Une démonstration simple des inégalités de Bell

Soit λ la variable cachée caractéristique de la source émettant les deux particules.

Nous supposons que nous disposons d'une **théorie réaliste locale** (stochastique ou déterministe) permettant à partir de la connaissance de λ et de la configuration des appareils de mesure de déterminer la probabilité d'obtenir tel ou tel résultat pour chaque appareil.

Appelons E(A,B) la moyenne du produit de tous les résultats des mesures (a, b) effectuées à l'aide des appareils de mesure réglés dans la configuration (A,B), c'est à dire mesurant la polarisation dans une direction donnée : le résultat est noté +1 ou –1 suivant que l'appareil (un polariseur) détecte ou non la particule, c'est-à-dire répond « vibration parallèle » ou « vibration perpendiculaire ».

On a par définition :

$$E(A,B) = \sum_{a,b=\pm 1} ab P(a,b / A,B)$$

On peut exprimer P(a,b / A,B) en fonction du paramètre λ qui est la variable cachée :

$$P(a,b / A,B) = \int p_{A,B}(a,b,\lambda)\, d\lambda$$

Où $p_{A,B}(a,b,\lambda)$ est la probabilité pour la configuration (A, B) des appareils d'obtenir les résultats a et b et que la variable cachée soit dans l'état λ. C'est une façon astucieuse d'écrire la probabilité conditionnelle p(a, b, λ / A, B).

La formule générale de la loi jointe s'écrit sans hypothèse particulière :

$$p_{A,B}(a,b,\lambda) = p_{A,B}(a / b,\lambda) p_{A,B}(b / \lambda) p_{A,B}(\lambda)$$

Nous posons à présent les **conditions dites du « réalisme local » :**

1) Indépendance entre les résultats : la probabilité d'obtenir un résultat est complètement déterminée par la connaissance de la configuration des appareils A et B et la variable cachée λ.

   $p_{A,B}(a/b,\lambda) = p_{A,B}(a/\lambda) \;\; et \;\; p_{A,B}(b/a,\lambda) = p_{A,B}(b/\lambda)$

2) Localité : la probabilité d'obtenir un résultat est indépendante de la configuration de l'appareil de mesure distant.

   $p_{A,B}(a/\lambda) = p_A(a/\lambda) \;\; et \;\; p_{A,B}(b/\lambda) = p_B(b/\lambda)$

3) Indépendance de la source : la distribution de probabilité de la variable cachée λ est indépendante de la configuration des appareils de mesure A et B.

   $p_{A,B}(\lambda) = p(\lambda)$

On suppose que les **conditions dites du « réalisme local »** sont satisfaites.
Il s'en suit que :

$$p_{A,B}(a,b,\lambda) = p_A(a/\lambda)p_B(b/\lambda)p(\lambda)$$

On vient donc de démontrer que, dans ces conditions, la relation suivante est vérifiée :

$$P(a,b/A,B) = \int p(\lambda)p_A(a/\lambda)p_B(b/\lambda)d\lambda$$

D'où

$$E(A,B) = \sum_{a,b=\pm1} ab\int p(\lambda)p_A(a/\lambda)p_B(b/\lambda)d\lambda$$

On peut réécrire la relation ci-dessus en échangeant l'intégrale et la somme :

$$E(A,B) = \int p(\lambda)\left[\sum_{a,b=\pm1} ab\, p_A(a/\lambda)p_B(b/\lambda)\right]d\lambda$$

La somme à l'intérieur de l'intégrale est égale à

$$\begin{aligned} &p_A(a=+1/\lambda)p_B(b=+1/\lambda) + p_A(a=-1/\lambda)p_B(b=-1/\lambda) \\ &- p_A(a=-1/\lambda)p_B(b=+1/\lambda) - p_A(a=+1/\lambda)p_B(b=-1/\lambda) \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \overline{a}(\lambda) &= p_A(a=+1/\lambda) - p_A(a=-1/\lambda) \\ \overline{b}(\lambda) &= p_B(b=+1/\lambda) - p_B(b=-1/\lambda) \end{aligned}$$

On a donc :

$$E(A,B) = \int p(\lambda)\overline{a}(\lambda)\overline{b}(\lambda)d\lambda$$

Remarquons que $\overline{a}(\lambda)$ *et* $\overline{b}(\lambda)$ sont en fait les valeurs moyennes des résultats de mesure pour les appareils A et B, la valeur de λ étant fixée.

Il est facile de voir que :

$$\left|\overline{a}(\lambda)\right| \leq 1 \; et \; \left|\overline{b}(\lambda)\right| \leq 1$$

Nous nous intéressons à présent à la quantité qui suit :

$$\tau = \frac{1}{2}\left[E(A_1,B_1) + E(A_2,B_1) + E(A_1,B_2) - E(A_2,B_2)\right]$$

Où A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des configurations particulières des appareils de mesures (2 configurations distinctes pour chaque appareil).

En appliquant la formule ci-dessus donnant E(A,B), cette quantité peut s'écrire :

$$\tau = \int p(\lambda)\ \mathrm{B}(\lambda)\ d\lambda$$

Avec

$$\mathrm{B}(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\overline{a}_1(\lambda)(\overline{b}_1(\lambda) + \overline{b}_2(\lambda)) + \overline{a}_2(\lambda)(\overline{b}_1(\lambda) - \overline{b}_2(\lambda))\right]$$

Comme $\left|\overline{a}(\lambda)\right| \leq 1 \; et \; \left|\overline{b}(\lambda)\right| \leq 1$

Il en résulte que : $\left|\mathrm{B}(\lambda)\right| \leq 1$

On a (propriété classique des intégrales) :

$$\left|\tau\right| \leq \int p(\lambda)\left|\mathrm{B}(\lambda)\right|\ d\lambda$$

Or la borne supérieure de |τ| n'est autre que la moyenne sur tous les λ de $\left|\mathrm{B}(\lambda)\right|$

On en déduit finalement : $\left|\tau\right| \leq 1$

On obtient donc **l'inégalité CHSH** (Clauser-Horne-Shimony-Holt) qui est l'exemple standard des inégalités de Bell :

$$\left|E(A1,B1) + E(A2,B1) + E(A1,B2) - E(A2,B2)\right| \leq 2$$

Nous venons finalement de démontrer que si les conditions dites du réalisme local tiennent, l'inégalité CHSH est nécessairement vérifiée.

Or l'expérience montre que cette inégalité est violée. En effet, si on réalise l'expérience avec deux polariseurs dont les directions d'analyse font entre elles un angle θ, on obtient pour la partie gauche de l'inégalité des valeurs qui suivent la courbe |3 cos2θ - cos6θ|.

Cette quantité dépasse la valeur limite 2 pour certaines valeurs de θ : au point de violation maximale (θ = 22,5 degrés), le résultat obtenu est voisin de 2,70, donc nettement au-dessus de 2.

On en déduit que **l'une au moins des conditions dites du réalisme local est violée**.

La plupart des physiciens en déduisent qu'il n'est pas possible de rendre compte des résultats des mesures dans les expériences de type EPR à l'aide d'une théorie réaliste locale.

Cette conclusion n'est valide que si les conditions dites du réalisme local sont nécessairement vérifiées pour toute théorie réaliste locale mais c'est loin d'être le cas, ce qui revient à dire que ces conditions sont improprement nommées (il serait plus juste de les appeler tout simplement « conditions de Bell »).