

Table des matières

Chapitre 1 : Notions de probabilité

1.1	Introduction.....	19
1.2	Des ensembles aux probabilités	20
1.2.1	Une expérience aléatoire	20
1.2.2	Le modèle de Kolmogorov.....	22
1.2.3	Construction d'une mesure de probabilité sur Ω fini	34
1.3	Propriétés des mesures de probabilité	35
1.3.1	Un peu d'axiomatique	35
1.3.2	La formule de Poincaré	38
1.4	Probabilité conditionnelle et indépendance	42
1.4.1	Étude d'un exemple.....	42
1.4.2	Définition et formule des probabilités composées	45
1.4.3	Indépendance en probabilité.....	47
1.4.4	Généralisation de l'indépendance en probabilité.....	49
1.5	Le théorème du révérend Thomas Bayes	51
1.5.1	Théorème des probabilités totales	51
1.5.2	Théorème de Bayes	53
1.5.3	Logique de la formule de Bayes.....	54
1.5.4	Du bon usage du théorème de Bayes.....	55
1.6	Calculs et dénombrements	56
1.6.1	L'hypothèse d'équiprobabilité	56
1.6.2	Tirage avec remise	58
1.6.3	Tirage sans remise et combinatoire	58
1.6.4	Développement binomial	61
1.7	Variables aléatoires finies.....	63
1.7.1	Généralités	63
1.7.2	Fonctions associées à une variable aléatoire finie.....	66
1.8	Exercices.....	69

Chapitre 2 : Variables aléatoires

2.1	Espaces de probabilité dénombrables.....	73
-----	--	----

2.1.1	Tribus d'événements	73
2.1.2	Mesures de probabilité	75
2.1.3	Continuité des mesures de probabilité.....	77
2.2	Espaces de probabilité infinis continus.....	80
2.2.1	Une approche intuitive	80
2.2.2	Tribus engendrées	82
2.2.3	Tribu des boréliens et prolongement des mesures de probabilité.....	83
2.2.4	Retour sur l'exemple de la ficelle.....	85
2.3	Le concept général de variable aléatoire	86
2.3.1	La question et le problème	86
2.3.2	Variables aléatoires et loi de probabilité	88
2.3.3	Fonctions de répartition.....	91
2.3.4	Types de variables aléatoires.....	93
2.4	Lois de probabilité discrètes.....	98
2.4.1	La loi de Bernoulli	98
2.4.2	La loi binomiale	99
2.4.3	La loi de Poisson	100
2.4.4	De la loi uniforme discrète à l'uniforme absolument continue	103
2.5	La loi normale ou gaussienne	104
2.5.1	La densité gaussienne.....	104
2.5.2	Préalables mathématiques	106
2.5.3	Intégrale de Gauss	108
2.5.4	La loi de Cauchy et sa relation à la loi normale	110
2.6	La loi Gamma et ses formes particulières	111
2.6.1	La fonction gamma	111
2.6.2	La loi et la densité gamma.....	113
2.6.3	La loi exponentielle.....	114
2.6.4	La loi du Khi-deux	115
2.7	Moments et caractéristiques d'une variable aléatoire.....	116
2.7.1	Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète finie.....	116
2.7.2	Généralisation aux variables aléatoires quelconques	118
2.7.3	Propriétés de l'espérance mathématique	120
2.7.4	La variance.....	121
2.7.5	Moments initiaux et centrés	123
2.7.6	Mode, médiane et quantiles.....	125

2.8	Fonctions caractéristiques.....	127
2.8.1	La fonction caractéristique et ses propriétés de base.....	127
2.8.2	Quelques exemples de fonctions caractéristiques	129
2.9	Calcul des moments à partir de la fonction caractéristique.....	133
2.9.1	Quelques propositions mathématiques	133
2.9.2	Moments et fonctions caractéristiques	136
2.9.3	Quelques exemples de calcul des moments.....	140
2.10	Exercices.....	143
	Annexe : l'exponentielle complexe.....	152

Chapitre 3 : Fonctions de variables aléatoires et vecteurs aléatoires

3.1	Fonctions d'une variable aléatoire.....	155
3.1.1	Première approche.....	155
3.1.2	Variables aléatoires discrètes	156
3.1.3	Le cas absolument continu	157
3.1.4	Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire.....	162
3.2	Couples aléatoires	165
3.2.1	Fonctions de répartition conjointes et marginales	165
3.2.2	Couples discrets et fonctions de masse de probabilité conjointes	169
3.2.3	Couples absolument continus et densités conjointes	171
3.3	Lois de probabilité conditionnelles	174
3.3.1	Un exemple introductif.....	174
3.3.2	Conditionnement par rapport à des variables aléatoires	177
3.3.3	Espérance conditionnelle.....	181
3.3.4	Variance conditionnelle.....	184
3.4	Indépendance et couples aléatoires	186
3.4.1	Définitions et résultats.....	186
3.4.2	Produit de convolution	190
3.5	Espérance de fonctions d'un couple aléatoire.....	192
3.5.1	Fonctions d'un couple aléatoire	192
3.5.2	Somme de variables aléatoires	195
3.6	Covariance et corrélation	197
3.6.1	Covariance et variance	197

3.6.2	Coefficient de corrélation.....	199
3.7	Fonctions vectorielles de couples aléatoires.....	200
3.7.1	La méthode du jacobien	201
3.7.2	Deux illustrations de la méthode	203
3.8	Vecteurs aléatoires	206
3.8.1	Extensions et généralisations.....	206
3.8.2	Moments des variables multidimensionnelles.....	210
3.9	Exercices	214

Chapitre 4 : Lois de probabilité

4.1	À nouveau sur la fonction caractéristique	223
4.1.1	Unicité des fonctions caractéristiques	223
4.1.2	Variables indépendantes et fonctions caractéristiques	225
4.2	Principales distributions discrètes	227
4.2.1	La loi de Poisson	227
4.2.2	Les lois géométrique et hypergéométrique.....	234
4.2.3	Lois binomiales	237
4.2.4	La loi multinomiale	242
4.3	Lois normales	246
4.3.1	La loi gaussienne : une synthèse	246
4.3.2	La loi normale centrée réduite.....	248
4.3.3	Symétrie et aplatissement de la densité normale	251
4.3.4	Utilisation des tables de la loi	253
4.3.5	Somme de variables aléatoires normales.....	255
4.3.6	La loi lognormale	256
4.4	Distributions dérivées de la loi normale	259
4.4.1	Densité et fonction caractéristique de	259
4.4.2	La loi du Khi-deux	261
4.4.3	La loi de Student	264
4.4.4	Utilisation des tables statistiques.....	267
4.5	Loi bêta et distribution de Fisher-Snedecor.....	270
4.5.1	Fonctions bêta	270
4.5.2	Lois bêta.....	271
4.5.3	La distribution de Fisher	273
4.5.4	Lecture des tables de la distribution F.....	276

4.6	Une loi conjointe : la loi normale bidimensionnelle	278
4.6.1	Définition et développements.....	278
4.6.2	Détermination des lois marginales	280
4.6.3	Lois normales conditionnelles.....	281
4.6.4	Normalité et corrélation	283
4.7	La loi normale multidimensionnelle	284
4.7.1	La densité multinormale.....	284
4.7.2	Propriétés de la loi multinormale	288
4.7.3	Lois marginales et conditionnelles.....	291
4.7.4	Formes quadratiques en des variables multinormales	293
4.8	Exercices.....	300

Chapitre 5 : Convergences et échantillonnage

5.1	Convergences en probabilité et en loi	309
5.1.1	Convergence en probabilité.....	309
5.1.2	Propriétés des limites en probabilité	311
5.1.3	La convergence en loi	313
5.1.4	Convergences en loi parmi les variables discrètes	317
5.1.5	Calculs d'approximations.....	320
5.2	Les lois des grands nombres.....	321
5.2.1	Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	322
5.2.2	La loi faible des grands nombres.....	323
5.2.3	Loi forte et convergence presque sûre.....	326
5.3	Le théorème de la limite centrée	330
5.3.1	Une première approche informelle.....	331
5.3.2	Le théorème classique	332
5.3.3	Quelques illustrations de l'utilisation du TLC	337
5.3.4	Extensions du TLC classique	340
5.3.5	Une version multivariée du TLC classique	344
5.4	Processus aléatoires et théorèmes-limite	346
5.4.1	Processus stochastiques.....	346
5.4.2	Mouvement brownien et marche aléatoire	349
5.4.3	Le théorème de la fonctionnelle limite centrée	354
5.4.4	Un théorème-limite pour les martingales	356
5.5	Populations et échantillons statistiques.....	360

