

5

CINQUIÈME

# Chapitre 1

## La division euclidienne

On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des *nombre entiers naturels*. Ces nombres sont les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.

On peut donc écrire :  $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des (nombres) entiers naturels.

### 1.1 Définition

La « division euclidienne <sup>\*</sup> » n'est autre que la division d'un nombre entier naturel par un autre nombre entier naturel non nul. <sup>\*\*</sup>

Prenons un exemple simple :

*Exemple* : Soit à répartir 171 œufs dans des barquettes de 12 œufs.

Comme on le sait, on effectue une division que l'on appelle une « division euclidienne » :

$$\begin{array}{r}
 \text{dividende} \text{ --- } 171 \quad | \quad \begin{array}{l} 12 \\ \hline 14 \end{array} \text{ --- } \text{diviseur} \\
 \underline{12} \quad | \quad \text{quotient} \\
 51 \\
 \underline{48} \\
 03 \\
 \text{reste} \text{ ---}
 \end{array}$$

171 est le *dividende*  
 12 est le *diviseur*  
 3 est le *reste*  
 14 est le *quotient*

14 barquettes sont remplies, et il reste à part 3 œufs. On dit que 14 est le quotient (entier) de 171 par 12, et que 3 est le reste de cette division.

\*. La division euclidienne doit son nom au mathématicien grec Euclide, qui vivait au IV<sup>e</sup> s. av. J.-C.

\*\* . La précision « non nul » est nécessaire : il n'est en effet pas possible de diviser par 0

*Remarque* : Si le reste avait été nul, on aurait dit que la division « tombe juste ». Néanmoins, le plus souvent, il n'y a pas de raison pour qu'une telle division tombe juste.

Plus généralement, faire la division euclidienne d'un nombre entier  $a$  par un nombre entier  $b$  non nul aboutit à la détermination d'un quotient  $q$  et d'un reste  $r$  tels que l'on ait la relation suivante :

$$\begin{array}{rcccccc} \text{dividende} & = & \text{diviseur} & \times & \text{quotient} & + & \text{reste} \\ a & = & b & \times & q & + & r \end{array}$$

De plus, **le reste  $r$  de la division est toujours strictement plus petit que le diviseur  $b$ .**

Plus formellement, on donne la définition suivante :

#### Définition

On appelle *quotient entier* de deux entiers  $a$  et  $b$  le plus grand entier  $q$  dont le produit par  $b$  puisse se retrancher du nombre  $a$ . On appelle alors *reste* l'entier  $r = a - b \times q$ . Le reste  $r$  est strictement inférieur au diviseur  $b$ .

*Remarque* : À noter les cas particuliers suivants :

- \* Si  $a < b$ , alors le quotient est nul et le reste  $a$ .
- \* Si  $a = b$ , alors le quotient est 1 et le reste est nul.

## 1.2 Exercices

**Exercice 1.** On veut ranger 64 œufs dans des boîtes de 6. Combien de boîtes remplit-on ? Combien d'œufs reste-t-il ?

**Exercice 2.** Effectuer la division euclidienne de  $a$  par  $b$  dans les cas suivants, puis écrire l'opération en ligne sous la forme :  $a = b \times q + r$ .

- a)  $a = 1\,789$  et  $b = 9$  ;
- b)  $a = 9\,876$  et  $b = 15$  ;
- c)  $a = 509$  et  $b = 8$  ;
- d)  $a = 1\,024$  et  $b = 64$  ;
- e)  $a = 4\,523$  et  $b = 25$  ;
- f)  $a = 3\,007$  et  $b = 13$ .

## 1 — La division euclidienne

---

**Exercice 3.** Dans une division, le reste est égal à 1, le quotient est 187 et le diviseur est 32. Quel est le dividende ?

**Exercice 4.** Citer tous les nombres dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 4.

**Exercice 5.** Citer quelques nombres dont le reste dans la division euclidienne par 7 est égal à 5.

**Exercice 6.** Citer un nombre dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 0. Quel est alors le reste ?

**Exercice 7.** Citer un nombre dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 1. Quel est alors le reste ?

**Exercice 8.** Quels sont les dividendes possibles de la division euclidienne par 7 dont le quotient est 29 ?

**Exercice 9.** Sachant que dans la division euclidienne de 1 075 par 39, le quotient est 27 et le reste 22, trouver, sans poser l'opération, le reste et le quotient dans la division euclidienne de 1 075 par 27.

**Exercice 10.** Sachant que dans la division euclidienne de 100 par 31, le quotient est 3 et le reste 7, compléter le tableau suivant sans poser aucune division :

La division euclidienne ...	donne pour quotient	et pour reste
de 200 par 62	...	...
de 300 par 93	...	...
de ... par 279	3	63
de 1 200 par ...	3	84

**Exercice 11.** Le 1<sup>er</sup> janvier 2010 est tombé un vendredi. Combien y a-t-il eu de semaines entières en 2010 ? Combien de jours reste-t-il pour terminer l'année ? En déduire le jour de la semaine qui corresponda au 1<sup>er</sup> janvier 2011.

# Chapitre 2

## Divisibilité

Dans ce chapitre, on ne considère que des *nombre*s entiers naturels.

### 2.1 Diviseur, multiple

#### Définition

On dit qu'un entier  $n$  non nul\* est *divisible* par un entier  $d$  lorsqu'il existe un entier  $k$  tel que  $n = k \times d$ .

