . . . . .	185
VI.3.3	Génération d'éléments de $C^p$ . . . . .	187
VI.3.4	Formule de Taylor-Young $\mathfrak{U}$ . . . . .	191
VI.3.5	Formule de Taylor-Lagrange . . . . .	193
VI.4	Application à l'étude des fonctions réelles . . . . .	195
VI.4.1	Variation . . . . .	196
VI.4.2	Fonction inverse . . . . .	196
VI.4.3	Fonctions convexes et fonctions concaves . . . . .	198
VI.4.4	Recherche d'extrema . . . . .	201
VI.4.5	Asymptotes et points particuliers . . . . .	205
VI.4.6	Calcul de limites . . . . .	208
<b>VII</b>	<b>L'intégrale de Darboux</b> . . . . .	<b>221</b>
VII.1	Définition et premières propriétés . . . . .	221
VII.1.1	Intégrales de fonctions étagées . . . . .	221
VII.1.2	Intégrales supérieure et inférieure . . . . .	226
VII.1.3	Intégration sur un intervalle compact . . . . .	227
VII.1.4	Inégalité de Cauchy-Schwarz $\mathfrak{U}$ . . . . .	231
VII.1.5	Deux critères d'intégrabilité . . . . .	233
VII.2	Interprétation de l'intégrale d'une fonction . . . . .	234
VII.2.1	Notations . . . . .	234
VII.2.2	Sommes de Riemann . . . . .	237
VII.3	Calcul d'intégrales . . . . .	243
VII.3.1	Théorème fondamental du calcul intégral . . . . .	244
VII.3.2	Intégration par parties . . . . .	246
VII.3.3	Formule du changement de variable . . . . .	249
<b>VIII</b>	<b>Suites de fonctions</b> . . . . .	<b>253</b>
VIII.1	Types de convergence . . . . .	253
VIII.1.1	Convergence ponctuelle . . . . .	253
VIII.1.2	Convergence uniforme . . . . .	255
VIII.2	Convergence et continuité . . . . .	258
VIII.2.1	Limite de fonctions continues . . . . .	258
VIII.2.2	Un exemple de fonction continue nulle part dérivable $\mathfrak{U}$ . . . . .	261
VIII.2.3	Approximation par des fonctions affines par morceaux $\mathfrak{U}$ . . . . .	264
VIII.2.4	Approximation de la fonction valeur absolue par une suite polynomiale $\mathfrak{U}$ . . . . .	265
VIII.2.5	Théorème d'approximation de Weierstraß $\mathfrak{U}$ . . . . .	268
VIII.2.6	Théorème de Bernstein $\mathfrak{U}$ . . . . .	271
VIII.3	Convergence uniforme et dérivabilité . . . . .	275
VIII.3.1	Le cas réel . . . . .	275
VIII.3.2	Le cas complexe . . . . .	279
VIII.4	Convergence uniforme et intégrales . . . . .	280
VIII.4.1	Critères d'intégrabilité . . . . .	280
VIII.4.2	Primitives de fonctions continues . . . . .	282
VIII.4.3	Théorème d'existence des primitives $\mathfrak{U}$ . . . . .	283

VIII.5	Permutation des limites . . . . .	285
VIII.5.1	Cas d'une suite de fonctions . . . . .	285
VIII.5.2	Une caractérisation des fonctions réglées $\mathfrak{U}$ . . . . .	288
VIII.5.3	Cas général $\mathfrak{U}$ . . . . .	289
VIII.6	Séries entières . . . . .	290
VIII.6.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	290
VIII.6.2	Fonctions définies à partir de séries entières . . . . .	292
VIII.6.3	Séries entières et dérivabilité . . . . .	294
<b>IX</b>	<b>Fonctions élémentaires</b> . . . . .	<b>297</b>
IX.1	Puissances entières . . . . .	297
IX.1.1	Définition . . . . .	297
IX.1.2	Formule de Newton . . . . .	299
IX.2	Polynômes . . . . .	299
IX.2.1	Définition . . . . .	300
IX.2.2	Identité de Taylor . . . . .	301
IX.2.3	Étude des zéros . . . . .	301
IX.2.4	Division de polynômes . . . . .	304
IX.2.5	Plus grand commun diviseur . . . . .	305
IX.3	Fractions rationnelles . . . . .	307
IX.3.1	Définitions . . . . .	307
IX.3.2	Décomposition d'une fraction rationnelle propre . . . . .	309
IX.3.3	Cas pratiques de décomposition . . . . .	311
IX.3.4	Calcul effectif d'une décomposition . . . . .	312
IX.4	Les fonctions exp et ln . . . . .	315
IX.4.1	La fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}$ . . . . .	315
IX.4.2	Séries de Mercator $\mathfrak{U}$ . . . . .	317
IX.4.3	La constante d'Euler-Mascheroni $\mathfrak{U}$ . . . . .	319
IX.4.4	La fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ . . . . .	321
IX.4.5	Unicité de la fonction exponentielle $\mathfrak{U}$ . . . . .	325
IX.4.6	Une définition alternative de l'exponentielle $\mathfrak{U}$ . . . . .	327
IX.4.7	La fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ . . . . .	329
IX.4.8	Fonctions puissance et exponentielle . . . . .	332
IX.4.9	Logarithme de base $b$ . . . . .	337
IX.5	Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses . . . . .	339
IX.5.1	Cosinus et sinus hyperboliques . . . . .	339
IX.5.2	Fonctions tangente et cotangente hyperboliques . . . . .	343
IX.5.3	Calcul hyperbolique . . . . .	344
IX.5.4	Fonctions hyperboliques inverses . . . . .	347
IX.6	Fonctions circulaires . . . . .	352
IX.6.1	Fonctions cosinus et sinus . . . . .	352
IX.6.2	Le nombre $\pi$ . . . . .	355
IX.6.3	Fonctions tangente et cotangente . . . . .	356
IX.6.4	Calcul trigonométrique . . . . .	357
IX.6.5	Formules du calcul trigonométrique . . . . .	360
IX.6.6	Retour aux fonctions tangente et cotangente . . . . .	362
IX.6.7	Valeurs remarquables . . . . .	364

