PROBABILITÉS - STATISTIQUES
pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques
ERRATA

Marie-Line Chabanol et Jean-Jacques Ruch

Les fautes d'orthographe et typos ne sont pas mentionnées, pour raison de lisibilité ; on ne recense que les imprécisions ou erreurs d'ordre mathématique.
Un grand merci à Arthur Leclaire et à Jean-Marie Bernard pour leur relecture attentive.

1. Chapitre II

• p. 29
La preuve du deuxième point de la proposition 18 n'est correcte que pour $d = 1$. En dimension supérieure, on a pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$, en notant $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, x + y \in A\}$:

$$P(X + Y \in A) = P((X, Y) \in B) = \int_B f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

On fait alors le changement de variables $(x, y) \mapsto (x + y, y)$:

$$P(X + Y \in A) = \int_A (\int_{\mathbb{R}^d} f_X(u - y) f_Y(y) dy) = \int_A (f_X \star f_Y)(u) du$$

• p. 29 Exemple de la loi Gamma

Le changement de variables à effectuer dans les intégrales est $x = tu$ (*et pas* $u = t$)

• p. 32 Démonstration de la proposition 23

Ligne 3 $(X_{\tau(1)} < X_{\tau(2)} < \cdots < X_{\tau(n)}$
(*et pas* $X_{\tau(1)} < X_{\tau(2)} < X_{\tau(n)}$)

Ligne 13 et 14 : l'intégrale sur x_1 va de $-\infty$ à x_2 (*et pas de* 0 *à* x_2) et l'intégrale sur x_2 va de $-\infty$ à x_3 (*et pas de* 0 *à* x_3)

2. Chapitre III

• p. 43 ; Exemple après la théorème 20.

S suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$ (*et pas* ps).

3. Chapitre IV

• p. 51 ; Preuve de la proposition 5.

Ligne 7. On en déduit $E[|X_n - X|^p] \leq 2^p M^{p/r} P(|X_n - X| > \epsilon)^{1-p/r} + \epsilon^p$ (*et pas* $E[|X_n - X|^p] \leq 2^p M^{p/r} P(|X_n - X| > \epsilon)^{1-p/r} + \epsilon^p$)

(En effet $E[|X_n - X|^r]^{1/r} \leq E[|X_n|^r]^{1/r} + E[|X|^r]^{1/r} \leq 2M^{1/r}$)

• p. 51 Preuve du lemme 6

Ligne 1. On note $A_{n,p}$ l'événement $|X_n - X| \geq \frac{1}{p}$ (*et pas* $A_{n,k}$)

• p. 55 Précisions sur la preuve du théorème 12

Ligne 5 Si $x_{k,k} \neq +\infty$, on définit également $x_{k+1,k} = +\infty$

Ligne 8. IL existe un ensemble Ω' de probabilité 1 (intersection d'ensembles $\Omega_1, X_{j,k}$ et d'ensembles $\Omega_2, X_{j,k}$) tels que la convergence simple ait lieu pour tout ω dans Ω', pour tout $x_{j,k}$ et pour tout $x^-_{j,k}$.

Soit $\omega \in \Omega'$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc pour tout $0 \leq j \leq k$ un entier n_j tel que pour $n \geq n_j$,

$$|F_n(x_{j,k}, \omega) - F(x_{j,k})| \leq \frac{1}{k} \text{ et } |F_n(x^-_{j,k}, \omega) - F(x^-_{j,k})| \leq \frac{1}{k}$$

• p. 52 ; Démonstration de la proposition 8.

f étant continue, elle est uniformément continue sur la boule compacte $\bar{B}(0, 2a)$ (*et non pas équicontinue*)

• p. 58 ; Démonstration du théorème 17.

Ligne 9 : $E[\psi(X_n)] = \frac{1}{(2\pi)^d} E[\int_{\mathbb{R}^d} e^{i<t,X_n>} \hat{\psi}(t) dt] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(t) \Phi_{X_n}(t) dt$
(*et non* $E[\psi(X_n)] = \frac{1}{2\pi} E[\int_{\mathbb{R}^d} e^{i<t,X_n>} \hat{\psi}(t) dt] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(t) \Phi_{X_n}(t) dt$)

Ligne 12 : On invoque le fait que l'espace de Schwarz est dense dans l'ensemble des fonctions continues à support compact (*et pas dans l'ensemble des fonctions intégrables*)

• p. 59, ligne 4 ; Démonstration du théorème 19

Il faut considérer une fonction ϕ continue à support compact (*et pas continue bornée*)

• p. 59. Démonstration de la proposition 20.

3ème ligne : $P(X_n = k)$ (*et pas* $P(X_n) = k$)

6ème ligne : $F_{X_n}(x)$ converge vers $P(X \leq x)$ (*et pas vers* $P(X)$)

• p. 60. Démonstration de la proposition 23.

On considère une fonction continue à support compact (*et non continue bornée*). Soit $\epsilon > 0$. f étant uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|X_n - X| < \delta \Rightarrow |f(X_n) - f(X)| < \epsilon$$

On a alors

$$|E[f(X_n) - f(X)]| \leq \epsilon + 2||f|| P(|X_n - X| > \delta)$$

• p. 61 Démonstration du théorème 25.

Ligne 3 et 4 : il s'agit de $e^{isX_n} - e^{isX}$ (*et pas de* $e^{itX_n} - e^{itX}$)

• p. 64 Démonstration de la proposition 30.

Ligne 4. $h(\theta) = g'(\theta)$ (*et pas* $h(\theta) = \theta$))

4. Chapitre V

• p 77 Dernière ligne avant la démonstration du théorème 5 :

Puis on montre $\forall \psi$ mesurable bornée, $E[X\Psi(Y)] = E[U\psi(Y)]$ (*et pas* $E[X\Psi(Y)] = E[XU]$)

• p. 82 Exemple 1

Ligne 3 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1_{]-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}[}(x)}{f_Y(y)}$ (*et pas* $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1_{]-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1+y^2}[}(x)}{f_Y(y)}$)

• p. 82 Exemple 2

Ligne 3 la loi de X sachant $Y = y$ a pour densité $x \mapsto \frac{exp(-x)}{1-exp(-y)} 1_{[0,y]}(x)$ (*et pas* $x \mapsto 2\frac{exp(-x)}{1-exp(-y)} 1_{[0,y]}(x)$)

• p.82 Dernière ligne

$\sigma^2 = Var(X_1 - aX_2)$ (*et pas* $\sigma = Var(X_1 - aX_2)$)

5. Chapitre VI

• p. 92 Démonstration de la proposition 12

Dernière ligne
$\{\liminf T_k \leq n\} = \cap_{m\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq m} \{T_k \leq n\}$
(*et pas* $\{liminf\, T_k \leq n\} = \cup_{m\in\mathbb{N}} \cap_{k\geq m} \{T_k \leq n\}$)

• p. 97 Démonstration du théorème 25

Ligne 2
$T = \inf\{k \in \mathbb{N}, X_k > \lambda\}$ (*et pas* $T = inf\{k \leq n, X_k > \lambda\}$)

• p. 103 Démonstration du théorème 33

(3ème ligne de la page)

$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[Y1_{|Y|\leq M}|\mathcal{F}_m] - \mathbb{E}[Y1_{|Y|\leq M}|\mathcal{F}_n]|] \leq \varepsilon.$

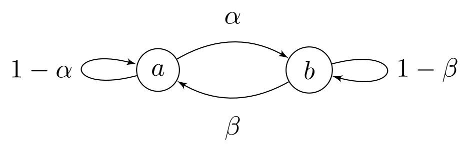
(*et pas* $\mathbb{E}[|\mathbb{E}[Y1_{|Y|\leq M}|\mathcal{F}_m]| - \mathbb{E}[Y1_{|Y|\leq M}|\mathcal{F}_n]|] \leq \varepsilon.$)

• p 103 Corollaire 34 Soit Y une variable aléatoire intégrable sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ (*et pas* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$)

• p 103 Démonstration du corollaire 34
Ligne 7 Comme le résultat est vrai pour tout $A \in \cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$ (*et pas* $A \in \sigma(\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n)$)

6. Chapitre VII

• p 112 Graphe de la chaîne



• p 113 Promenade au hasard

$$p_{x,y} = \begin{cases} p, & \text{si } y = x+1 \\ 1-p, & \text{si } y = x-1 \\ 0, & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

(*et pas si* $j = i+1$, *ou* $j = i-1$)

• p. 117 Corollaire 13
Dernière ligne
De plus cette suite est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_{T^i}$. (*et pas de la tribu* $\mathcal{F}_T$)

• p 127 Preuve du lemme 30
(1) Ligne 10
On a donc trouvé deux lacets dont les longueurs diffèrent de 1. (*et pas de* a)

(2) Ligne 3
$q - r \geq 0$ car $n \geq n(i)^2$ (*et pas car* $n \geq n(i)$)

(3) Ligne 2
on a pour $n \geq n_0$, pour tout (i,j), $n = n_{ij} + s$ avec $s \geq n_1$ et donc $p_{i,j}^{(n)} \geq p_{i,j}^{(n_{ij})} p_{i,i}^{s} > 0$.

• p. 129

Modèle à deux états
(X_n) converge donc en loi vers μ quelle que soit la loi initiale
(*et pas* (X_n) *converge donc en loi vers* μ *quelle que soit la loi invariante*)

• p. 130 Ligne 9

La chaîne n'étant pas apériodique (*et pas la chaîne n'étant pas périodique*)

• p. 132 Démonstration de la proposition 36

Le théorème utilisé dans cette preuve est le théorème 34, pas le théorème 35.

• p. 135 Ligne 10
on sait qu'il existe i tel que $\tilde{\mu}(i) > 0$.(*et pas on sait qu'il existe* i *tel que* $\mu(i) > 0$.)

• p 135 Lignes 15-16-17 On a, pour tout j, $\mu(j) = p_{i,j} + \sum_{k \neq i} \mu(k) p_{k,j}$.
On en déduit que pour tout j, $\mu(j) \geq p_{i,j}$.
En reportant dans la somme de la formule précédente, on obtient $\mu(j) \geq p_{i,j} + \sum_{k \neq i} p_{i,k} p_{k,j} \geq p_{i,j} + \mathbb{P}(X_2 = j, T_i \geq 2 | X_0 = i)$

(*et pas* $\mu(j) = p_{j,i} + \sum_{k \neq i} \mu(k) p_{j,k}$, etc)

• p 135 ligne 21
Supposons que $\mu \neq \nu_i$, c'est-à-dire qu'il existe j tel que $\mu(j) > \nu_i(j)$.
(et pas $\mu(j) < \nu_i(j)$.)

• p. 136 Ligne 2
$N_n(j) = \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}$, *(et pas* $N_n(j) = \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_n=j\}}$,)

• p 137 Démonstration du corollaire 40
Ligne 7 Par conséquent $\lim_n \frac{1}{n}(p_{i,j} + \cdots + p_{i,j}^{(n)}) = \frac{1}{\mathbb{E}^j[T_j]} = \pi_{i,j}$
(et pas $\frac{1}{\mathbb{E}^i[T_i]}$)

7. Chapitre VIII

• p. 149 Démonstration du lemme 7, 3ème ligne avant la fin

$\mathbb{P}(N_{t_1} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k) = \frac{t_1^{n_1}}{n_1!} \frac{(t_2-t_1)^{n_2}}{n_2!} \ldots \frac{(t_k-t_{k-1})^{n_k}}{n_k!} e^{-\lambda t_k} \lambda^n$.

et pas

$\mathbb{P}(N_{t_1} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k) = \frac{t_1^{n_1}}{n_1!} \frac{(t_2-t_1)^{n_2}}{n_2!} \ldots \frac{(t_k-t_{k-1})^{n_k}}{n_k!} e^{-\lambda n}$.

8. Chapitre X

• p. 171 Définition 2

Ligne 2 : ϕ doit être une application *mesurable* de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

• p. 173 Définition 7

T_1 est un estimateur à variance minimale si $Var(T_1) \leq Var(T_2)$ *quel que soit l'estimateur* T_2.

• p. 173 Théorème 9.

Il manque l'hypothèse $E[X^4] < \infty$

• p. 182 Remarque (dernière ligne)

Un intervalle de confiance unilatère serait par exemple $] - \infty; \bar{X}_n + q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$