Autrement dit, un entier  $n$  est divisible par un entier  $d$  lorsque le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $d$  est nul.

On dit aussi que  $n$  est *multiple* de  $d$ , ou que  $d$  est un *diviseur* de  $n$ .

*Exemple* : 105 est un multiple de 21 (car  $105 = 21 \times 5$ );  
on peut aussi dire que 21 est un diviseur de 105.

*Exemple* : 174 est-il divisible par 58?

On effectue la division euclidienne de 174 par 58. On trouve comme quotient 3 et comme reste 0 :

$$174 \div 58 = 3 \quad \text{donc} \quad 174 = 3 \times 58 = 58 \times 3$$

Donc 174 est multiple de 3 et de 58.

Remarquons que 1, 3, 58, 174 sont des diviseurs de 174.

*Remarque* :

- Le nombre 1 divise tout entier naturel.
- Tout entier naturel est diviseur de lui-même.
- Le nombre 0 ne divise aucun entier naturel différent de 0.
- Le nombre 0 est multiple de tous les entiers naturels.

## 2 — Divisibilité

---

*Remarques :*

- Les diviseurs d'un nombre sont encadrés par 1 et le nombre lui-même.
- La suite des multiples d'un nombre entier non nul commence à 0 et n'a pas de fin.

Par exemple,

- Les diviseurs de 15 sont : 1, 3, 5, 15. Ils sont compris entre 1 et 15.
- Les premiers multiples de 15 sont : 0, 15, 30, 45, 60, 75, ...

### Définition

- On dit qu'un entier est *pair* lorsqu'il est divisible par 2.
- On dit qu'un entier est *impair* lorsqu'il n'est pas pair.
- Connaître la *parité* d'un nombre, c'est, par définition, savoir si il est pair ou impair.

On admet les propriétés suivantes :

### Propriété

- Si un entier naturel en divise un autre, alors il divise aussi tous les multiples de celui-ci.
- Si un entier naturel en divise deux autres, alors il divise aussi la somme et la différence de ces deux nombres.

*Exemples :*

- 5 divise 15. Donc 5 divise  $15 \times 7 = 105$ .
- 7 divise 91 et 119. Donc 7 divise leur somme, à savoir 210, et leur différence, à savoir 28.

## 2.2 Règles de divisibilité

On rappelle les critères de divisibilité suivants :

$d$	Un entier naturel est divisible par $d$ si . .
2	Le chiffre des unités est soit 0, soit pair (2, 4, 6 ou 8).
3	La somme de ses chiffres est divisible par 3.
4	Les deux derniers chiffres forment un multiple de 4.

$d$	Un entier naturel est divisible par $d$ si...
5	Le chiffre des unités est soit 0, soit 5.
8	Les trois derniers chiffres forment un multiple de 8.
9	La somme de ses chiffres est divisible par 9.
10	Le dernier chiffre est 0.

Par exemple, 2 457 est divisible par 9 (et donc aussi par 3).

### 2.3 Détermination de l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel

*Exemple* : On souhaite déterminer l'ensemble des diviseurs de 312.

	$1 \times 312 = 312$
	$2 \times 156 = 312$
	$3 \times 104 = 312$
	$4 \times 78 = 312$
<del>5</del>	
	$6 \times 52 = 312$
<del>7</del>	
	$8 \times 39 = 312$
<del>9</del>	
<del>10</del>	
<del>11</del>	
	$12 \times 26 = 312$
	$13 \times 24 = 312$
<del>14</del>	
<del>15</del>	
<del>16</del>	
<del>17</del>	
	$18 \times 18 > 312$

On dispose les premiers entiers naturels en colonne.

- On parcourt la première colonne en commençant par 1 (qui divise tout entier naturel).
- Si un entier  $n$  divise 312, alors on place dans une deuxième colonne le quotient de 312 par  $n$ .
- Si un entier  $n$  ne divise pas 312, alors on le barre, ainsi que ses multiples (qui ne seront pas d-diviseurs de 312, eux non plus).
- On arrête de tester la divisibilité de 312 par  $n$  dès que  $n \times n$  dépasse 312.

En conclusion, l'ensemble des diviseurs de 312 est exactement :  
 $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 13; 24; 26; 39; 52; 78; 104; 156; 312\}$

## 2.4 Nombres premiers

### Définition

On dit qu'un entier naturel est un *nombre premier* lorsqu'il est différent de 1, et qu'il n'est divisible que par lui-même et par l'unité.

Autrement dit, un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs.

### Convention

Le nombre 1 n'est pas un nombre premier\*.

*Exemples :*

- Le nombre 2 est premier : en effet, ses diviseurs sont 1 et 2.
- Le nombre 3 est premier : en effet, ses diviseurs sont 1 et 3.
- Le nombre 13 est premier : ses diviseurs sont 1 et 13.
- Le nombre 25 n'est pas premier : ses diviseurs sont 1, 5 et 25.

*Remarque :* Le nombre 2 est l'unique nombre premier pair. Autrement dit, tout nombre premier distinct de 2 est impair.

*Exemple :* Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

## 2.5 Décomposition d'un entier en facteurs premiers

Le mathématicien grec Euclide (IV<sup>e</sup> s. av. J.-C.) a établi les trois théorèmes fondamentaux suivants, que nous admettrons :

### Théorème

La suite des nombres premiers est illimitée.

---

\*. Cette convention se justifie par le souci de garantir l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.