

Table des matières

Présentation de la collection	3
Quelques conseils pour bien apprendre	5
SAVOIRS	9
Thème 1 - Compléments d'algèbre linéaire	10
Thème 2 - Déterminant	18
Thème 3 - Réduction	21
Thème 4 - Espaces préhilbertiens réels et euclidiens	26
Thème 5 - Intégrales généralisées	37
Thème 6 - Séries numériques	44
Thème 7 - Séries entières	48
Thème 8 - Équations différentielles et systèmes différentiels	54
Thème 9 - Fonctions vectorielles	63
Thème 10 - Courbes du plan	69
Thème 11 - Fonctions de plusieurs variables	77
Thème 12 - Courbes de l'espace et surfaces	86
Thème 13 - Intégrale dépendant d'un paramètre	94
Thème 14 - Probabilités discrètes	97
Thème 15 - Variables aléatoires discrètes	100
SAVOIR-FAIRE	107
Thème 0 - Savoir-faire de base	108
Quels sont les principaux types de raisonnement?	108
Raisonnement par implication	108
Raisonnement par équivalence	109
Raisonnement par disjonction des cas	109
Faire un raisonnement par récurrence	109
Raisonnement par analyse et synthèse	110
Quels sont les savoir-faire de base en algèbre?	112
Montrer une inclusion	112
Montrer une égalité de deux ensembles	112
Montrer qu'une application est bijective	113
Connaître la formule du binôme	114
Traduire une matrice ou une application linéaire	114
Calculer un produit matriciel	115
Faire un changement de base	115

Quels sont les savoir-faire de base en analyse ?	116
Savoir majorer ou minorer	116
Connaître les sommes classiques	117
Connaître la formule de Taylor avec reste intégral	118
Connaître les développements limités usuels	119
Savoir retrouver les formules de base en trigonométrie	120
Connaître les grands théorèmes sur les suites	121
Utiliser un développement limité	122
Utiliser les comparaisons	122
Connaître le théorème fondamental d'une intégrale	124
Reconnaître une dérivée dans un calcul de primitive	124
Utiliser une intégration par parties (IPP)	125
Faire un changement de variables	126
Utiliser une somme de Riemann	127
Savoir majorer ou minorer une intégrale	127
Quels sont les savoir-faire de base en géométrie ?	128
Reconnaître si des vecteurs sont liés	128
Écrire une équation d'une droite ou d'un cercle dans le plan	129
Écrire un SEC ou une RP d'une droite dans l'espace	129
Écrire une EC ou une RP d'un plan dans l'espace	130
Savoir calculer la distance d'un point à une droite ou à un plan dans l'espace	131
À vous de jouer !	132
Thème 1 - Compléments d'algèbre linéaire	134
Comment démontrer que F est un \mathbf{K} -espace vectoriel ?	134
Prouver que F est un sev	134
Prouver que $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$	134
Utiliser le noyau et l'image d'une certaine application linéaire	135
Comment démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels ?	135
Utiliser la double inclusion	135
Utiliser les dimensions	135
Comment démontrer qu'une famille (v_1, \dots, v_p) est une base de E ?	136
Revenir à la définition	136
Utiliser une des propriétés fondamentales de 1 ^{re} année	136
Comment calculer la dimension d'un sous-espace vectoriel ?	137
Revenir à la définition	137
Appliquer le théorème du rang	137
Appliquer la formule de Grassmann	138
Comment calculer le rang d'une famille (v_1, \dots, v_p) ?	139
Revenir à la définition	139
Calculer le rang d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss	139
Comment démontrer qu'un espace vectoriel est une somme directe de sev ?	141
Revenir à la définition	141
Utiliser la caractérisation d'une somme directe de deux sev	142
Utiliser des bases adaptées	144
Comment caractériser une application ?	144
Démontrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$	144
Démontrer que c'est un isomorphisme	145
Traduire à l'aide d'une matrice simple	146
Comment caractériser un endomorphisme remarquable ?	147
Montrer que c'est une homothétie vectorielle	147
Montrer que c'est un projecteur	147
Montrer que c'est une symétrie	148
À vous de jouer !	149
Thème 2 - Déterminant	153
Comment calculer un déterminant ?	153
Utiliser une bonne combinaison linéaire	153
Faire apparaître un terme identique sur une colonne	154
Aboutir à une relation de récurrence	155
Transformer en une matrice triangulaire par blocs	157
Quand utiliser le déterminant ?	158
Savoir si une famille de vecteurs est une base	158

