Jour n°1

Exercice 1.1

Une ligne haute tension assimilable à un fil droit infini selon l'axe (Oz) transporte un courant sinusoïdal $i(t)$ de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $I = 1000$ A. On approche de cette ligne haute tension une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30$ cm à une distance $d = 2$ cm. Cette bobine d'inductance propre et de résistance négligeables est fermée sur une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace E à ses bornes est supérieure à 1,5 V.

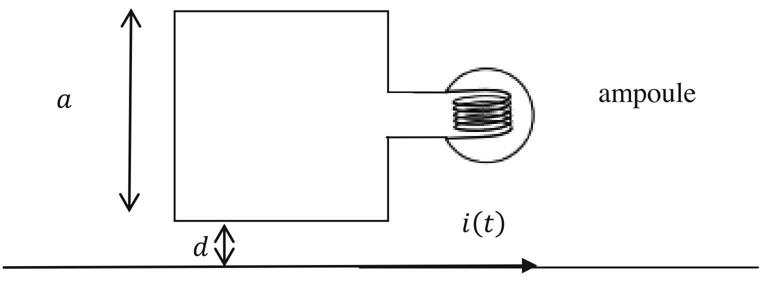
On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) et de base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.

On se trouve ici dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

1) Donner la définition et la condition de validité de l'ARQS. Justifier ici le choix de l'ARQS. Donner, en la justifiant, l'expression des équations de Maxwell dans l'ARQS.

2) Déterminer en coordonnées cylindriques le champ magnétique $\vec{B}(r)$ créé dans tout l'espace par cette ligne haute tension.

3) Déterminer le flux magnétique total créé par cette ligne haute tension à travers la bobine plate.



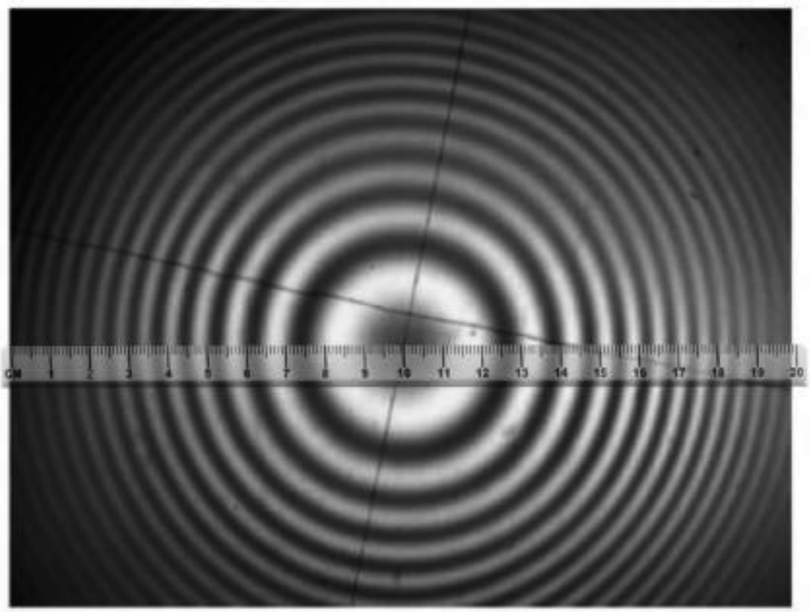
4) En déduire le nombre de spires N nécessaires pour que l'ampoule puisse s'éclairer. Faire l'application numérique.

On assimile maintenant pour la question **5)**, l'ampoule à une résistance $r = 10\ \Omega$ en série avec une inductance propre $L = 10$ mH..

5) Calculer alors la valeur efficace I' de l'intensité $i'(t)$ dans la bobine plate lorsque $E = 1,5$ V et le déphasage ϕ' entre $i'(t)$ et $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé. Faire les applications numériques.

Exercice 1.2

La figure suivante a été obtenue à l’aide d’un interféromètre de Michelson éclairé par une source étendue de longueur d’onde dominante $\lambda = 589$ nm.



1) Proposer un montage permettant d’obtenir cette figure avec tout le matériel usuellement disponible en salle de TP que vous jugerez nécessaire.

