Fiche 1

Réduction d'endomorphismes

Réduire un endomorphisme d'un espace vectoriel E consiste à déterminer une base de E dans laquelle l'expression de l'endomorphisme est plus simple.
La réduction d'endomorphismes trouve de nombreuses applications, tant en algèbre qu'en géométrie et en analyse (comme par exemple l'étude de suites récurrentes, la résolution de systèmes différentiels…).
Cette fiche aborde quelques cas en dimension infinie pour fixer la notion d'éléments propres, mais son principal objectif est la maîtrise de la réduction d'endomorphismes en dimension finie, c'est-à-dire la diagonalisation et la trigonalisation d'une matrice en dimension 2 et 3.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{K})$.

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.

Notations :

On note χ_A le polynôme caractéristique de A, c'est-à-dire $\boxed{\chi_A = \det(X\,\mathrm{I}_n - A)}$.
Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note $m(\lambda)$ la multiplicité de la valeur propre λ, et $E_\lambda(A)$ l'espace propre associé à la valeur propre λ.

On utilise les mêmes notations pour les éléments propres d'un endomorphisme.

Je vous montre comment

■ Rechercher les éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Remarque : Il existe de nombreuses façons de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme. Nous nous contenterons ici des méthodes incontournables.

▸ En utilisant la définition :

Exemple 1

Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $u : P \mapsto P'$.

Réponse

$\left(\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right) \Leftrightarrow \left(\exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, P' = \lambda P\right)$.

En considérant les degrés des polynômes, il vient $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$, puis $E_0(u) = \mathrm{Vect}\left\{X^0\right\}$.

- À l'aide du polynôme caractéristique :

Exemple 2

Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse

- Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A = \det(X I_2 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 1 = (X-2)X .$$

On a donc : $\mathrm{Sp}(A) = \{0,2\}$.

Remarque : La matrice A est clairement de rang 1, il est normal de trouver 0 comme valeur propre car A n'est pas inversible, donc $\det(A) = 0$.

- Déterminons les espaces propres :

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_0(A)\right) \Leftrightarrow (x+y=0) \text{ ; donc } E_0(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2x \\ x+y=2y \end{cases} \Leftrightarrow (x=y) \text{ ; donc } E_2(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Remarque : On peut également raisonner sur les matrices :

$$A - 0.I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } E_0(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\text{et } A - 2.I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } E_2(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Diagonaliser une matrice *A*

1. On détermine le polynôme caractéristique de la matrice A (en simplifiant au maximum le calcul du déterminant pour pouvoir facilement factoriser le polynôme).

   → Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé, la matrice n'est pas diagonalisable.

- ➞ Sinon, on obtient les valeurs propres de A (qui sont ses racines), ainsi que leurs multiplicités.

2. On détermine les espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant des systèmes d'équations linéaires obtenus en écrivant $AX=\lambda X$ ou $(A-\lambda.\mathrm{I}_n)X=0$.
   - ➞ Si un espace propre n'a pas pour dimension la multiplicité de la valeur propre associée (si $\mathrm{rg}(A-\lambda.\mathrm{I}_n)>n-m(\lambda)$), la matrice n'est pas diagonalisable.
   - ➞ Sinon, $A=PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux les valeurs propres écrites au nombre de leur multiplicité, et la matrice de passage P a pour vecteurs colonnes les vecteurs propres formant les bases des espaces propres, écrits dans le même ordre que les valeurs propres associées dans D.

Remarque : Si la matrice a une unique valeur propre λ et si elle est diagonalisable, elle s'écrit $P(\lambda I_n)P^{-1}$, c'est donc λI_n elle-même.
Sinon, si A est diagonalisable, il n'y a pas unicité de la matrice diagonale semblable à A, l'ordre d'écriture des valeurs propres étant quelconque !

Exemple 3

Diagonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$.

Réponse

- Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A=\det(X\mathrm{I}_2-A)=\begin{vmatrix}X-1 & 1\\ 3 & X-3\end{vmatrix}=X(X-4).$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, A est donc diagonalisable.