Savoir si un endomorphisme est bijectif	158
Déterminer une équation d'une droite ou d'un plan	159
À vous de jouer !	160
Thème 3 - Réduction	163
Comment déterminer les éléments propres ?	163
Revenir aux définitions	163
Savoir calculer le polynôme caractéristique en petite dimension	165
Comparer la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sep associé	166
Savoir trouver la dernière valeur propre	166
Savoir trouver les deux dernières valeurs propres	167
Utiliser les sous-espaces stables	169
Comment diagonaliser une matrice ?	170
Repérer si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples	170
Savoir si une matrice ayant une valeur propre unique est diagonalisable	172
Utiliser le théorème spectral	173
Comment trigonaliser une matrice ?	174
Trigonaliser une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$	174
Trigonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ possédant 2 valeurs propres différentes	176
Trigonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ possédant une valeur propre triple	178
Quand utiliser la diagonalisation ?	182
Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable	182
Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire	183
Étudier des suites simultanément récurrentes	185
À vous de jouer !	186
Thème 4 - Espaces vectoriels préhilbertiens réels et euclidiens	189
Comment montrer que φ est un produit scalaire ?	189
Revenir à la définition	189
Quand utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?	189
Identifier les éléments d'une inégalité	190
Comment déterminer l'orthogonal d'un sev de dimension finie ?	190
Utiliser une base du sev	190
Comment construire une base orthonormée (b.o.n) ?	191
Suivre la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	191
Comment déterminer le projeté orthogonal ?	193
Utiliser la formule de la projection orthogonale	193
Déterminer la projection orthogonale sur F^\perp	194
Résoudre un système linéaire	194
Comment résoudre un problème de minimisation ?	195
Utiliser une projection orthogonale	195
Comment montrer qu'un endomorphisme est une isométrie ?	196
Mettre en avant une caractérisation d'une isométrie	196
Comment caractériser une isométrie dans \mathbf{R}^2 ?	197
Calculer son déterminant	197
Comment caractériser une isométrie dans \mathbf{R}^3 ?	198
Évaluer la dimension du sev des invariants de l'isométrie	198
Utiliser le produit vectoriel	200
Comment déterminer la matrice d'une isométrie dans \mathbf{R}^3 ?	201
Passer par une base adaptée	201
Retrouver son expression vectorielle	203
Comment étudier une conique ?	204
Réduire son équation dans un repère orthonormé	204
À vous de jouer !	208
Thème 5 - Intégrales généralisées	211
Comment déterminer la nature d'une intégrale d'une fonction positive ?	211
Identifier les problèmes	211
Repérer une fausse intégrale généralisée	211
Utiliser les théorèmes de comparaison	212