IX.6.8	Sur l'irrationalité de $\pi$ $\mathbb{Q}$ . . . . .	366
IX.6.9	Fonctions trigonométriques inverses . . . . .	368
IX.6.10	Développement en série de puissances de $\arctan \mathbb{Q}$ . . . . .	372
IX.7	Applications . . . . .	373
IX.7.1	Retour à l'exponentielle . . . . .	373
IX.7.2	Retour aux séries . . . . .	375
IX.7.3	Égalité de fonctions . . . . .	377
IX.7.4	Étude de la fonction $\arg$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . . . . .	377
IX.7.5	Applications du logarithme népérien . . . . .	379
IX.7.6	Dérivée logarithmique . . . . .	382
IX.7.7	Calcul de dérivées d'ordre supérieur . . . . .	383
<b>X</b>	<b>Primitivation dans <math>\mathbb{R}</math></b> . . . . .	<b>387</b>
X.1	Généralités . . . . .	387
X.1.1	Notation $f \simeq g$ . . . . .	387
X.1.2	Primitive d'une fonction . . . . .	388
X.2	Théorie du calcul des primitives . . . . .	390
X.2.1	Résultats fondamentaux . . . . .	390
X.2.2	Généralités sur le calcul des primitives . . . . .	392
X.2.3	Primitivation d'un polynôme . . . . .	392
X.2.4	Primitivation d'une exponentielle-polynôme . . . . .	393
X.2.5	Calcul de $\int P(x, \cos(ax), \sin(ax), \dots, \cos(bx), \sin(bx)) dx$ . . . . .	393
X.2.6	Primitivation d'une fraction rationnelle . . . . .	395
X.2.7	Fonctions dont le calcul d'une primitive peut se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle . . . . .	397
X.2.8	Calcul de $\int R(\cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots) dx$ . . . . .	402
X.2.9	Calcul de $\int R(\cosh(x), \sinh(x), \cosh(2x), \sinh(2x), \dots) dx$ . . . . .	405
X.2.10	Passage de $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ à l'une des primitives $\int R'(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) d\varphi$ ou $\int R'(\cosh(\varphi), \sinh(\varphi)) d\varphi$ . . . . .	407
X.2.11	Primitivation des fonctions inverses . . . . .	408
<b>XI</b>	<b>Équations différentielles</b> . . . . .	<b>411</b>
XI.1	Opérateurs de dérivation . . . . .	411
XI.1.1	Définitions générales . . . . .	411
XI.1.2	Opérateurs de dérivation linéaires à coefficients constants . . . . .	414
XI.2	EDLCC . . . . .	416
XI.2.1	Définitions . . . . .	417
XI.2.2	Résolution des équations homogènes . . . . .	417
XI.2.3	Généralités sur les équations non-homogènes . . . . .	424
XI.2.4	Méthode de la variation des constantes . . . . .	425
XI.2.5	Méthode des exponentielles-polynômes . . . . .	428
XI.2.6	Équation d'Euler . . . . .	431
XI.3	Équations différentielles ordinaires . . . . .	434
XI.3.1	Équations exactes . . . . .	434
XI.3.2	Équations à second membre séparé . . . . .	436
XI.3.3	Équations à second membre homogène par rapport à $x$ et $u$ . . . . .	439
XI.3.4	Équations à second membre linéaire en $u$ . . . . .	440

XI.3.5	Équation différentielles d'ordre deux . . . . .	442
<b>XII</b>	<b>Compléments sur l'intégrale</b>	<b>447</b>
XII.1	Intégrales de Darboux généralisées . . . . .	447
XII.1.1	Intégrales convergentes . . . . .	447
XII.1.2	Critères pour l'existence d'une intégrale . . . . .	450
XII.1.3	Changement de variable et intégration par parties . . . . .	452
XII.1.4	Fonctions absolument intégrables . . . . .	453
XII.1.5	Critères d'intégrabilité . . . . .	456
XII.1.6	Calcul pratique d'intégrales . . . . .	460
XII.1.7	Séries numériques absolument convergentes . . . . .	463
XII.2	Intégrales et limites . . . . .	464
XII.2.1	Passage de la limite sous le signe d'intégration . . . . .	464
XII.2.2	Interprétation de Cauchy-Riemann de l'intégrale . . . . .	467
XII.2.3	Théorème de la convergence majorée $\mathfrak{W}$ . . . . .	468
XII.2.4	Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .	472
XII.2.5	L'intégrale de Dirichlet . . . . .	479
XII.3	Quelques intégrales remarquables . . . . .	482
XII.3.1	Intégrale de Gauß . . . . .	482
XII.3.2	La fonction Gamma . . . . .	483
XII.3.3	Théorème de Bohr-Mollerup $\mathfrak{W}$ . . . . .	490
XII.3.4	La fonction Bêta . . . . .	493
XII.3.5	Autres intégrales eulériennes . . . . .	498
	<b>Bibliographie</b>	<b>501</b>
	<b>Glossaire</b>	<b>503</b>