2) Déduire de la figure l’épaisseur de la lame d’air équivalente, sachant que l’image est observée sur un écran à l’aide d’une lentille de distance focale image $f' = 100$ cm. Évaluer l’incertitude associée.

Énoncé

Une ligne haute tension assimilable à un fil droit infini selon l'axe (Oz) transporte un courant sinusoïdal $i(t)$ de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $I = 1000$ A. On approche de cette ligne haute tension une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30$ cm à une distance $d = 2$ cm. Cette bobine d'inductance propre et de résistance négligeables est fermée sur une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace E à ses bornes est supérieure à 1,5 V.

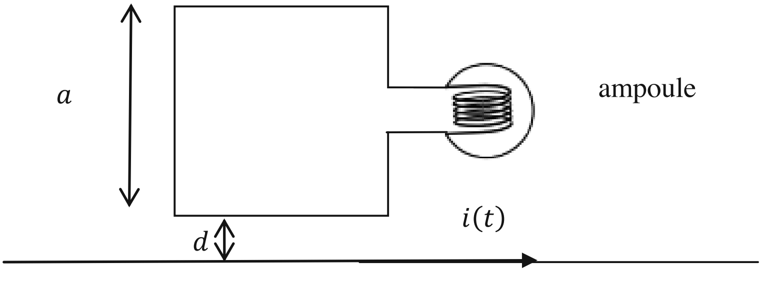
On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) et de base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.

On se trouve ici dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

1) Donner la définition et la condition de validité de l'ARQS. Justifier ici le choix de l'ARQS. Donner, en la justifiant, l'expression des équations de Maxwell dans l'ARQS.

2) Déterminer en coordonnées cylindriques le champ magnétique $\vec{B}(r)$ créé dans tout l'espace par cette ligne haute tension.

3) Déterminer le flux magnétique total créé par cette ligne haute tension à travers la bobine plate.



4) En déduire le nombre de spires N nécessaires pour que l'ampoule puisse s'éclairer. Faire l'application numérique.

On assimile maintenant pour la question **5)**, l'ampoule à une résistance $r = 10\ \Omega$ en série avec une inductance propre $L = 10$ mH..

5) Calculer alors la valeur efficace I' de l'intensité $i'(t)$ dans la bobine plate lorsque $E = 1{,}5$ V et le déphasage ϕ' entre $i'(t)$ et $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé. Faire les applications numériques.

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice porte sur différents thèmes qui sont l'induction de première année et l'électromagnétisme de deuxième année. Il s'agit d'un exercice assez classique qui ne pose pas de grandes difficultés. Les questions sont progressives.

1) Cette question est une question de cours. Il faut définir l'ARQS.

↪ Dans l'ARQS, il suffit de raisonner comme en statique et de remplacer le courant constant par le courant dépendant du temps.

Pour appliquer l'ARQS au fil, il faut faire l'hypothèse que le fil n'est pas infini et négliger les effets de bord pour le calcul.

Il faut écrire ensuite les équations de Maxwell en faisant les bonnes approximations.

↪ On cherche à simplifier les équations. Dans le cas de l'ARQS, le courant de déplacement est négligeable par rapport au courant de conduction.

2) Il s'agit de déterminer le champ magnétique créé par un fil infini. On pense à regarder les symétries et invariants.

↪ Le résultat a été donné dans le programme de première année et se démontre à l'aide du théorème d'Ampère dans le programme de deuxième année.

↪ Le champ magnétique appartient au plan d'antisymétrie et est perpendiculaire au plan de symétrie.

3) Il faut maintenant déterminer le flux du champ magnétique à travers le circuit. Attention à prendre en compte le nombre de spires.

↪ Penser à orienter le circuit.

↪ Faire attention car le champ magnétique dépend de la distance par rapport au fil.

4) Il faut maintenant déterminer la fem induite en utilisant la loi de Faraday et utiliser la condition donnée dans l'énoncé pour l'allumage de la lampe.

↪ Il n'y a pas de difficultés dans cette question.

5) On tient compte de la résistance de la lampe. Il faut donc écrire une équation de mailles. On a donc un déphasage entre la fem et le courant dans le circuit.

↪ Il s'agit d'étudier un circuit RL.

Corrigé

1) L'ARQS consiste à négliger les phénomènes de propagation dans le circuit, c'est-à-dire que l'on néglige le temps de propagation $\frac{OM}{c}$ devant le temps caractéristique T des variations temporelles des sources. Le critère est donc en fonction de la longueur caractéristique L du circuit :

$$\frac{L}{c} \ll T.$$

On a donc :

$$\boxed{L \ll cT = \frac{c}{f} = \lambda.}$$

λ représente la longueur d'onde. Ici la condition est la suivante :

$$L \ll 3.10^8 \times \frac{1}{50} = 6.10^6\ m.$$

Ici, on justifie le fait que le fil est de longueur finie et que l'on néglige les effets de bords pour le calcul du champ magnétique. On garde les propriétés du fil infini pour la géométrie.

Les équations de Maxwell sont les suivantes :

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$div\ \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).$$

Pour un conducteur ohmique, la densité volumique de charges est nulle. Dans le cas de l'ARQS, on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction et on obtient donc les équations simplifiées suivantes :

$$\boxed{\begin{gathered} div\ \vec{E} = 0 \\ div\ \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\vec{j}. \end{gathered}}$$

2) En coordonnées cylindrique, le champ magnétique est de la forme $\vec{B}(r,\theta,z)$. Le problème est invariant par translation le long du fil et donc le champ magnétique ne dépend pas de z. Le problème est aussi invariant par rotation autour de l'axe (Oz) donc le champ magnétique ne dépend pas de l'angle θ.

Le plan contenant le fil et le point où l'on calcule le champ magnétique est un plan de symétrie (plan $\overrightarrow{e_r}, Oz$) donc le champ est perpendiculaire à ce plan.

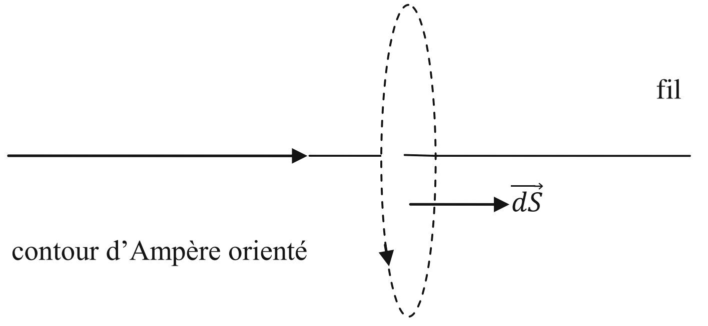
On a donc :

$$\vec{B}(r,\theta,z) = B(r)\overrightarrow{e_\theta}.$$

Les lignes de champ sont donc des cercles.

On applique le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r.

On a ainsi le schéma suivant :



L'orientation du contour d'Ampère et l'orientation de la surface s'appuyant sur le contour sont liées.

Le théorème d'Ampère donne :

$$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enl}.$$

Comme le champ magnétique est selon $\overrightarrow{e_\theta}$, il est donc colinéaire à $\overrightarrow{dl}$. On a donc :

$$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \oint B.dl = B\oint dl = B2\pi r.$$

Comme le courant $i(t)$ est dans le même sens que $\overrightarrow{dS}$, le courant enlacé est égal à : $I_{enl} = i(t)$. On trouve donc :

$$B2\pi r = \mu_0 i(t)$$
$$B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}.$$

Le champ magnétique vaut :

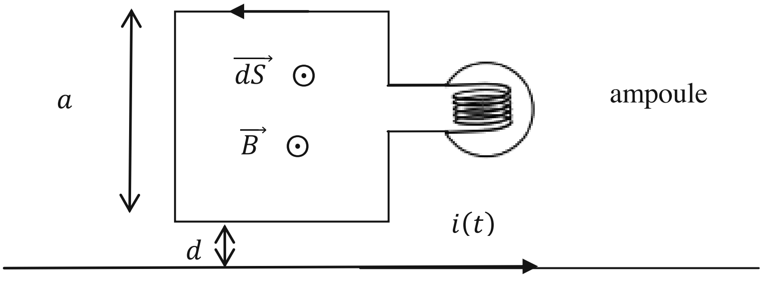
$$\boxed{\vec{B}(r,\theta,z) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}.}$$

On retrouve bien le champ créé par un fil infini. Penser à vérifier l'homogénéité.

