Initiation à la théorie des probabilités

Cours et exercices corrigés

Sabin Lessard

Ellipses 2017

Errata en date du 24 octobre 2022

p. 35

Le rang de X_i parmi $X_1, \ldots, X_i$ est représenté par R_i pour $i = 1, \ldots, n$. Montrer que les v.a. $R_1, \ldots, R_n$ sont indépendantes et que R_i possède la fonction de masse $p(k) = 1/i$ pour $k = 1, \ldots, i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

p. 51

ce qui découle de la concavité de la fonction logarithme

p. 66

et le fait que cette suite est bornée

p. 91

$$\sin\left(tx/\sqrt{n}\right) = \frac{tx}{\sqrt{n}} - \frac{t^2x^2}{2n} h\left(tx/\sqrt{n}\right),$$
$$\cos\left(tx/\sqrt{n}\right) = 1 - \frac{t^2x^2}{2n} g\left(tx/\sqrt{n}\right),$$

p. 92

$$X_\lambda = \frac{Y_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

p. 103

$$\mathbb{E}(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}(X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} - X_{n-1} = 0$$

p.109

Par monotonicité du côté gauche de cette égalité et convergence dominée du côté droit

p. 117

$$\leqslant \sum_{a<b \text{ et } a,b\in\mathbb{Q}} \mathbb{P}\left(X_n < a \text{ i.s. et } X_n > b \text{ i.s.}\right)$$

p. 120

la suite de v.a. S_n pour $n \geqslant 0$ avec $S_0 = 0$

p. 122

$$\mathbb{E}\left(X_n^+ \mathbb{1}_{\{T=n\}}\right) \leqslant \mathbb{E}\left((\mathbb{E}(X_N|\mathcal{F}_n))^+ \mathbb{1}_{\{T=n\}}\right)$$

p. 135-136

$$f(X(t+\Delta t)) \approx f(X(t)) + f'(X(t))\Delta X(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))\left(\Delta X(t)\right)^2$$

avec

$$\Delta X(t) \approx \mu(X(t))\Delta t + \sigma(X(t))\Delta B(t)$$

et

$$(\Delta X(t))^2 \approx \sigma^2(X(t))(\Delta B(t))^2.$$

À remarquer que, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|\mu(X(t))\sigma(X(t))\Delta B(t)|\right) &\leqslant \|\mu(X(t))\sigma(X(t))\|_2 \|\Delta B(t)\|_2 \\ &= \|\mu(X(t))\sigma(X(t))\|_2 \sqrt{\Delta t}\,.\end{aligned}$$

De plus,

$$(\Delta B(t))^2 \approx \Delta t$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(((\Delta B(t))^2 - \Delta t)^2\right) &= \mathbb{E}\left((\Delta B(t))^4\right) - 2(\Delta t)\mathbb{E}\left((\Delta B(t))^2\right) + (\Delta t)^2 \\ &= (\Delta t)^2 \mathbb{E}\left(\left(\frac{\Delta B(t)}{\sqrt{\Delta t}}\right)^4\right) - (\Delta t)^2 \\ &= 2(\Delta t)^2\,.\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}\Delta f(X(t)) &= f(X(t+\Delta t)) - f(X(t)) \\ &\approx f'(X(t))\Delta X(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))\sigma^2(X(t))\Delta t,\end{aligned}$$

p. 137

Ici, pour toute fonction réelle continue bornée

p. 137

$$\int_a^b g(X(t))dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} g\left(X\left(t_{i-1}{}^{(n)}\right)\right)\left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right)$$

p. 137

$$\int_a^b g(X(t))dB(t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} g\left(X\left(t_{i-1}{}^{(n)}\right)\right)\left(B\left(t_i^{(n)}\right) - B\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right),$$

p. 144

$Y_{n_{1,k}} \to Y$ p.s.

p. 146

par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev