5

CINQUIÈME

Chapitre 1
La division euclidienne

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des *nombres entiers naturels*. Ces nombres sont les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.
On peut donc écrire : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des (nombres) entiers naturels.

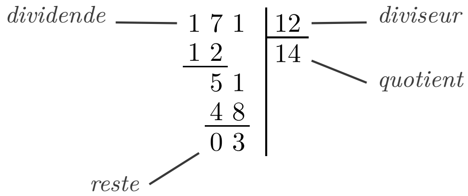
1.1 Définition

La « division euclidienne[*] » n'est autre que la division d'un nombre entier naturel par un autre nombre entier naturel non nul.[**]

Prenons un exemple simple :

Exemple : Soit à répartir 171 œufs dans des barquettes de 12 œufs.

Comme on le sait, on effectue une division que l'on appelle une « division euclidienne » :



171 est le *dividende*
12 est le *diviseur*
3 est le *reste*
14 est le *quotient*

14 barquettes sont remplies, et il reste à part 3 œufs. On dit que 14 est le quotient (entier) de 171 par 12, et que 3 est le reste de cette division.

*. La division euclidienne doit son nom au mathématicien grec Euclide, qui vivait au IV^{e} s. av. J.-C.

**. La précision « non nul » est nécessaire : il n'est en effet pas possible de diviser par 0

Remarque : Si le reste avait été nul, on aurait dit que la division « tombe juste ». Néanmoins, le plus souvent, il n'y a pas de raison pour qu'une telle division tombe juste.

Plus généralement, faire la division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier b non nul aboutit à la détermination d'un quotient q et d'un reste r tels que l'on ait la relation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{dividende} & = & \text{diviseur} & \times & \text{quotient} & + & \text{reste} \\ a & = & b & \times & q & + & r \end{array}$$

De plus, **le reste r de la division est toujours strictement plus petit que le diviseur b**.

Plus formellement, on donne la définition suivante :

Définition
On appelle *quotient entier* de deux entiers a et b le plus grand entier q dont le produit par b puisse se retrancher du nombre a. On appelle alors *reste* l'entier $r = a - b \times q$. Le reste r est strictement inférieur au diviseur b.

Remarque : À noter les cas particuliers suivants :
- ⋆ Si $a < b$, alors le quotient est nul et le reste a.
- ⋆ Si $a = b$, alors le quotient est 1 et le reste est nul.

1.2 Exercices

Exercice 1. On veut ranger 64 œufs dans des boîtes de 6. Combien de boîtes remplit-on ? Combien d'œufs reste-t-il ?

Exercice 2. Effectuer la division euclidienne de a par b dans les cas suivants, puis écrire l'opération en ligne sous la forme : $a = b \times q + r$.
- *a*) $a = 1\,789$ et $b = 9$;
- *b*) $a = 9\,876$ et $b = 15$;
- *c*) $a = 509$ et $b = 8$;
- *d*) $a = 1\,024$ et $b = 64$;
- *e*) $a = 4\,523$ et $b = 25$;
- *f*) $a = 3\,007$ et $b = 13$.

Exercice 3. Dans une division, le reste est égal à 1, le quotient est 187 et le diviseur est 32. Quel est le dividende ?

Exercice 4. Citer tous les nombres dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 4.

Exercice 5. Citer quelques nombres dont le reste dans la division euclidienne par 7 est égal à 5.

Exercice 6. Citer un nombre dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 0. Quel est alors le reste ?

Exercice 7. Citer un nombre dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 1. Quel est alors le reste ?

Exercice 8. Quels sont les dividendes possibles de la division euclidienne par 7 dont le quotient est 29 ?

Exercice 9. Sachant que dans la division euclidienne de 1 075 par 39, le quotient est 27 et le reste 22, trouver, sans poser l'opération, le reste et le quotient dans la division euclidienne de 1 075 par 27.

Exercice 10. Sachant que dans la division euclidienne de 100 par 31, le quotient est 3 et le reste 7, compléter le tableau suivant sans poser aucune division :

La division euclidienne ...	donne pour quotient	et pour reste
de 200 par 62	...	...
de 300 par 93	...	...
de ... par 279	3	63
de 1 200 par ...	3	84

Exercice 11. Le 1er janvier 2010 est tombé un vendredi. Combien y a-t-il eu de semaines entières en 2010 ? Combien de jours reste-t-il pour terminer l'année ? En déduire le jour de la semaine qui corresponda au 1er janvier 2011.

Chapitre 2
Divisibilité

Dans ce chapitre, on ne considère que des *nombres entiers naturels*.

2.1 Diviseur, multiple

Définition
On dit qu'un entier n non nul[*] est *divisible* par un entier d lorsqu'il existe un entier k tel que $n = k \times d$.
Autrement dit, un entier n est divisible par un entier d lorsque le reste de la division euclidienne de n par d est nul.
On dit aussi que n est *multiple* de d, ou que d est un *diviseur* de n.