Comment étudier l'intégrabilité d'une fonction continue ?	213
Appliquer les méthodes relatives aux fonctions positives	213
Comparer la fonction f	214
Appliquer la règle $t^\alpha f(t)$	214
Étudier les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ dans le cas complexe	216
Comment étudier la nature de $\int_I f$ où $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$?	217
Utiliser l'intégrabilité	218
Appliquer un changement de variable ou une IPP	218
Comment calculer une intégrale généralisée convergente ?	220
Utiliser une primitive	220
Intégrer par parties sur un segment	221
Utiliser un changement de variable	222
À vous de jouer !	223
Thème 6 - Séries numériques	225
Comment déterminer la nature d'une série à termes positifs ?	225
Utiliser les propriétés fondamentales de 1 ^{re} année	225
Utiliser le théorème de comparaison série-intégrale	241
Comment prouver la convergence absolue d'une série ?	227
Utiliser les théorèmes de comparaison	227
Appliquer la règle $n^\alpha u_n$	228
Appliquer la règle de d'Alembert	230
Étudier $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ d'une série à termes complexes	231
Utiliser le produit de Cauchy	232
Revenir à la définition	233
Comment étudier les suites $(S_N)_N$ et $(R_N)_N$?	233
Appliquer le théorème de comparaison série-intégrale	233
À vous de jouer !	235
Thème 7 - Séries entières	238
Comment calculer le rayon de convergence ?	238
Utiliser la caractérisation du rayon de convergence	238
Utiliser la règle de d'Alembert	238
Chercher un équivalent simple	239
Comparer les rayons de convergence	239
Revenir à la définition	240
Comment déterminer un développement en série entière ?	241
Utiliser les DSE de fonctions usuelles	241
Utiliser une équation différentielle	243
Utiliser la série de Taylor	246
Comment calculer la somme d'une série entière ?	246
Manipuler les DSE de fonctions usuelles	246
Trouver et résoudre une équation différentielle	249
Comment résoudre une équation du type $e^z = a$?	250
Revenir aux propriétés fondamentales	250
À vous de jouer !	251
Thème 8 - Équations différentielles et systèmes différentiels	255
Comment résoudre une équation différentielle scalaire d'ordre 1 ?	255
Suivre un plan d'étude en trois étapes	255
Comment résoudre un système différentiel ?	256
Diagonaliser ou trigonaliser la matrice associée	256
Comment résoudre une équation différentielle scalaire d'ordre 2 ?	260
Appliquer la méthode de la variation de la constante	260
Déterminer une solution développable en série entière	262
Faire un changement de variables	264
Utiliser la superposition des solutions	266
À vous de jouer !	267
Thème 9 - Fonctions vectorielles	270
Comment montrer qu'un ensemble est un ouvert ou un fermé de \mathbf{R}^n ?	270
Revenir à la définition	270

Utiliser les propriétés de topologie	270
Comment étudier une fonction vectorielle?	271
Utiliser les fonctions coordonnées	271
Revenir aux propriétés fondamentales	272
À vous de jouer!	272
Thème 10 - Courbes du plan	275
Comment réduire le domaine d'étude?	275
Repérer une invariance	275
Chercher d'éventuelles symétries	276
Comment étudier un point stationnaire?	278
Utiliser un développement limité	278
Utiliser une symétrie	279
Comment étudier les branches infinies?	281
Comparer les croissances des coordonnées	281
Comment déterminer les points doubles?	283
Résoudre un système	283
Comment étudier une courbe paramétrée et représenter son support?	284
Suivre un plan d'étude en six étapes	284
Comment déterminer l'enveloppe d'une famille de droites?	288
Utiliser la méthode vectorielle	288
Comment déterminer le repère de Frénet en un point?	290
Revenir à la définition	290
Comment déterminer la courbure et le rayon de courbure?	290
Revenir à la définition	290
Utiliser les formules de Frénet	292
Comment déterminer la développée d'une courbe?	292
Chercher le lieu des centres de courbure	292
Chercher l'enveloppe des normales	293
À vous de jouer!	295
Thème 11 - Fonctions de plusieurs variables	298
Comment étudier la continuité d'une fonction?	298
Utiliser les théorèmes généraux	298
Majorer convenablement	298
Paramétrer avec les coordonnées polaires	299
Comment montrer qu'une fonction est de classe C^1 ou C^2 ?	300
Utiliser les théorèmes généraux	300
Utiliser les dérivées partielles	300
Comment résoudre une équation aux dérivées partielles (EDP)?	303
Faire un changement de variable	303
Comment déterminer les extrema?	304
Étudier la matrice hessienne	304
Mettre en avant une combinaison linéaire de carrés	306
Chercher les extrema sur un ensemble fermé borné	308
À vous de jouer!	311
Thème 12 - Courbes de l'espace et surfaces	314
Comment montrer qu'une courbe est plane?	314
Vérifier une équation d'un plan	314
Comment déterminer les projections d'une courbe sur les plans des coordonnées?	315
Éliminer un paramètre entre les équations	315
Comment déterminer les sections planes d'une surface?	318
Projeter la section sur un plan des coordonnées	318
Comment déterminer les points stationnaires d'une surface?	319
Utiliser les dérivées partielles	319
Comment déterminer une équation d'un plan tangent à une surface?	320
Caractériser un plan tangent par un vecteur orthogonal	320
Comment déterminer une tangente à une courbe?	322
Paramétrer la courbe	322