5.5.1	Le concept de population	360
5.5.2	Types d'échantillons	361
5.5.3	Statistiques d'échantillonnage	364
5.6	Lois empiriques et échantillons gaussiens	365
5.6.1	Distributions d'échantillonnage	365
5.6.2	Loi de la moyenne empirique.....	367
5.6.3	Loi de la variance empirique.....	368
5.7	Échantillons et simulations.....	371
5.7.1	Introduction.....	371
5.7.2	Illustration des méthodes de Monte-Carlo	373
5.7.3	Génération de nombres aléatoires	374
5.8	Exemples de simulations.....	377
5.8.1	Variables aléatoires absolument continues.....	378
5.8.2	La méthode de Box-Muller	383
5.8.3	Variables aléatoires discrètes	385
5.8.4	Estimation d'un paramètre par simulation	386
5.8.5	Générer des trajectoires browniennes.....	388
5.9	Exercices.....	390

Chapitre 6 : Introduction à l'inférence statistique

6.1	Moindres carrés et moments	400
6.1.1	Le principe des moindres carrés.....	400
6.1.2	La régression simple	401
6.1.3	Généralisation à la régression multiple	405
6.1.4	La méthode des moments (M.M.)	407
6.2	Estimation par maximum de vraisemblance.....	409
6.2.1	Le principe du maximum de vraisemblance.....	409
6.2.2	Recherche des estimateurs du maximum de vraisemblance.....	411
6.2.3	Application à la régression simple	414
6.3	Autres méthodes d'estimation	416
6.3.1	Variables instrumentales	416
6.3.2	La méthode des moments généralisée : un aperçu	418
6.3.3	Le « bouttetrappage »	420
6.4	Critères de sélection des estimateurs	423
6.4.1	L'erreur quadratique moyenne	423

6.4.2	Le critère de la variance minimale	426
6.4.3	Propriétés asymptotiques.....	434
6.5	Exhaustivité et efficacité.....	436
6.5.1	Notion d'exhaustivité	436
6.5.2	Les théorèmes de Rao-Blackwell et de Lehmann-Scheffé.....	440
6.6	Tests d'hypothèse.....	443
6.6.1	Concepts premiers	444
6.6.2	Niveau et puissance d'un test	446
6.6.3	Une illustration.....	448
6.7	L'approche de Neyman-Pearson.....	450
6.7.1	Procédure de test	450
6.7.2	Régions de rejet et p-valeurs	452
6.7.3	Développement d'un exemple.....	454
6.8	Tests de puissance maximale	457
6.8.1	Motivation et définitions	458
6.8.2	Le lemme de Neyman-Pearson.....	459
6.8.3	Hypothèses composées et extensions du lemme	463
6.9	Rapport de vraisemblance.....	466
6.9.1	Rapport de vraisemblance et hypothèses simples.....	466
6.9.2	Monotonie du rapport de vraisemblance et tests UPP.....	469
6.10	Exercices.....	472

Chapitre 7 : Estimateurs et tests du maximum de vraisemblance

7.1	Le principe et son application.....	483
7.1.1	Vraisemblances	483
7.1.2	Une définition.....	485
7.2	Estimateurs du maximum de vraisemblance	491
7.2.1	Un seul paramètre	491
7.2.2	Plusieurs paramètres.....	495
7.2.3	Application au modèle linéaire général.....	500
7.3	Propriétés des estimateurs du maximum de vraisemblance.....	507
7.3.1	Propriétés à distance finie	507
7.3.2	Propriétés en grands échantillons.....	513

7.3.3	Extension à l'estimation de plusieurs paramètres.....	521
7.4	Méthodes numériques d'optimisation	529
7.4.1	Généralités	529
7.4.2	L'algorithme de Newton-Raphson	530
7.4.3	La procédure de Berndt-Hall-Hall-Hausman	532
7.5	Tests du rapport de vraisemblance	533
7.5.1	Motivation et définition.....	533
7.5.2	Une autre illustration : le t-test	537
7.5.3	Loi asymptotique du RV	539
7.6	La « Sainte Trinité » des tests asymptotiques	542
7.6.1	Une approche intuitive du test du rapport des vraisemblances.....	543
7.6.2	Tests de Wald et du multiplicateur de Lagrange	544
7.6.3	Une application	547
7.6.4	Généralisation	549
7.7	Lois asymptotiques	550
7.7.1	Dépendance des observations.....	550
7.7.2	Le théorème fondamental.....	553
7.8	Intervalles de confiance	555
7.8.1	Justification et définition.....	555
7.8.2	Relation aux tests d'hypothèses	557
7.9	Exercices.....	559
Appendices		
	Appendice A : Intégration.....	571
	Appendice B : Matrices et algèbre linéaire	577
	Appendice C : Tables statistiques	591
	Index terminologique.....	597