- Déterminons les espaces propres :

$$\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in E_0(A)\right)\Leftrightarrow(x-y=0)\text{ ; donc } E_0(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in E_4(A)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=4x\\ -3x+3y=4y\end{cases}\Leftrightarrow(y=-3x)\text{ ; donc } E_4(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}\right\}.$$

Finalement, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4\end{pmatrix}$.

Remarque : La matrice inverse de la matrice de passage n'est généralement pas demandée. Je la donne à titre indicatif, sans détailler son calcul qui n'est pas un objectif de cette fiche.

Exemple 4

Diagonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}$.

Réponse

> **Remarque :** La troisième colonne est proportionnelle à la deuxième, le rang de la matrice est donc 2 et l'on va trouver 0 comme valeur propre. Le polynôme caractéristique va se factoriser simplement, on peut donc développer le déterminant directement (par exemple avec la méthode de Sarrus). On peut aussi chercher à le simplifier quand même !

- Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A=\det(X\mathrm{I}_3-A)=\begin{vmatrix}X-1 & -2 & 1\\ -3 & X+2 & -1\\ 0 & -4 & X+2\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}X-2 & -2 & 1\\ X-2 & X+2 & -1\\ X-2 & -4 & X+2\end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=}(X-2)\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & X+4 & -2\\ 0 & -2 & X+1\end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\text{on développe suivant la première colonne}}(X-2)\begin{vmatrix}X+4 & -2\\ -2 & X+1\end{vmatrix}=(X-2)\left(X^2+5X\right)=(X-2)X(X+5).$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, la matrice est donc diagonalisable.

- Déterminons les espaces propres :

$$\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_2(A)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-z=2x\\ 3x-2y+z=2y\\ 4y-2z=2z\end{cases}\Leftrightarrow(x=y=z)\text{ ; donc } E_2(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_0(A)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-z=0\\ 3x-2y+z=0\\ 4y-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ z=2y\end{cases}\text{ ; donc } E_0(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_{-5}(A)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-z=-5x\\ 3x-2y+z=-5y\\ 4y-2z=-5z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{12}z\\ y=-\dfrac{3}{4}z\end{cases}\text{ ; donc } E_{-5}(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}5\\ -9\\ 12\end{pmatrix}\right\}.$$

Remarque : Pour simplifier la forme de la matrice de passage, je prends un vecteur directeur de $E_{-5}(A)$ avec des coordonnées entières, mais ce n'est pas une obligation !

Finalement, $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \dfrac{1}{35}\begin{pmatrix} 30 & 10 & -5 \\ -21 & 7 & 14 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

■ Trigonaliser une matrice *A* dans $M_2(\mathbb{K})$

On suppose que $A \in M_2(\mathbb{K})$ est trigonalisable, mais non diagonalisable (c'est-à-dire $\chi_A = (X-\lambda)^2$ avec $\dim(E_\lambda) = 1$).

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

Soient $e_1 \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ (on a donc $u(e_1) = \lambda e_1$), et e_2 un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, non colinéaire à e_1.

En notant $u(e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2$, on a : $\text{Mat}_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

La trace étant un invariant de similitude, on a $\text{tr}(A) = 2\lambda = \lambda + \beta$, donc $\beta = \lambda$.

On détermine α en écrivant $u(e_2) - \lambda e_2 = \alpha e_1$.

Remarque : $\alpha \neq 0$ car A n'est pas diagonalisable, donc en prenant $e_1' = \alpha e_1 \in E_\lambda$, on a $\text{Mat}_{(e_1',e_2)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$… C'est plus joli !

Exemple 5

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Réponse

- Déterminons le spectre de A :

$\chi_A = (X+1)^2$. A admet donc -1 pour unique valeur propre.

Le polynôme caractéristique est scindé, donc la matrice est trigonalisable.