Utiliser le gradient dans le cas des courbes de niveau	322
Voir la courbe comme intersection de deux surfaces	324
Comment démontrer qu'une surface est réglée ?	325
Décomposer la surface en une réunion de droites	325
Comment déterminer si une surface est développable ?	326
Étudier les vecteurs normaux le long d'une génératrice	326
Comment déterminer une équation d'une surface de révolution ?	328
Éliminer des coordonnées entre les équations	328
Comment déterminer une RP d'une surface de révolution ?	330
Utiliser une matrice de rotation	330
Comment déterminer une méridienne ?	331
Choisir un bon repère	331
À vous de jouer !	332
Thème 13 - Intégrale dépendant d'un paramètre	338
Comment déterminer le domaine de définition ?	338
Étudier la convergence de l'intégrale	338
Comment prouver la continuité ?	340
Utiliser le théorème de la continuité dans le cas d'un intervalle	340
Utiliser le théorème de la continuité dans le cas d'un segment	341
Comment prouver la dérivabilité ?	342
Utiliser le théorème de la dérivabilité dans le cas d'un intervalle	342
Utiliser le théorème de la dérivabilité dans le cas d'un segment	344
Comment calculer une intégrale dépendant d'un paramètre ?	345
Utiliser la dérivée	345
Utiliser une équation différentielle	346
À vous de jouer !	348
Thème 14 - Probabilités discrètes	351
Comment montrer qu'un ensemble est dénombrable ?	351
Revenir aux propriétés fondamentales	351
Comment calculer la probabilité d'une intersection d'événements ?	351
Étudier l'indépendance ou l'inclusion entre les événements	351
Comment calculer la probabilité d'une réunion d'événements ?	353
Étudier l'incompatibilité ou l'inclusion entre les événements	353
Comment utiliser la formule de Bayes ?	354
Calculer une probabilité totale	354
Calculer une probabilité conditionnelle	355
Comment calculer une probabilité ?	356
Utiliser des opérations élémentaires sur les événements	356
Construire un système complet d'événements	357
À vous de jouer !	358
Thème 15 - Variables aléatoires discrètes	362
Comment démontrer qu'une loi est de probabilité ?	362
Vérifier deux critères	362
Comment reconnaître les lois usuelles ?	363
Modéliser l'expérience	363
Utiliser la série génératrice	365
Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire ?	366
Utiliser le dénombrement ou les lois usuelles	366
Utiliser la fonction de répartition	366
Utiliser la série génératrice	368
Comment calculer l'espérance ou la variance ?	368
Revenir aux définitions	368
Utiliser la série génératrice	369
Utiliser le théorème du transfert	370
Comment étudier la loi conjointe de (X, Y) ?	371
Interpréter les événements élémentaires	371
Utiliser les probabilités conditionnelles	372

Comment déterminer les lois marginales?	373
Calculer une somme	373
Comment étudier l'indépendance de deux variables aléatoires?	374
Vérifier si la covariance est non nulle	374
Revenir à la définition	376
Comment encadrer une probabilité?	377
Utiliser les inégalités classiques	377
À vous de jouer!	378
CORRIGÉS DES EXERCICES	383