Exemple : 105 est un multiple de 21 (car $105 = 21 \times 5$) ;
on peut aussi dire que 21 est un diviseur de 105.

Exemple : 174 est-il divisible par 58 ?
On effectue la division euclidienne de 174 par 58. On trouve comme quotient 3 et comme reste 0 :

$$174 \div 58 = 3 \quad \text{donc} \quad 174 = 3 \times 58 = 58 \times 3$$

Donc 174 est multiple de 3 et de 58.
Remarquons que 1, 3, 58, 174 sont des diviseurs de 174.

Remarque :
- Le nombre 1 divise tout entier naturel.
- Tout entier naturel est diviseur de lui-même.
- Le nombre 0 ne divise aucun entier naturel différent de 0.
- Le nombre 0 est multiple de tous les entiers naturels.

Remarques :
- Les diviseurs d'un nombre sont encadrés par 1 et le nombre lui-même.
- La suite des multiples d'un nombre entier non nul commence à 0 et n'a pas de fin.

Par exemple,
- Les diviseurs de 15 sont : 1, 3, 5, 15. Ils sont compris entre 1 et 15.
- Les premiers multiples de 15 sont : 0, 15, 30, 45, 60, 75, ...

Définition
- On dit qu'un entier est *pair* lorsqu'il est divisible par 2.
- On dit qu'un entier est *impair* lorsqu'il n'est pas pair.
- Connaître la *parité* d'un nombre, c'est, par définition, savoir si il est pair ou impair.

On admet les propriétés suivantes :

Propriété
- *Si un entier naturel en divise un autre, alors il divise aussi tous les multiples de celui-ci.*
- *Si un entier naturel en divise deux autres, alors il divise aussi la somme et la différence de ces deux nombres.*

Exemples :
- 5 divise 15. Donc 5 divise $15 \times 7 = 105$.
- 7 divise 91 et 119. Donc 7 divise leur somme, à savoir 210, et leur différence, à savoir 28.

2.2 Règles de divisibilité

On rappelle les critères de divisibilité suivants :

d	Un entier naturel est divisible par d si...
2	Le chiffre des unités est soit 0, soit pair (2, 4, 6 ou 8).
3	La somme de ses chiffres est divisible par 3.
4	Les deux derniers chiffres forment un multiple de 4.

d	Un entier naturel est divisible par d si...
5	Le chiffre des unités est soit 0, soit 5.
8	Les trois derniers chiffres forment un multiple de 8.
9	La somme de ses chiffres est divisible par 9.
10	Le dernier chiffre est 0.

Par exemple, 2 457 est divisible par 9 (et donc aussi par 3).

2.3 Détermination de l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel

Exemple : On souhaite déterminer l'ensemble des diviseurs de 312.

$$
\begin{array}{l}
1 \times 312 = 312 \\
2 \times 156 = 312 \\
3 \times 104 = 312 \\
4 \times 78 = 312 \\
\cancel{5} \\
6 \times 52 = 312 \\
\cancel{7} \\
8 \times 39 = 312 \\
\cancel{9} \\
\cancel{10} \\
\cancel{11} \\
12 \times 26 = 312 \\
13 \times 24 = 312 \\
\cancel{14} \\
\cancel{15} \\
\cancel{16} \\
\cancel{17} \\
\cancel{18} \times \cancel{18} > 312
\end{array}
$$

On dispose les premiers entiers naturels en colonne.

- On parcourt la première colonne en commençant par 1 (qui divise tout entier naturel).
- Si un entier n divise 312, alors on place dans une deuxième colonne le quotient de 312 par n.
- Si un entier n ne divise pas 312, alors on le barre, ainsi que ses multiples (qui ne seront pas d-viseurs de 312, eux non plus).
- On arrête de tester la divisibilité de 312 par n dès que $n \times n$ dépasse 312.

En conclusion, l'ensemble des diviseurs de 312 est exactement :

$$\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 13; 24; 26; 39; 52; 78; 104; 156; 312\}$$

2.4 Nombres premiers

Définition
On dit qu'un entier naturel est un *nombre premier* lorsqu'il est différent de 1, et qu'il n'est divisible que par lui-même et par l'unité.
Autrement dit, un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs.

Convention
Le nombre 1 n'est pas un nombre premier [*].

Exemples :
- Le nombre 2 est premier : en effet, ses diviseurs sont 1 et 2.
- Le nombre 3 est premier : en effet, ses diviseurs sont 1 et 3.
- Le nombre 13 est premier : ses diviseurs sont 1 et 13.
- Le nombre 25 n'est pas premier : ses diviseurs sont 1, 5 et 25.

Remarque : Le nombre 2 est l'unique nombre premier pair. Autrement dit, tout nombre premier distinct de 2 est impair.

Exemple : Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

2.5 Décomposition d'un entier en facteurs premiers

Le mathématicien grec Euclide (IVe s. av. J.-C.) a établi les trois théorèmes fondamentaux suivants, que nous admettrons :

Théorème
La suite des nombres premiers est illimitée.

*. Cette convention se justifie par le souci de garantir l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.