Remarque : La matrice ne possédant qu'une seule valeur propre, elle ne peut pas être diagonalisable sinon elle serait de la forme λI_2.

- Déterminons l'espace propre :

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)\right) \Leftrightarrow (x = -y) \text{ ; donc } E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Remarque : $\dim\left(E_{-1}(A)\right) < m(-1)$, ce qui confirme que la matrice n'est pas diagonalisable.

Avec les notations précédentes, on prend : $e_1 = (1, -1), e_2 = (1, 0)$.

On a : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\alpha = 1$.

Finalement, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

■ Trigonaliser une matrice *A* dans $M_3(\mathbb{K})$

On suppose que *A* est trigonalisable, mais non diagonalisable (c'est-à-dire que son polynôme caractéristique est scindé, mais les espaces propres n'ont pas tous pour dimension la multiplicité de la valeur propre associée). On note *u* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à *A*.

- Si *u* a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, avec $m(\lambda_2) = 2$:

On détermine $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\{e_1\}$ et $E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\{e_2\}$ ($\dim\left(E_{\lambda_2}\right) = 1$, sinon *A* serait diagonalisable).

On complète $\{e_1, e_2\}$ à l'aide d'un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une base (e_1, e_2, e_3) ; on a alors : $\mathrm{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

La trace étant un invariant de similitude, on a $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \gamma$, donc $\gamma = \lambda_2$.

On détermine α et β en résolvant : $u(e_3) - \lambda_2 e_3 = \alpha e_1 + \beta e_2$.

Remarque : En notant E_3 le vecteur des coordonnées de e_3 dans la base canonique, si on a déterminé P^{-1}, la formule de changement de base donne :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1} A E_3.$$

Exemple 6

Trigonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Réponse

- Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 \\ 1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ X-2 & X-2 & -2 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & X-3 & -1 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{on développe} \\ \text{suivant la} \\ \text{première colonne}}} (X-2)\begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-4).$$

Le polynôme caractéristique est scindé, donc A est trigonalisable.

- Déterminons les espaces propres :

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(A)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 4x \\ 2y + 2z = 4y \\ -x + y + 3z = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases} \text{; donc } E_4(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2y + 2z = 2y \\ -x + y + 3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \text{; donc } E_2(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

$\dim(E_2(A)) \neq m(2)$, donc A n'est pas diagonalisable.

- Avec les notations précédentes, on prend : $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$, et $e_3 = (1,0,0)$.

$$\det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{\text{on développe} \\ \text{suivant la} \\ 3^{\text{e}} \text{ colonne}}} -1 \neq 0 \text{, donc } (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

On a : $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u)=\begin{pmatrix}4&0&\alpha\\0&2&\beta\\0&0&2\end{pmatrix}$, avec : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

donc $\alpha=-1$ et $\beta=1$.

Finalement : $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&-1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

- Si u a une seule valeur propre triple λ, avec $\dim(E_\lambda)=2$:

Le procédé est le même que précédemment, avec $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$.

Exemple 7

Trigonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-2&0\\-4&-4&-1\end{pmatrix}$.

Réponse

- Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X&-1&0\\1&X+2&0\\4&4&X+1\end{vmatrix}\underbrace{=}_{\substack{\text{on développe}\\\text{suivant la}\\\text{dernière colonne}}}(X+1)\begin{vmatrix}X&-1\\1&X+2\end{vmatrix}=(X+1)(X(X+2)+1)=(X+1)^3.$$

Le polynôme caractéristique est scindé, donc A est trigonalisable.

Remarque : A ne peut pas être diagonalisable, sinon elle serait semblable à $-\mathrm{I}_3$, elle serait donc $-\mathrm{I}_3$.

- Déterminons l'espace propre :

$$\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1}(A)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\-x-2y=-y\\-4x-4y-z=-z\end{cases}\Leftrightarrow(y=-x)\ ;$$

donc $E_{-1}(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Remarque : $\dim(E_{-1}(A))\neq m(-1)$ ce qui confirme que A n'est pas diagonalisable !