3) Pour calculer le flux à travers le circuit, on utilise l'expression du flux qui est :

$$\phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS}.$$

Il faut donc orienter le circuit. Pour cela, il est nécessaire et obligatoire de faire un schéma :



L'orientation du circuit est arbitraire. Celle de la surface est liée à l'orientation du contour par le règle du tire bouchon.

On a donc :

$$\phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \iint B.dS.$$

On prend pour élément de surface élémentaire un rectangle de hauteur a et d'épaisseur dr. On a donc pour une spire :

$$\phi = \int_{d}^{d+a} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \int_{d}^{d+a} \frac{dr}{r}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} [ln(r)]_{d}^{d+a}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} ln\left(\frac{d+a}{d}\right).$$

Pour N spires, on obtient donc le flux magnétique suivant :

$$\boxed{\phi = N \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} ln\left(\frac{d+a}{d}\right).}$$

Penser à multiplier le flux par le nombre de spires.

4) On a donc un circuit placé dans un champ magnétique variable créé par le fil. Le circuit fermé est donc le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique et la fem induite est donnée par la loi de faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}.$$

On obtient en dérivant l'intensité par rapport au temps :

$$e = -N \frac{\mu_0 a}{2\pi} ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \frac{di}{dt}.$$

L'expression du courant est donc la suivante :

$$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(2\pi f t).$$

La dérivée est donc égale à :

$$\frac{di}{dt} = -2\pi f I_{eff}\sqrt{2}\sin(2\pi f t).$$

La fem induite est donc égale à :

$$e = N \frac{\mu_0 a}{2\pi} ln\left(\frac{d+a}{d}\right) 2\pi f I_{eff}\sqrt{2}\sin(2\pi f t).$$

En simplifiant, on obtient donc :

$$e = N\mu_0 a ln\left(\frac{d+a}{d}\right) f I_{eff}\sqrt{2}\sin(2\pi f t).$$

Pour que la lampe puisse s'allumer, il faut comme l'indique l'énoncé que l'amplitude efficace de la fem soit supérieure à la tension efficace soit :

$$N\mu_0 a ln\left(\frac{d+a}{d}\right) f I_{eff} > E.$$

Donc le nombre de spires vérifie l'inégalité suivante :

$$\boxed{N > \frac{E}{\mu_0 a ln\left(\frac{d+a}{d}\right) f I_{eff}}}.$$

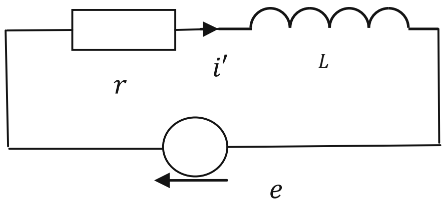
L'application numérique donne :

$$N > \frac{1,5}{4\pi 10^{-7} \times 30.10^{-2} \times ln\left(\frac{2+30}{2}\right) \times 50 \times 1000}$$

$$N > 28,7.$$

Il faut donc au minimum 29 spires afin que la lampe puisse s'allumer.

5) Le circuit est donc maintenant équivalent à un circuit RL. On a donc le schéma suivant :



On a donc l'équation de maille qui est :

$$e = ri' + L\frac{di'}{dt}.$$

En remplaçant, on obtient :

$$L\frac{di'}{dt} + ri' = E\sqrt{2}\sin(2\pi f t).$$

On passe en notations complexes en prenant la partie imaginaire. On a donc en posant $\omega = 2\pi f$:

$$(jL\omega + r)\underline{i'} = E\sqrt{2}e^{j\omega t}.$$

$$\underline{i'} = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{r + jL\omega}.$$

Le courant efficace est donc égal à :

$$\boxed{\mathrm{I}' = \frac{E}{\sqrt{r^2 + (L\omega)^2}}}.$$